This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Edition la plus estimée de cet ouvrage im=
=mortel. V. Manuel du Libraire par
Brunet. tom 2.e pag. 636

GEORGE R.

WHEREAS Our Truſty and well beloved *William Innys* and *John Innys* of Our City of *London*, Bookſellers, have by their Petition repreſented unto Us, that they have at great Charge and Expence printed a new and correct Edition of a Book intituled, *Philoſophiæ Naturalis Principia Mathematica*; *Auctore Iſaaco Newtono Eq. Aur. Editio tertia aucta & emendata:* And the ſole Right and Title of the Copy of the ſame, being veſted in the ſaid *William Innys* and *John Innys*, they have humbly beſought Us to grant them Our Royal Privilege and Licence, for the ſole printing and publiſhing thereof for the Term of fourteen Years: We being willing to give all due Encouragement to Works of this Nature, which tend to the Advancement of Learning, are graciouſly pleaſed to gratify them in their Requeſt, and do, by theſe Preſents, agreeable to the Statutes in that Behalf made and provided, for Us, Our Heirs and Succeſſors, give and grant unto them the ſaid *William Innys* and *John Innys*, their Executors, Adminiſtrators and Aſſigns, Our Royal Licenſe for the ſole printing and publiſhing the ſaid Book intituled, *Philoſophiæ Naturalis Principia Mathematica*; *Auctore Iſaaco Newtono Eq. Aur.* for the Term of fourteen Years from the Date hereof, ſtrictly forbidding all Our Subjects within Our Kingdoms and Dominions to reprint the ſame, either in the like or in any other Volume or Volumes whatſoever, or to Import, Buy, Vend, Utter or Diſtribute any Copies thereof reprinted beyond the Seas, during the aforeſaid term of fourteen Years, without the Conſent or Approbation of the ſaid *William Innys* and *John Innys*, their Heirs, Executors, and Aſſigns under their Hands and Seals firſt had and obtained, as they ſhall anſwer the contrary at their Peril: Whereof Our Commiſſioners and other Officers of Our Cuſtoms, the Maſter Wardens and Company of Stationers, are to take Notice that due Obedience be rendered thereunto. Given at Our Court at St. *James's* the twenty fifth Day of *March*, 1726. in the twelfth Year of Our Reign.

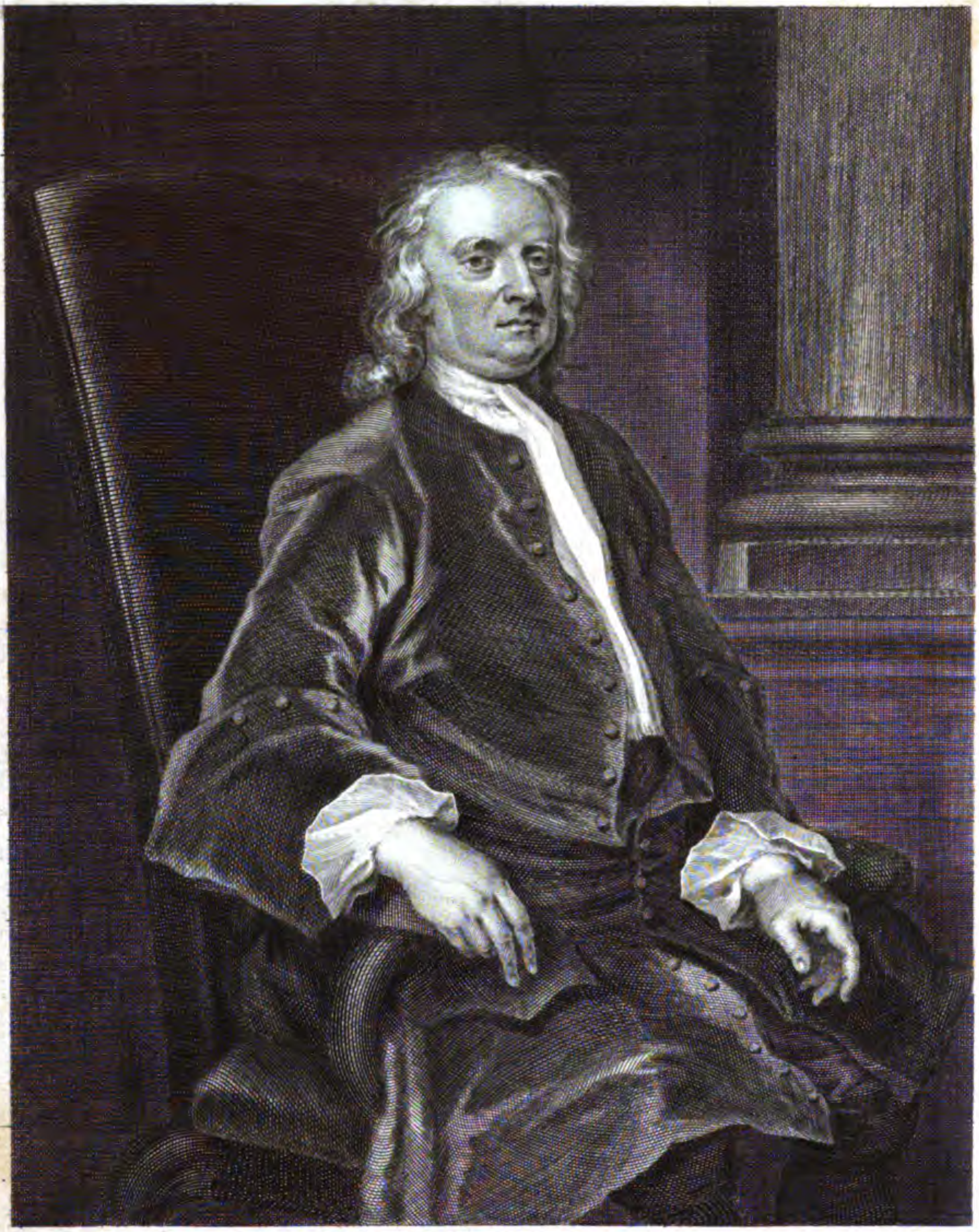
By his Majeſty's Command,

TOWNSHEND.

NEWTONI

PRINCIPIA

PHILOSOPHIÆ.



ISAACUS NEWTON EQ. AUR. ÆT. 83.

I. Vanderbank pinxit 1725 *Geo. Vertue Sculpsit 1726.*

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

AUCTORE
ISAACO NEWTONO, Eq. Aur.

Editio tertia aucta & emendata.

LONDINI:
Apud Guil. & Joh. Innys, Regiæ Societatis typographos.
MDCCXXVI.

ILLUSTRISSIMÆ

SOCIETATI REGALI

A

SERENISSIMO REGE

CAROLO II

AD PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM

FUNDATÆ,

ET

AUSPICIIS

SERENISSIMI REGIS

GEORGII

FLORENTI

TRACTATUM HUNC D.D.D.

IS. NEWTON.

IN

VIRI PRÆSTANTISSIMI

ISAACI NEWTONI

OPUS HOCCE

MATHEMATICO-PHYSICUM

ſeculi gentiſque noſtræ decus egregium.

EN tibi norma poli, & divæ libramina molis,
Computus en Jovis; & quas, dum primordia rerum
Pangeret, omniparens leges violare creator
Noluit, atque operum quæ fundamenta locârit.
Intima panduntur victi penetralia cæli,
Nec latet extremos quæ vis circumrotat orbes.
Sol ſolio reſidens ad ſe jubet omnia prono
Tendere deſcenſu, nec recto tramite currus
Siderios patitur vaſtum per inane moveri;
Sed rapit immotis, ſe centro, ſingula gyris.
Jam patet horrificis quæ ſit via flexa cometis;
Jam non miramur barbati phænomena aſtri.
Diſcimus hinc tandem qua cauſa argentea Phœbe
Paſſibus haud æquis graditur; cur ſubdita nulli
Hactenus aſtronomo numerorum fræna recuſet:
Cur remeant nodi, curque auges progrediuntur.
Diſcimus & quantis refluum vaga Cynthia pontum
Viribus impellit, feſſis dum fluctibus ulvam
Deſerit, ac nautis ſuſpectas nudat arenas;
Alternis vicibus ſuprema ad littora pulſans.

Quæ

Quæ toties animos veterum torſere ſophorum,
Quæque ſcholas fruſtra rauco certamine vexant,
Obvia conſpicimus, nubem pellente matheſi.
Jam dubios nulla caligine prægravat error,
Queis ſuperum penetrare domos atque ardua cæli
Scandere ſublimis genii conceſſit acumen.
Surgite mortales, terrenas mittite curas;
Atque hinc cæligenæ vires dignoſcite mentis,
A pecudum vita longe lateque remotæ.
Qui ſcriptis juſſit tabulis compeſcere cædes,
Furta & adulteria, & perjuræ crimina fraudis;
Quive vagis populis circundare mœnibus urbes
Auctor erat; Cererisve beavit munere gentes;
Vel qui curarum lenimen preſſit ab uva;
Vel qui Niliaca monſtravit arundine pictos
Conſociare ſonos, oculiſque exponere voces;
Humanam ſortem minus extulit: utpote pauca
Reſpiciens miſeræ tantum ſolamina vitæ.
Jam vero ſuperis convivæ admittimur, alti
Jura poli tractare licet, jamque abdita cæcæ
Clauſtra patent terræ, rerumque immobilis ordo,
Et quæ præteriti latuerunt ſecula mundi.
Talia monſtrantem mecum celebrate camænis,
Vos ô cælicolum gaudentes nectare veſci,
NEWTONUM clauſi reſerantem ſcrinia veri,
NEWTONUM Muſis charum, cui pectore puro
Phœbus adeſt, totoque inceſſit numine mentem:
Nec fas eſt propius mortali attingere divos.

EDM. HALLEY.

PRÆ-

AUCTORIS
PRÆFATIO
AD
LECTOREM.

C*UM veteres* mechanicam (*uti auctor eſt* Pappus) *in rerum naturalium inveſtigatione maximi fecerint*; & *recentiores, miſſis formis ſubſtantialibus* & *qualitatibus occultis, phænomena naturæ ad leges mathematicas revocare aggreſſi ſint: Viſum eſt in hoc tractatu* matheſin *excolere, quatenus ea ad* philoſophiam *ſpectat.* Mechanicam *vero duplicem veteres conſtituerunt:* rationalem, *quæ per demonſtrationes accurate procedit,* & practicam. *Ad practicam ſpectant artes omnes manuales, a quibus utique* mechanica *nomen mutuata eſt. Cum autem artifices parum accurate operari ſoleant, fit ut* mechanica *omnis a* geometria *ita diſtinguatur, ut quicquid accuratum ſit ad* geometriam *referatur, quicquid minus accuratum ad* mechanicam. *Attamen errores non ſunt artis, ſed artificum. Qui minus accurate operatur, imperfectior eſt mechanicus,* & *ſi quis accuratiſſime operari poſſet, hic foret mechanicus omnium perfectiſſimus. Nam* & *linearum rectarum* & *circulorum deſcriptiones, in quibus* geometria *fundatur, ad* mechanicam *pertinent. Has lineas deſcribere* geometria *non docet, ſed poſtulat. Poſtulat enim ut tyro eaſdem accurate deſcribere prius didiceret, quam limen attingat* geometriæ; *dein, quomodo per has operationes problemata ſolvantur, docet; rectas* & *circulos deſcribere problemata ſunt, ſed non geometrica. Ex* mechanica *poſtulatur horum ſolutio, in* geometria *docetur ſolutorum uſus. Ac gloriatur* geometria *quod tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præſtet. Fundatur igitur* geometria *in praxi mechanica,* & *nihil aliud eſt quam* mechanicæ univerſalis *pars illa, quæ artem menſurandi accurate proponit ac demonſtrat. Cum autem artes manuales in corporibus movendis præcipue verſentur, fit ut* geometria *ad magnitudinem,* mechani-

ca *ad motum vulgo referatur. Quo ſenſu* mechanica rationalis *erit ſcientia motuum, qui ex viribus quibuſcunque reſultant, & virium quæ ad motus quoſcunque requiruntur, accurate propoſita ac demonſtrata. Pars hæc* mechanicæ *a veteribus in* potentiis quinque *ad artes manuales ſpectantibus exculta fuit, qui gravitatem (cum potentia manualis non ſit) vix aliter quam in ponderibus per potentias illas movendis conſiderarunt. Nos autem non artibus ſed philoſophiæ conſulentes, deque potentiis non manualibus ſed naturalibus ſcribentes, ea maxime tractamus, quæ ad gravitatem, levitatem, vim elaſticam, reſiſtentiam fluidorum & ejuſmodi vires ſeu attractivas ſeu impulſivas ſpectant: Et ea propter, hæc noſtra tanquam philoſophiæ principia mathematica proponimus. Omnis enim philoſophiæ difficultas in eo verſari videtur, ut a phænomenis motuum inveſtigemus vires naturæ, deinde ab his viribus demonſtremus phænomena reliqua. Et huc ſpectant propoſitiones generales, quas libro primo & ſecundo pertractavimus. In libro autem tertio exemplum hujus rei propoſuimus per explicationem ſyſtematis mundani. Ibi enim, ex phænomenis cœleſtibus, per propoſitiones in libris prioribus mathematice demonſtratas, derivantur vires gravitatis, quibus corpora ad ſolem & planetas ſingulos tendunt. Deinde ex his viribus per propoſitiones etiam mathematicas, deducuntur motus planetarum, cometarum, lunæ & maris. Utinam cætera naturæ phænomena ex principiis mechanicis eodem argumentandi genere derivare liceret. Nam multa me movent, ut nonnihil ſuſpicer ea omnia ex viribus quibuſdam pendere poſſe, quibus corporum particulæ per cauſas nondum cognitas vel in ſe mutuo impelluntur & ſecundum figuras regulares cohærent, vel ab invicem fugantur & recedunt: quibus viribus ignotis, philoſophi hactenus naturam fruſtra tentarunt. Spero autem quod vel huic philoſophandi modo, vel veriori alicui, principia hic poſita lucem aliquam præbebunt.*

In his edendis, vir acutiſſimus & in omni literarum genere eruditiſſimus Edmundus Halleius *operam navavit, nec ſolum typothetarum ſphalmata correxit & ſchemata incidi curavit, ſed etiam auctor fuit, ut horum editionem aggrederer. Quippe cum demonſtratam a me figuram orbium cœleſtium impetraverat, rogare non deſtitit, ut eandem cum* Societate Regali *communicarem, quæ deinde hortatibus & benignis ſuis auſpiciis effecit, ut de eadem in lucem emittenda cogitare inciperem. At poſtquam motuum lunarium inæqualitates aggreſſus*

eſſem,

eſſem, deinde etiam alia tentare cœpiſſem, quæ ad leges & menſuras gravitatis & aliarum virium, & figuras a corporibus ſecundum datas quaſcunque leges attractis deſcribendas, ad motus corporum plurium inter ſe, ad motus corporum in mediis reſiſtentibus, ad vires, denſitates & motus mediorum, ad orbes cometarum & ſimilia ſpectant, editionem in aliud tempus differendam eſſe putavi, ut cætera rimarer & una in publicum darem. Quæ ad motus lunares ſpectant (imperfecta cum ſint) in corollariis propoſitionis LXVI *ſimul complexus ſum, ne ſingula methodo prolixiore quam pro rei dignitate proponere, & ſigillatim demonſtrare tenerer, & ſeriem reliquarum propoſitionum interrumpere. Nonnulla ſero inventa locis minus idoneis inſerere malui, quam numerum propoſitionum & citationes mutare. Ut omnia candide legantur, & defectus in materia tam difficili non tam reprehendantur, quam novis lectorum conatibus inveſtigentur, & benigne ſuppleantur, enixe rogo.*

Dabam *Cantabrigiæ*, e Collegio
S. Trinitatis, Maii 8. 1686.

IS. NEWTON.

AUCTORIS PRÆFATIO

IN

EDITIONEM SECUNDAM.

IN *hac ſecunda Principiorum editione multa ſparſim emendantur, & nonnulla adjiciuntur. In libri primi ſectione* II *inventio virium, quibus corpora in orbibus datis revolvi poſſint, facilior redditur & amplior. In libri ſecundi ſectione* VII *theoria reſiſtentiæ fluidorum accuratius inveſtigatur, & novis experimentis confirmatur. In libro tertio theoria lunæ & præceſſio æquinoctiorum ex principiis ſuis plenius deducuntur, & theoria cometarum pluribus & accuratius computatis orbium exemplis confirmatur.*

Dabam *Londini*,
Mar. 28. 1713.

IS. NEWTON.

EDI-

EDITORIS PRÆFATIO

IN

EDITIONEM SECUNDAM.

NEWTONIANÆ philoſophiæ novam tibi, lector benevole, diuque deſideratam editionem, plurimum nunc emendatam atque auctiorem exhibemus. Quæ potiſſimum contineantur in hoc opere celeberrimo, intelligere potes ex indicibus adjectis: quæ vel addantur vel immutentur, ipſa te fere docebit auctoris præfatio. Reliquum eſt, ut adjiciantur nonnulla de methodo hujus philoſophiæ.

Qui phyſicam tractandam ſuſceperunt, ad tres fere claſſes revocari poſſunt. Extiterunt enim, qui ſingulis rerum ſpeciebus qualitates ſpecificas & occultas tribuerint; ex quibus deinde corporum ſingulorum operationes, ignota quadam ratione, pendere voluerunt. In hoc poſita eſt ſumma doctrinæ ſcholaſticæ, ab *Ariſtotele* & Peripateticis derivatæ: Affirmant utique ſingulos effectus ex corporum ſingularibus naturis oriri; at unde ſint illæ naturæ non docent; nihil itaque docent. Cumque toti ſint in rerum nominibus, non in ipſis rebus; ſermonem quendam philoſophicum cenſendi ſunt adinveniſſe, philoſophiam tradidiſſe non ſunt cenſendi.

Alii ergo melioris diligentiæ laudem conſequi ſperarunt rejecta vocabulorum inutili farragine. Statuerunt itaque materiam univerſam homogeneam eſſe, omnem vero formarum varietatem, quæ in corporibus cernitur, ex particularum componentium ſimpliciſſimis quibuſdam & intellectu facillimis affectionibus oriri. Et recte quidem progreſſio inſtituitur a ſimplicioribus ad magis compoſita, ſi particularum primariis illis affectionibus non alios tribuunt modos, quam

quos

quos ipſa tribuit natura. Verum ubi licentiam ſibi aſſumunt, ponendi quaſcunque libet ignotas partium figuras & magnitudines, incertoſque ſitus & motus; quin & fingendi fluida quædam occulta, quæ corporum poros liberrime permeent, omnipotente prædita ſubtilitate, motibuſque occultis agitata; jam ad ſomnia delabuntur, neglecta rerum conſtitutione vera: quæ ſane fruſtra petenda eſt ex fallacibus conjecturis, cum vix etiam per certiſſimas obſervationes inveſtigari poſſit. Qui ſpeculationum ſuarum fundamentum deſumunt ab hypotheſibus; etiamſi deinde ſecundum leges mechanicas accuratiſſime procedant; fabulam quidem elegantem forte & venuſtam, fabulam tamen concinnare dicendi ſunt.

Relinquitur adeo tertium genus, qui philoſophiam ſcilicet experimentalem profitentur. Hi quidem ex ſimpliciſſimis quibus poſſunt principiis rerum omnium cauſas derivandas eſſe volunt: nihil autem principii loco aſſumunt, quod nondum ex phænomenis comprobatum fuerit. Hypotheſes non comminiſcuntur, neque in phyſicam recipiunt, niſi ut quæſtiones de quarum veritate diſputetur. Duplici itaque methodo incedunt, analytica & ſynthetica. Naturæ vires legeſque virium ſimpliciores ex ſelectis quibuſdam phænomenis per analyſin deducunt, ex quibus deinde per ſyntheſin reliquorum conſtitutionem tradunt. Hæc illa eſt philoſophandi ratio longe optima, quam præ cæteris merito amplectendum cenſuit celeberrimus auctor noſter. Hanc ſolam utique dignam judicavit, in qua excolenda atque adornanda operam ſuam collocaret. Hujus igitur illuſtriſſimum dedit exemplum, mundani nempe ſyſtematis explicationem e theoria gravitatis feliciſſime deductam. Gravitatis virtutem univerſis corporibus ineſſe, ſuſpicati ſunt vel finxerunt alii: primus ille & ſolus ex apparentiis demonſtrare potuit, & ſpeculationibus egregiis firmiſſimum ponere fundamentum.

Scio equidem nonnullos magni etiam nominis viros, præjudiciis quibuſdam plus æquo occupatos, huic novo principio ægre aſſentiri potuiſſe, & certis incerta identidem prætuliſſe. Horum famam vellicare non eſt animus: tibi potius, benevole lector, illa paucis exponere lubet, ex quibus tute ipſe judicium non iniquum feras.

Igitur ut argumenti ſumatur exordium a ſimpliciſſimis & proximis; diſpiciamus pauliſper qualis ſit in terreſtribus natura gravitatis, ut deinde tutius progrediamur ubi ad corpora cæleſtia, longiſſime a ſe-

dibus noſtris remota, perventum fuerit. Convenit jam inter omnes philoſophos, corpora univerſa circumterreſtria gravitare in terram. Nulla dari corpora vere levia, jamdudum confirmavit experientia multiplex. Quæ dicitur levitas relativa, non eſt vera levitas, ſed apparens ſolummodo; & oritur a præpollente gravitate corporum contiguorum.

Porro, ut corpora univerſa gravitent in terram, ita terra viciſſim in corpora æqualiter gravitat; gravitatis enim actionem eſſe mutuam & utrinque æqualem, ſic oſtenditur. Diſtinguatur terræ totius moles in binas quaſcunque partes, vel æquales vel utcunque inæquales: jam ſi pondera partium non eſſent in ſe mutuo æqualia; cederet pondus minus majori, & partes conjunctæ pergerent recta moveri ad infinitum, verſus plagam in quam tendit pondus majus: omnino contra experientiam. Itaque dicendum erit, pondera partium in æquilibrio eſſe conſtituta: hoc eſt, gravitatis actionem eſſe mutuam & utrinque æqualem.

Pondera corporum, æqualiter a centro terræ diſtantium, ſunt ut quantitates materiæ in corporibus. Hoc utique colligitur ex æquali acceleratione corporum omnium, e quiete per ponderum vires cadentium: nam vires quibus inæqualia corpora æqualiter accelerantur, debent eſſe proportionales quantitatibus materiæ movendæ. Jam vero corpora univerſa cadentia æqualiter accelerari, ex eo patet, quod in vacuo *Boyliano* temporibus æqualibus æqualia ſpatia cadendo deſcribunt, ſublata ſcilicet aëris reſiſtentia: accuratius autem comprobatur per experimenta pendulorum.

Vires attractivæ corporum, in æqualibus diſtantiis, ſunt ut quantitates materiæ in corporibus. Nam cum corpora in terram & terra viciſſim in corpora momentis æqualibus gravitent; terræ pondus in unumquodque corpus, ſeu vis qua corpus terram attrahit, æquabitur ponderi corporis ejuſdem in terram. Hoc autem pondus erat ut quantitas materiæ in corpore: itaque vis qua corpus unumquodque terram attrahit, ſive corporis vis abſoluta, erit ut eadem quantitas materiæ.

Oritur ergo & componitur vis attractiva corporum integrorum ex viribus attractivis partium: ſiquidem aucta vel diminuta mole materiæ, oſtenſum eſt, proportionaliter augeri vel diminui ejus virtutem. Actio itaque telluris ex conjunctis partium actionibus conflari

flari cenſenda erit; atque adeo corpora omnia terreſtria ſe mutuo trahere oportet viribus abſolutis, quæ ſint in ratione materiæ trahentis. Hæc eſt natura gravitatis apud terram: videamus jam qualis ſit in cælis.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo vel quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus a viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare; naturæ lex eſt ab omnibus recepta philoſophis. Inde vero ſequitur, corpora quæ in curvis moventur, atque adeo de lineis rectis orbitas ſuas tangentibus jugiter abeunt, vi aliqua perpetuo agente retineri in itinere curvilineo. Planetis igitur in orbibus curvis revolventibus neceſſario aderit vis aliqua, per cujus actiones repetitas indeſinenter a tangentibus deflectantur.

Jam illud concedi æquum eſt, quod mathematicis rationibus colligitur & certiſſime demonſtratur; corpora nempe omnia, quæ moventur in linea aliqua curva in plano deſcripta, quæque radio ducto ad punctum vel quieſcens vel utcunque motum deſcribunt areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgeri a viribus quæ ad idem punctum tendunt. Cum igitur in confeſſo ſit apud aſtronomos, planetas primarios circum ſolem, ſecundarios vero circum ſuos primarios, areas deſcribere temporibus proportionales; conſequens eſt ut vis illa, qua perpetuo detorquentur a tangentibus rectilineis & in orbitis curvilineis revolvi coguntur, verſus corpora dirigatur quæ ſita ſunt in orbitarum centris. Hæc itaque vis non inepte vocari poteſt, reſpectu quidem corporis revolventis, centripeta; reſpectu autem corporis centralis, attractiva; a quacunque demum cauſa oriri fingatur.

Quin & hæc quoque concedenda ſunt, & mathematice demonſtrantur: Si corpora plura motu æquabili revolvantur in circulis concentricis, & quadrata temporum periodicorum ſint ut cubi diſtantiarum a centro communi; vires centripetas revolventium fore reciproce ut quadrata diſtantiarum. Vel, ſi corpora revolvantur in orbitis quæ ſunt circulis finitimæ, & quieſcant orbitarum apſides; vires centripetas revolventium fore reciproce ut quadrata diſtantiarum. Obtinere caſum alterutrum in planetis univerſis conſentiunt aſtronomi. Itaque vires centripetæ planetarum omnium ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum ab orbium centris. Si quis objiciat planetarum, & lunæ præſertim, apſides non penitus quieſcere; ſed motu quodam

 lento

lento ferri in conſequentia: reſponderi poteſt, etiamſi concedamus hunc motum tardiſſimum exinde profectum eſſe quod vis centripetæ proportio aberret aliquantum a duplicata, aberrationem illam per computum mathematicum inveniri poſſe & plane inſenſibilem eſſe. Ipſa enim ratio vis centripetæ lunaris, quæ omnium maxime turbari debet, paululum quidem duplicatam ſuperabit; ad hanc vero ſexaginta fere vicibus propius accedet quam ad triplicatam. Sed verior erit reſponſio, ſi dicamus hanc apſidum progreſſionem, non ex aberratione a duplicata proportione, ſed ex alia prorſus diverſa cauſa oriri, quemadmodum egregie commonſtratur in hac philoſophia. Reſtat ergo ut vires centripetæ, quibus planetæ primarii tendunt verſus ſolem & ſecundarii verſus primarios ſuos, ſint accurate ut quadrata diſtantiarum reciproce.

Ex iis quæ hactenus dicta ſunt, conſtat planetas in orbitis ſuis retineri per vim aliquam in ipſos perpetuo agentem: conſtat vim illam dirigi ſemper verſus orbitarum centra: conſtat hujus efficaciam augeri in acceſſu ad centrum, diminui in receſſu ab eodem: & augeri quidem in eadem proportione qua diminuitur quadratum diſtantiæ, diminui in eadem proportione qua diſtantiæ quadratum augetur. Videamus jam, comparatione inſtituta inter planetarum vires centripetas & vim gravitatis, annon ejuſdem forte ſint generis. Ejuſdem vero generis erunt, ſi deprehendantur hinc & inde leges eædem, eædemque affectiones. Primo itaque lunæ, quæ nobis proxima eſt, vim centripetam expendamus.

Spatia rectilinea, quæ a corporibus e quiete demiſſis dato tempore ſub ipſo motus initio deſcribuntur, ubi a viribus quibuſcunque urgentur, proportionalia ſunt ipſis viribus: hoc utique conſequitur ex ratiociniis mathematicis. Erit igitur vis centripeta lunæ in orbita ſua revolventis, ad vim gravitatis in ſuperficie terræ, ut ſpatium quod tempore quam minimo deſcriberet luna deſcendendo per vim centripetam verſus terram, ſi circulari omni motu privari fingeretur, ad ſpatium quod eodem tempore quam minimo deſcribit grave corpus in vicinia terræ, per vim gravitatis ſuæ cadendo. Horum ſpatiorum prius æquale eſt arcus a luna per idem tempus deſcripti ſinui verſo, quippe qui lunæ tranſlationem de tangente, factam a vi centripeta, metitur; atque adeo computari poteſt ex datis tum lunæ

tempore periodico, tum diſtantia ejus a centro terræ. Spatium poſterius invenitur per experimenta pendulorum, quemadmodum docuit *Hugenius*. Inito itaque calculo, ſpatium prius ad ſpatium poſterius, ſeu vis centripeta lunæ in orbita ſua revolventis ad vim gravitatis in ſuperficie terræ, erit ut quadratum ſemidiametri terræ ad orbitæ ſemidiametri quadratum. Eandem habet rationem, per ea quæ ſuperius oſtenduntur, vis centripeta lunæ in orbita ſua revolventis ad vim lunæ centripetam prope terræ ſuperficiem. Vis itaque centripeta prope terræ ſuperficiem æqualis eſt vi gravitatis. Non ergo diverſæ ſunt vires, ſed una atque eadem: ſi enim diverſæ eſſent, corpora viribus conjunctis duplo celerius in terram caderent quam ex vi ſola gravitatis. Conſtat igitur vim illam centripetam, qua luna perpetuo de tangente vel trahitur vel impellitur & in orbita retinetur, ipſam eſſe vim gravitatis terreſtris ad lunam uſque pertingentem. Et rationi quidem conſentaneum eſt ut ad ingentes diſtantias illa ſeſe virtus extendat, cum nullam ejus ſenſibilem imminutionem, vel in altiſſimis montium cacuminibus, obſervare licet. Gravitat itaque luna in terram: quin & actione mutua, terra viciſſim in lunam æqualiter gravitat: id quod abunde quidem confirmatur in hac philoſophia, ubi agitur de maris æſtu & æquinoctiorum præceſſione, ab actione tum lunæ tum ſolis in terram oriundus. Hinc & illud tandem edocemur, qua nimirum lege vis gravitatis decreſcat in majoribus a tellure diſtantiis. Nam cum gravitas non diverſa ſit a vi centripeta lunari, hæc vero ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ; diminuetur & gravitas in eadem ratione.

Progrediamur jam ad planetas reliquos. Quoniam revolutiones primariorum circa ſolem & ſecundariorum circa jovem & ſaturnum ſunt phænomena generis ejuſdem ac revolutio lunæ circa terram, quoniam porro demonſtratum eſt vires centripetas primariorum dirigi verſus centrum ſolis, ſecundariorum verſus centra jovis & ſaturni, quemadmodum lunæ vis centripeta verſus terræ centrum dirigitur; adhæc, quoniam omnes illæ vires ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a centris, quemadmodum vis lunæ eſt ut quadratum diſtantiæ a terra: concludendum erit eandem eſſe naturam univerſis. Itaque ut luna gravitat in terram, & terra viciſſim in lunam; ſic etiam gravitabunt omnes ſecundarii in primarios ſuos, & primarii viciſſim

in

in ſecundarios; ſic & omnes primarii in ſolem, & ſol viciſſim in primarios.

Igitur ſol in planetas univerſos gravitat & univerſi in ſolem. Nam ſecundarii dum primarios ſuos comitantur, revolvuntur interea circum ſolem una cum primariis. Eodem itaque argumento, utriuſque generis planetæ gravitant in ſolem, & ſol in ipſos. Secundarios vero planetas in ſolem gravitare abunde inſuper conſtat ex inæqualitatibus lunaribus; quarum accuratiſſimam theoriam, admiranda ſagacitate patefactam, in tertio hujus operis libro expoſitam habemus.

Solis virtutem attractivam quoquoverſum propagari ad ingentes uſque diſtantias, & ſeſe diffundere ad ſingulas circumjecti ſpatii partes, apertiſſime colligi poteſt ex motu cometarum; qui ab immenſis intervallis profecti feruntur in viciniam ſolis, & nonnunquam adeo ad ipſum proxime accedunt ut globum ejus, in periheliis ſuis verſantes, tantum non contingere videantur. Horum theoriam ab aſtronomis antehac fruſtra quæſitam, noſtro tandem ſæculo feliciter inventam & per obſervationes certiſſime demonſtratam, præſtantiſſimo noſtro auctori debemus. Patet igitur cometas in ſectionibus conicis umbilicos in centro ſolis habentibus moveri, & radiis ad ſolem ductis areas temporibus proportionales deſcribere. Ex hiſce vero phænomenis manifeſtum eſt & mathematice comprobatur, vires illas, quibus cometæ retinentur in orbitis ſuis, reſpicere ſolem & eſſe reciproce ut quadrata diſtantiarum ab ipſius centro. Gravitant itaque cometæ in ſolem: atque adeo ſolis vis attractiva non tantum ad corpora planetarum in datis diſtantiis & in eodem fere plano collocata, ſed etiam ad cometas in diverſiſſimis cælorum regionibus & in diverſiſſimis diſtantiis poſitos pertingit. Hæc igitur eſt natura corporum gravitantium, ut vires ſuas edant ad omnes diſtantias in omnia corpora gravitantia. Inde vero ſequitur, planetas & cometas univerſos ſe mutuo trahere, & in ſe mutuo graves eſſe: quod etiam confirmatur ex perturbatione jovis & ſaturni, aſtronomis non incognita, & ab actionibus horum planetarum in ſe invicem oriunda; quin & ex motu illo lentiſſimo apſidum, qui ſupra memoratus eſt, quique a cauſa conſimili proficiſcitur.

Eo demum pervenimus ut dicendum ſit, & terram & ſolem & corpora omnia cæleſtia, quæ ſolem comitantur, ſe mutuo attrahere. Sin-

gulorum ergo particulæ quæque minimæ vires ſuas attractivas habebunt, pro quantitate materiæ pollentes; quemadmodum ſupra de terreſtribus oſtenſum eſt. In diverſis autem diſtantiis, erunt & harum vires in duplicata ratione diſtantiarum reciproce: nam ex particulis hac lege trahentibus componi debere globos eadem lege trahentes, mathematice demonſtratur.

Concluſiones præcedentes huic innituntur Axiomati, quod a nullis non recipitur philoſophis; effectuum ſcilicet ejuſdem generis, quorum nempe quæ cognoſcuntur proprietates eædem ſunt, eaſdem eſſe cauſas & eaſdem eſſe proprietates quæ nondum cognoſcuntur. Quis enim dubitat, ſi gravitas ſit cauſa deſcenſus lapidis in *Europa*, quin eadem ſit cauſa deſcenſus in *America*? Si gravitas mutua fuerit inter lapidem & terram in *Europa*; quis negabit mutuam eſſe in *America*? Si vis attractiva lapidis & terræ componatur, in *Europa*, ex viribus attractivis partium; quis negabit ſimilem eſſe compoſitionem in *America*? Si attractio terræ ad omnia corporum genera & ad omnes diſtantias propagetur in *Europa*; quidni pariter propagari dicamus in *America*? In hac regula fundatur omnis philoſophia: quippe qua ſublata nihil affirmare poſſimus de univerſis. Conſtitutio rerum ſingularum innoteſcit per obſervationes & experimenta: inde vero non niſi per hanc regulam de rerum univerſarum natura judicamus.

Jam cum gravia ſint omnia corpora, quæ apud terram vel in cælis reperiuntur, de quibus experimenta vel obſervationes inſtituere licet; omnino dicendum erit, gravitatem corporibus univerſis competere. Et quemadmodum nulla concipi debent corpora, quæ non ſint extenſa, mobilia & impenetrabilia; ita nulla concipi debere, quæ non ſint gravia. Corporum extenſio, mobilitas, & impenetrabilitas non niſi per experimenta innoteſcunt: eodem plane modo gravitas innoteſcit. Corpora omnia de quibus obſervationes habemus, extenſa ſunt & mobilia & impenetrabilia: & inde concludimus corpora univerſa, etiam illa de quibus obſervationes non habemus, extenſa eſſe & mobilia & impenetrabilia. Ita corpora omnia ſunt gravia, de quibus obſervationes habemus: & inde concludimus corpora univerſa, etiam illa de quibus obſervationes non habemus, gravia eſſe. Si quis dicat corpora ſtellarum inerrantium non eſſe gravia, quandoquidem eorum gravitas nondum eſt obſervata; eodem argumento dicere licebit

cebit neque extenſa eſſe, nec mobilia, nec impenetrabilia, cum hæ fixarum affectiones nondum ſint obſervatæ. Quid opus eſt verbis? inter primarias qualitates corporum univerſorum vel gravitas habebit locum; vel extenſio, mobilitas, & impenetrabilitas non habebunt. Et natura rerum vel recte explicabitur per corporum gravitatem, vel non recte explicabitur per corporum extenſionem, mobilitatem, & impenetrabilitatem.

Audio nonnullos hanc improbare concluſionem, & de occultis qualitatibus neſcio quid muſſitare. Gravitatem ſcilicet occultum eſſe quid, perpetuo argutari ſolent; occultas vero cauſas procul eſſe ablegandas a philoſophia. His autem facile reſpondetur; occultas eſſe cauſas, non illas quidem quarum exiſtentia per obſervationes clariſſime demonſtratur, ſed has ſolum quarum occulta eſt & ficta exiſtentia nondum vero comprobata. Gravitas ergo non erit occulta cauſa motuum cæleſtium; ſiquidem ex phænomenis oſtenſum eſt, hanc virtutem revera exiſtere. Hi potius ad occultas confugiunt cauſas; qui neſcio quos vortices, materiæ cujuſdam prorſus fictitiæ & ſenſibus omnino ignotæ, motibus iiſdem regendis præficiunt.

Ideone autem gravitas occulta cauſa dicetur, eoque nomine rejicietur e philoſophia, quod cauſa ipſius gravitatis occulta eſt & nondum inventa? Qui ſic ſtatuunt, videant nequid ſtatuant abſurdi, unde totius tandem philoſophiæ fundamenta convellantur. Etenim cauſæ continuo nexu procedere ſolent a compoſitis ad ſimpliciora: ubi ad cauſam ſimpliciſſimam perveneris, jam non licebit ulterius progredi. Cauſæ igitur ſimpliciſſimæ nulla dari poteſt mechanica explicatio: ſi daretur enim, cauſa nondum eſſet ſimpliciſſima. Has tu proinde cauſas ſimpliciſſimas appellabis occultas, & exulare jubebis? Simul vero exulabunt & ab his proxime pendentes & quæ ab illis porro pendent, uſque dum a cauſis omnibus vacua fuerit & probe purgata philoſophia.

Sunt qui gravitatem præter naturam eſſe dicunt, & miraculum perpetuum vocant. Itaque rejiciendam eſſe volunt, cum in phyſica præternaturales cauſæ locum non habeant. Huic ineptæ prorſus objectioni diluendæ, quæ & ipſa philoſophiam ſubruit univerſam, vix operæ pretium eſt immorari. Vel enim gravitatem corporibus omnibus inditam eſſe negabunt, quod tamen dici non poteſt: vel eo nomine

nomine præter naturam eſſe affirmabunt, quod ex aliis corporum affectionibus atque adeo ex cauſis mechanicis originem non habeat. Dantur certe primariæ corporum affectiones; quæ, quoniam ſunt primariæ, non pendent ab aliis. Viderint igitur annon & hæ omnes ſint pariter præter naturam, eoque pariter rejiciendæ: viderint vero qualis ſit deinde futura philoſophia.

Nonnulli ſunt quibus hæc tota phyſica cæleſtis vel ideo minus placet, quod cum *Carteſii* dogmatibus pugnare & vix conciliari poſſe videatur. His ſua licebit opinione frui; ex æquo autem agant oportet: non ergo denegabunt aliis eandem libertatem quam ſibi concedi poſtulant. NEWTONIANAM itaque philoſophiam, quæ nobis verior habetur, retinere & amplecti licebit, & cauſas ſequi per phænomena comprobatas, potius quam fictas & nondum comprobatas. Ad veram philoſophiam pertinet, rerum naturas ex cauſis vere exiſtentibus derivare: eas vero leges quærere, quibus voluit ſummus opifex hunc mundi pulcherrimum ordinem ſtabilire; non eas quibus potuit, ſi ita viſum fuiſſet. Rationi enim conſonum eſt, ut a pluribus cauſis, ab invicem nonnihil diverſis, idem poſſit effectus proficiſci: hæc autem vera erit cauſa, ex qua vere atque actu proficiſcitur; reliquæ locum non habent in philoſophia vera. In horologiis automatis idem indicis horarii motus vel ab appenſo pondere vel ab intus concluſo elatere oriri poteſt. Quod ſi oblatum horologium revera ſit inſtructum pondere; ridebitur qui finget elaterem, & ex hypotheſi ſic præpropere conficta motum indicis explicare ſuſcipiet: oportuit enim internam machinæ fabricam penitius perſcrutari, ut ita motus propoſiti principium verum exploratum habere poſſet. Idem vel non abſimile feretur judicium de philoſophis illis, qui materia quadam ſubtiliſſima cælos eſſe repletos, hanc autem in vortices indeſinenter agi voluerunt. Nam ſi phænomenis vel accuratiſſime ſatisfacere poſſent ex hypotheſibus ſuis; veram tamen philoſophiam tradidiſſe, & veras cauſas motuum cæleſtium inveniſſe nondum dicendi ſunt; niſi vel has revera exiſtere, vel ſaltem alias non exiſtere demonſtraverint. Igitur ſi oſtenſum fuerit, univerſorum corporum attractionem habere verum locum in rerum natura; quinetiam oſtenſum fuerit, qua ratione motus omnes cæleſtes abinde ſolutionem recipiant; vana fuerit & merito deridenda objectio,

objectio, ſi quis dixerit eoſdem motus per vortices explicari debere, etiamſi id fieri poſſe vel maxime conceſſerimus. Non autem concedimus: nequeunt enim ullo pacto phænomena per vortices explicari; quod ab auctore noſtro abunde quidem & clariſſimis rationibus evincitur; ut ſomnis plus æquo indulgeant oporteat, qui ineptiſſimo figmento reſarciendo, noviſque porro commentis ornando infelicem operam addicunt.

Si corpora planetarum & cometarum circa ſolem deferantur a vorticibus; oportet corpora delata & vorticum partes proxime ambientes eadem velocitate eademque curſus determinatione moveri, & eandem habere denſitatem vel eandem vim inertiæ pro mole materiæ. Conſtat vero planetas & cometas, dum verſantur in iiſdem regionibus cælorum, velocitatibus variis variaque curſus determinatione moveri. Neceſſario itaque ſequitur, ut fluidi cæleſtis partes illæ, quæ ſunt ad eaſdem diſtantias a ſole, revolvantur eodem tempore in plagas diverſas cum diverſis velocitatibus: etenim alia opus erit directione & velocitate, ut tranſire poſſint planetæ; alia, ut tranſire poſſint cometæ. Quod cum explicari nequeat; vel fatendum erit, univerſa corpora cæleſtia non deferri a materia vorticis; vel dicendum erit, eorundem motus repetendos eſſe non ab uno eodemque vortice, ſed a pluribus qui ab invicem diverſi ſint, idemque ſpatium ſoli circumjectum pervadant.

Si plures vortices in eodem ſpatio contineri, & ſeſe mutuo penetrare motibuſque diverſis revolvi ponantur; quoniam hi motus debent eſſe conformes delatorum corporum motibus, qui ſunt ſumme regulares, & peraguntur in ſectionibus conicis nunc valde eccentricis, nunc ad circulorum proxime formam accedentibus; jure quærendum erit, qui fieri poſſit, ut iidem integri conſerventur nec ab actionibus materiæ occurſantis per tot ſæcula quicquam perturbentur. Sane ſi motus hi fictitii ſunt magis compoſiti & difficilius explicantur, quam veri illi motus planetarum & cometarum; fruſtra mihi videntur in philoſophiam recipi: omnis enim cauſa debet eſſe effectu ſuo ſimplicior. Conceſſa fabularum licentia, affirmaverit aliquis planetas omnes & cometas circumcingi atmoſphæris, adinſtar telluris noſtræ; quæ quidem hypotheſis rationi magis conſentanea videbitur quam hypotheſis vorticum. Affirmaverit deinde has atmoſphæ-

moſphæras, ex natura ſua, circa ſolem moveri & ſectiones conicas deſcribere; qui ſane motus multo facilius concipi poteſt, quam conſimilis motus vorticum ſe invicem permeantium. Denique planetas ipſos & cometas circa ſolem deferri ab atmoſphæris ſuis credendum eſſe ſtatuat, & ob repertas motuum cæleſtium cauſas triumphum agat. Quiſquis autem hanc fabulam rejiciendam eſſe putet, idem & alteram fabulam rejiciet: nam ovum non eſt ovo ſimilius, quam hypotheſis atmoſphærarum hypotheſi vorticum.

Docuit *Galilæus*, lapidis projecti & in parabola moti deflexionem a curſu rectilineo oriri a gravitate lapidis in terram, ab occulta ſcilicet qualitate. Fieri tamen poteſt ut alius aliquis, naſi acutioris, philoſophus cauſam aliam comminiſcatur. Finget igitur ille materiam quandam ſubtilem, quæ nec viſu, nec tactu, neque ullo ſenſu percipitur, verſari in regionibus quæ proxime contingunt telluris ſuperficiem. Hanc autem materiam, in diverſas plagas, variis & plerumque contrariis motibus ferri, & lineas parabolicas deſcribere contendet. Deinde vero lapidis deflexionem pulchre ſic expediet, & vulgi plauſum merebitur. Lapis, inquiet, in fluido illo ſubtili natat & curſui ejus obſequendo, non poteſt non eandem una ſemitam deſcribere. Fluidum vero movetur in lineis parabolicis; ergo lapidem in parabola moveri neceſſe eſt. Quis nunc non mirabitur acutiſſimum hujuſce philoſophi ingenium, ex cauſis mechanicis, materia ſcilicet & motu, phænomena naturæ ad vulgi etiam captum præclare deducentis? Quis vero non ſubſannabit bonum illum *Galilæum*, qui magno molimine mathematico qualitates occultas, e philoſophia feliciter excluſas, denuo revocare ſuſtinuerit? Sed pudet nugis diutius immorari.

Summa rei huc tandem redit: cometarum ingens eſt numerus; motus eorum ſunt ſumme regulares, & eaſdem leges cum planetarum motibus obſervant. Moventur in orbibus conicis, hi orbes ſunt valde admodum eccentrici. Feruntur undique in omnes cælorum partes, & planetarum regiones liberrime pertranſeunt, & ſæpe contra ſignorum ordinem incedunt. Hæc phænomena certiſſime confirmantur ex obſervationibus aſtronomicis: & per vortices nequeunt explicari. Imo, ne quidem cum vorticibus planetarum conſiſtere poſſunt. Cometarum

metarum motibus omnino locus non erit; niſi materia illa fictitia penitus e cælis amoveatur.

Si enim planetæ circum ſolem a vorticibus devehuntur; vorticum partes, quæ proxime ambiunt unumquemque planetam, ejuſdem denſitatis erunt ac planeta; uti ſupra dictum eſt. Itaque materia illa omnis quæ contigua eſt orbis magni perimetro, parem habebit ac tellus denſitatem: quæ vero jacet intra orbem magnum atque orbem ſaturni, vel parem vel majorem habebit. Nam ut conſtitutio vorticis permanere poſſit, debent partes minus denſæ centrum occupare, magis denſæ longius a centro abire. Cum enim planetarum tempora periodica ſint in ratione ſeſquiplicata diſtantiarum a ſole, oportet partium vorticis periodos eandem rationem ſervare. Inde vero ſequitur, vires centrifugas harum partium fore reciproce ut quadrata diſtantiarum. Quæ igitur majore intervallo diſtant a centro, nituntur ab eodem recedere minore vi: unde ſi minus denſæ fuerint, neceſſe eſt ut cedant vi majori, qua partes centro propiores aſcendere conantur. Aſcendent ergo denſiores, deſcendent minus denſæ, & locorum fiet invicem permutatio; donec ita fuerit diſpoſita atque ordinata materia fluida totius vorticis, ut conquieſcere jam poſſit in æquilibrio conſtituta. Si bina fluida, quorum diverſa eſt denſitas, in eodem vaſe continentur; utique futurum eſt ut fluidum, cujus major eſt denſitas, majore vi gravitatis infimum petat locum: & ratione non abſimili omnino dicendum eſt, denſiores vorticis partes majore vi centrifuga petere ſupremum locum. Tota igitur illa & multo maxima pars vorticis, quæ jacet extra telluris orbem, denſitatem habebit atque adeo vim inertiæ pro mole materiæ, quæ non minor erit quam denſitas & vis inertiæ telluris: inde vero cometis trajectis orietur ingens reſiſtentia, & valde admodum ſenſibilis; ne dicam, quæ motum eorundem penitus ſiſtere atque abſorbere poſſe merito videatur. Conſtat autem ex motu cometarum prorſus regulari, nullam ipſos reſiſtentiam pati quæ vel minimum ſentiri poteſt; atque adeo neutiquam in materiam ullam incurſare, cujus aliqua ſit vis reſiſtendi, vel proinde cujus aliqua ſit denſitas ſeu vis inertiæ. Nam reſiſtentia mediorum oritur vel ab inertia materiæ fluidæ, vel a defectu lubricitatis. Quæ oritur a defectu lubricitatis, admodum exigua eſt; & ſane vix obſervari poteſt in fluidis vulgo notis, niſi valde

 tenacia

tenacia fuerint adinſtar olei & mellis. Reſiſtentia quæ ſentitur in aëre, aqua, hydrargyro, & hujuſmodi fluidis non tenacibus fere tota eſt prioris generis; & minui non poteſt per ulteriorem quemcunque gradum ſubtilitatis, manente fluidi denſitate vel vi inertiæ, cui ſemper proportionalis eſt hæc reſiſtentia; quemadmodum clariſſime demonſtratum eſt ab auctore noſtro in peregregia reſiſtentiarum theoria, quæ paulo nunc accuratius exponitur, hac ſecunda vice, & per experimenta corporum cadentium plenius confirmatur.

Corpora progrediendo motum ſuum fluido ambienti paulatim communicant, & communicando amittunt, amittendo autem retardantur. Eſt itaque retardatio motui communicato proportionalis; motus vero communicatus, ubi datur corporis progredientis velocitas, eſt ut fluidi denſitas; ergo retardatio ſeu reſiſtentia erit ut eadem fluidi denſitas; neque ullo pacto tolli poteſt, niſi a fluido ad partes corporis poſticas recurrente reſtituatur motus amiſſus. Hoc autem dici non poterit, niſi impreſſio fluidi in corpus ad partes poſticas æqualis fuerit impreſſioni corporis in fluidum ad partes anticas, hoc eſt, niſi velocitas relativa qua fluidum irruit in corpus a tergo, æqualis fuerit velocitati qua corpus irruit in fluidum, id eſt, niſi velocitas abſoluta fluidi recurrentis duplo major fuerit quam velocitas abſoluta fluidi propulſi; quod fieri nequit. Nullo igitur modo tolli poteſt fluidorum reſiſtentia, quæ oritur ab eorundem denſitate & vi inertiæ. Itaque concludendum erit; fluidi cæleſtis nullam eſſe vim inertiæ, cum nulla ſit vis reſiſtendi: nullam eſſe vim qua motus communicetur, cum nulla ſit vis inertiæ: nullam eſſe vim qua mutatio quælibet vel corporibus ſingulis vel pluribus inducatur, cum nulla ſit vis qua motus communicetur; nullam eſſe omnino efficaciam, cum nulla ſit facultas mutationem quamlibet inducendi. Quidni ergo hanc hypotheſin, quæ fundamento plane deſtituitur, quæque naturæ rerum explicandæ ne minimum quidem inſervit, ineptiſſimam vocare liceat & philoſopho prorſus indignam. Qui cælos materia fluida repletos eſſe volunt, hanc vero non inertem eſſe ſtatuunt; hi verbis tollunt vacuum, re ponunt. Nam cum hujuſmodi materia fluida ratione nulla ſecerni poſſit ab inani ſpatio; diſputatio tota fit de rerum nominibus, non de naturis. Quod ſi aliqui ſint adeo uſque dediti materiæ, ut ſpatium a corporibus vacuum nullo pacto admit-

admittendum credere velint; videamus quo tandem oporteat illo pervenire.

Vel enim dicent hanc, quam confingunt, mundi per omnia pleni conſtitutionem ex voluntate dei profectam eſſe, propter eum finem, ut operationibus naturæ ſubſidium præſens haberi poſſet ab æthere ſubtiliſſimo cuncta permeante & implente; quod tamen dici non poteſt, ſiquidem jam oſtenſum eſt ex cometarum phænomenis, nullam eſſe hujus ætheris efficaciam: vel dicent ex voluntate dei profectam eſſe, propter finem aliquem ignotum; quod neque dici debet, ſiquidem diverſa mundi conſtitutio eodem argumento pariter ſtabiliri poſſet: vel denique non dicent ex voluntate dei profectam eſſe, ſed ex neceſſitate quadam naturæ. Tandem igitur delabi oportet in fæces ſordidas gregis impuriſſimi. Hi ſunt qui ſomniant fato univerſa regi, non providentia; materiam ex neceſſitate ſua ſemper & ubique extitiſſe, infinitam eſſe & æternam. Quibus poſitis, erit etiam undiquaque uniformis: nam varietas formarum cum neceſſitate omnino pugnat. Erit etiam immota: nam ſi neceſſario moveatur in plagam aliquam determinatam, cum determinata aliqua velocitate; pari neceſſitate movebitur in plagam diverſam cum diverſa velocitate; in plagas autem diverſas, cum diverſis velocitatibus, moveri non poteſt; oportet igitur immotam eſſe. Neutiquam profecto potuit oriri mundus, pulcherrima formarum & motuum varietate diſtinctus, niſi ex liberrima voluntate cuncta providentis & gubernantis dei.

Ex hoc igitur fonte promanarunt illæ omnes quæ dicuntur naturæ leges: in quibus multa ſane ſapientiſſimi conſilii, nulla neceſſitatis apparent veſtigia. Has proinde non ab incertis conjecturis petere, ſed obſervando atque experiendo addiſcere debemus. Qui vere phyſicæ principia legeſque rerum, ſola mentis vi & interno rationis lumine fretum, invenire ſe poſſe confidit; hunc oportet vel ſtatuere mundum ex neceſſitate fuiſſe, legeſque propoſitas ex eadem neceſſitate ſequi; vel ſi per voluntatem dei conſtitutus ſit ordo naturæ, ſe tamen, homuncionem miſellum, quid optimum factu ſit perſpectum habere. Sana omnis & vera philoſophia fundatur in phænomenis rerum: quæ ſi nos vel invitos & reluctantes ad hujuſmodi principia deducunt, in quibus clariſſime cernuntur conſilium optimum & dominium ſummum ſapientiſſimi & potentiſſimi entis; non erunt hæc ideo non admittenda principia, quod quibuſdam forſan hominibus minus grata ſint futura.

tura. His vel miracula vel qualitates occultæ dicantur, quæ diſplicent: verum nomina malitioſe indita non ſunt ipſis rebus vitio vertenda; niſi illud fateri tandem velint, utique debere philoſophiam in atheiſmo fundari. Horum hominum gratia non erit labefactanda philoſophia, ſiquidem rerum ordo non vult immutari.

Obtinebit igitur apud probos & æquos judices præſtantiſſima philoſophandi ratio, quæ fundatur in experimentis & obſervationibus. Huic vero, dici vix poterit, quanta lux accedat, quanta dignitas, ab hoc opere præclaro illuſtriſſimi noſtri auctoris; cujus eximiam ingenii felicitatem, difficillima quæque problemata enodantis, & ad ea porro pertingentis ad quæ nec ſpes erat humanam mentem aſſurgere potuiſſe, merito admirantur & ſuſpiciunt quicunque paulo profundius in hiſce rebus verſati ſunt. Clauſtris ergo reſeratis, aditum nobis aperuit ad pulcherrima rerum myſteria. Syſtematis mundani compagem elegantiſſimam ita tandem patefecit & penitius perſpectandam dedit; ut nec ipſe, ſi nunc reviviſceret, rex *Alphonſus* vel ſimplicitatem vel harmoniæ gratiam in ea deſideraret. Itaque naturæ majeſtatem propius jam licet intueri, & dulciſſima contemplatione frui, conditorem vero ac dominum univerſorum impenſius colere & venerari, qui fructus eſt philoſophiæ multo uberrimus. Cæcum eſſe oportet, qui ex optimis & ſapientiſſimis rerum ſtructuris non ſtatim videat fabricatoris omnipotentis infinitam ſapientiam & bonitatem: inſanum, qui profiteri nolit.

Extabit igitur eximium Newtoni opus adverſus atheorum impetus munitiſſimum præſidium: neque enim alicunde felicius, quam ex hac pharetra, contra impiam catervam tela depromſeris. Hoc ſenſit pridem, & in pereruditis concionibus anglice latineque editis, primus egregie demonſtravit vir in omni literarum genere præclarus idemque bonarum artium fautor eximius Richardus Bentleius, ſeculi ſui & academiæ noſtræ magnum ornamentum, collegii noſtri *S. Trinitatis* magiſter digniſſimus & integerrimus. Huic ego me pluribus nominibus obſtrictum fateri debeo: huic & tuas quæ debentur gratias, lector benevole, non denegabis. Is enim, cum a longo tempore celeberrimi auctoris amicitia intima frueretur, (qua etiam apud poſteros cenſeri non minoris æſtimat, quam propriis ſcriptis quæ literato orbi in deliciis ſunt inclareſcere) amici ſimul famæ & ſcien-

tiarum incremento conſuluit. Itaque cum exemplaria prioris editionis rariſſima admodum & immani pretio coëmenda ſupereſſent; ſuaſit ille crebris efflagitationibus, & tantum non objurgando perpulit denique virum præſtantiſſimum, nec modeſtia minus quam eruditione ſumma inſignem, ut novam hanc operis editionem, per omnia elimatam denuo & egregiis inſuper acceſſionibus ditatam, ſuis ſumptibus & auſpiciis prodire pateretur: mihi vero, pro jure ſuo, penſum non ingratum demandavit, ut quam poſſet emendate id fieri curarem.

Cantabrigiæ,
Maii 12. 1713.

ROGERUS COTES collegii *S. Trinitatis* ſocius, aſtronomiæ & philoſophiæ experimentalis profeſſor *Plumianus.*

AUCTORIS

AUCTORIS PRÆFATIO IN EDITIONEM TERTIAM.

IN *editione hacce tertia, quam* Henricus Pemberton M. D. *vir harum rerum peritiſſimus curavit, nonnulla in libro ſecundo de reſiſtentia mediorum paulo fuſius explicantur quam antea, & adduntur experimenta nova de reſiſtentia gravium quæ cadunt in aëre. In libro tertio argumentum quo lunam in orbe ſuo per gravitatem retineri probatur, paulo fuſius exponitur: & novæ adduntur obſervationes de proportione diametrorum Jovis ad invicem a D.* Poundio *factæ. Adduntur etiam obſervationes aliquot cometæ illius qui anno* 1680 *apparuit, a D.* Kirk *menſe Novembri in* Germania *habitæ, quæ nuper ad manus noſtras venerunt, & quarum ope conſtet quam prope orbes parabolici motibus cometarum reſpondent. Et orbita cometæ illius, computante* Halleio, *paulo accuratius determinatur quam antea, idque in ellipſi. Et oſtenditur cometam in hac orbita elliptica, per novem cælorum ſigna, non minus accurate curſum peregiſſe, quam ſolent planetæ in orbitis ellipticis per aſtronomiam definitis moveri. Orbis etiam cometæ qui anno* 1723 *apparuit, a D.* Bradleio *aſtronomiæ apud* Oxonienſes *profeſſore computatus adjicitur.*

IS. NEWTON

Dabam *Londini*
Jan. 12. 1725-6.

INDEX CAPITUM
TOTIUS OPERIS.

PAG.

DEFINITIONES. 1

AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS. 13

DE MOTU CORPORUM LIBER PRIMUS.

SECT. I. *DE methodo rationum primarum & ultimarum.* 28

SECT. II. *De inventione virium centripetarum.* 38

SECT. III. *De motu corporum in conicis ſectionibus eccentricis.* 54

SECT. IV. *De inventione orbium ellipticorum, parabolicorum & hyperbolicorum ex umbilico dato.* 65

SECT. V. *De inventione orbium ubi umbilicus neuter datur.* 73

SECT. VI. *De inventione motuum in orbibus datis.* 104

SECT. VII. *De corporum aſcenſu & deſcenſu rectilineo.* 112

SECT. VIII. *De inventione orbium in quibus corpora viribus quibuſcunque centripetis agitata revolvuntur.* 123

SECT. IX. *De motu corporum in orbibus mobilibus, deque motu apſidum.* 129

SECT. X. *De motu corporum in ſuperficiebus datis, deque funependulorum motu reciproco.* 142

SECT. XI. *De motu corporum viribus centripetis ſe mutuo petentium.* 160

SECT. XII. *De corporum ſphæricorum viribus attractivis.* 189

SECT. XIII. *De corporum non ſphæricorum viribus attractivis.* 210

SECT. XIV. *De motu corporum minimorum, quæ viribus centripetis ad ſingulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.* 222

DE

DE MOTU CORPORUM LIBER SECUNDUS.

SECT. I. *De motu corporum quibus reſiſtitur in ratione velocitatis.* 230

SECT. II. *De motu corporum quibus reſiſtitur in duplicata ratione velocitatis.* 239

SECT. III. *De motu corporum quibus reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicata.* 265

SECT. IV. *De corporum circulari motu in mediis reſiſtentibus.* 274

SECT. V. *De denſitate & compreſſione fluidorum, deque hydroſtatica.* 282

SECT. VI. *De motu & reſiſtentia corporum funependulorum.* 294

SECT. VII. *De motu fluidorum & reſiſtentia projectilium.* 318

SECT. VIII. *De motu per fluida propagato.* 357

SECT. IX. *De motu circulari fluidorum.* 374

DE MUNDI SYSTEMATE LIBER TERTIUS

REGULÆ PHILOSOPHANDI 387

PHÆNOMENA 390

PROPOSITIONES 395

SCHOLIUM GENERALE. 526

CORRIGENDA.

IN carmine Halleii *verſ.* 9. *leg.* Sidereos.

PAG. 115. *l.* 21. *leg.* xxxiv. *P.* 124. *l. antepenult. leg.* $\sqrt{P^n - A^n}$. *P.* 144. *l.* 5. *a fine leg.* deſcendendo currant. *P.* 145. *l.* 15, 16. *leg.* eundum. *P.* 151. *l.* 16. *leg.* ſingulis. *P.* 181. *l.* 9. *leg.* LM. *P.* 246. *l.* 3. *pone comma poſt* —2*A.* P. 259. l. 9. *dele inferius comma* P. 268. l. 7. *dele* in *P. P.* 283. *l.* 8. *leg Gaſ. P.* 291. *l* 3. *leg.* in progreſſione. P. 302. *l.* 11. *leg. Ca. P.* 371. *l.* 10. *leg.* ad *PO×A. P.* 391. *l.* 11. *leg.* perfectioribus. *P.* 416 l 2. *poſt* 9 *pone punctum.* P. 427. l. 8. *leg.* luminarium. *Ibid. l.* 11. *leg.* ſit. *P.* 446. *l.* 18. *leg.* 3[iv]. P. 448. l. 13, 17. *leg.* 9. 0827646. *P.* 469. *l.* 13. *leg.* ſemidiametris. *P.* 487. *l.* 7. *leg.* diviſas. *P.* 488. *in figura ſecunda jungantur* S, B *recta. P.* 498. *l.* 5. *leg.* $\frac{1}{5\frac{1}{4}}$ *ſine commate. Ibid.* l. 7. *a fine leg.* $\frac{1}{16}$ *BF. P.* 500. *l.* 25. *leg.* 84021. *P.* 502. *in columna prima tabulæ leg.* d. h. ♈ *P.* 503. *l.* 23, 28. *leg.* ♍. *P.* 510. *l.* 6. *leg.* comatas. *P.* 520. *l. penult. in columna loc. obſerv. leg.* ♉. *P.* 523. *in ſecunda columna tabulæ ſuperioris l.* 4. *leg.* 2. 53. 12. *in quarta columna l.* 19. *leg.* 5. 16. 53. *in ſexta columna l.* 19. *leg.* 5. 16. 50.

PHILO-

Philoſophiæ Naturalis
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I.

Quantitas materiæ eſt menſura ejuſdem orta ex illius denſitate et magnitudine conjunctim.

AER denſitate duplicata, in ſpatio etiam duplicato, fit quadruplus; in triplicato ſextuplus. Idem intellige de nive & pulveribus per compreſſionem vel liquefactionem condenſatis. Et par eſt ratio corporum omnium, quæ per cauſas quaſcunque diverſimode condenſantur. Medii interea, ſi quod fuerit, interſtitia partium libere pervadentis, hic nullam rationem habeo. Hanc autem quantitatem ſub nomine corporis vel maſſæ in ſequentibus paſſim intelligo. Innoteſcit ea per corporis cujuſque pondus: Nam ponderi proportionalem eſſe reperi per experimenta pendulorum accuratiſſime inſtituta, uti poſthac docebitur.

DEFINITIO II.

Quantitas motus eſt menſura ejuſdem orta ex velocitate et quantitate materiæ conjunctim.

Motus totius eſt ſumma motuum in partibus ſingulis; ideoque in corpore duplo majore, æquali cum velocitate, duplus eſt, & dupla cum velocitate quadruplus.

DEFINITIONES.

DEFINITIO III.

Materiæ vis inſita eſt potentia reſiſtendi, qua corpus unumquodque, quantum in ſe eſt, perſeverat in ſtatu ſuo vel quieſcendi vel movendi uniformiter in directum.

Hæc ſemper proportionalis eſt ſuo corpori, neque differt quicquam ab inertia maſſæ, niſi in modo concipiendi. Per inertiam materiæ fit, ut corpus omne de ſtatu ſuo vel quieſcendi vel movendi difficulter deturbetur. Unde etiam vis inſita nomine ſignificantiſſimo vis inertiæ dici poſſit. Exercet vero corpus hanc vim ſolummodo in mutatione ſtatus ſui per vim aliam in ſe impreſſam facta; eſtque exercitium illud ſub diverſo reſpectu & reſiſtentia & impetus: Reſiſtentia, quatenus corpus ad conſervandum ſtatum ſuum reluctatur vi impreſſæ; impetus, quatenus corpus idem, vi reſiſtentis obſtaculi difficulter cedendo, conatur ſtatum obſtaculi illius mutare. Vulgus reſiſtentiam quieſcentibus & impetum moventibus tribuit: ſed motus & quies, uti vulgo concipiuntur, reſpectu ſolo diſtinguuntur ab invicem; neque ſemper vere quieſcunt, quæ vulgo tanquam quieſcentia ſpectantur.

DEFINITIO IV.

Vis impreſſa eſt actio in corpus exercita, ad mutandum ejus ſtatum vel quieſcendi vel movendi uniformiter in directum.

Conſiſtit hæc vis in actione ſola, neque poſt actionem permanet in corpore. Perſeverat enim corpus in ſtatu omni novo per ſolam vim inertiæ. Eſt autem vis impreſſa diverſarum originum, ut ex ictu, ex preſſione, ex vi centripeta.

Vis

DEFINITIO V.

Vis centripeta eſt, qua corpora verſus punctum aliquod, tanquam ad centrum, undique trahuntur, impelluntur, vel utcunque tendunt.

Hujus generis eſt gravitas, qua corpora tendunt ad centrum terræ; vis magnetica, qua ferrum petit magnetem; & vis illa, quæcunque ſit, qua planetæ perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, & in lineis curvis revolvi coguntur. Lapis, in funda circumactus, a circumagente manu abire conatur; & conatu ſuo fundam diſtendit, eoque fortius quo celerius revolvitur; &, quamprimum dimittitur, avolat. Vim conatui illi contrariam, qua funda lapidem in manum perpetuo retrahit & in orbe retinet, quoniam in manum ceu orbis centrum dirigitur, centripetam appello. Et par eſt ratio corporum omnium, quæ in gyrum aguntur. Conantur ea omnia a centris orbium recedere; & niſi adſit vis aliqua conatui iſti contraria, qua cohibeantur & in orbibus retineantur, quamque ideo centripetam appello, abibunt in rectis lineis uniformi cum motu. Projectile, ſi vi gravitatis deſtitueretur, non deflecteretur in terram, ſed in linea recta abiret in cœlos; idque uniformi cum motu, ſi modo aëris reſiſtentia tolleretur. Per gravitatem ſuam retrahitur a curſu rectilineo & in terram perpetuo flectitur, idque magis vel minus pro gravitate ſua & velocitate motus. Quo minor fuerit ejus gravitas pro quantitate materiæ, vel major velocitas quacum projicitur, eo minus deviabit a curſu rectilineo & longius perget. Si globus plumbeus, data cum velocitate ſecundum lineam horizontalem a montis alicujus vertice vi pulveris tormentarii projectus, pergeret in linea curva ad diſtantiam duorum milliarium, priuſquam in terram decideret: hic dupla cum velocitate quaſi duplo longius pergeret, & decupla cum velocitate quaſi decuplo longius: ſi modo aëris reſiſtentia tolleretur. Et augendo velocitatem augeri poſſet pro lubitu diſtantia in quam projiceretur, & minui curvatura lineæ quam deſcriberet, ita ut tandem caderet ad diſtantiam graduum decem vel triginta vel nonaginta; vel etiam ut terram totam circuiret vel denique

DEFINITIONES. nique ut in cœlos abiret, & motu abeundi pergeret in infinitum. Et eadem ratione, qua projectile vi gravitatis in orbem flecti poſſet & terram totam circuire, poteſt & luna vel vi gravitatis, ſi modo gravis ſit, vel alia quacunque vi, qua in terram urgeatur, retrahi ſemper a curſu rectilineo terram verſus, & in orbem ſuum flecti: & ſine tali vi luna in orbe ſuo retineri non poteſt. Hæc vis, ſi juſto minor eſſet, non ſatis flecteret lunam de curſu rectilineo: ſi juſto major, plus ſatis flecteret, ac de orbe terram verſus deduceret. Requiritur quippe, ut ſit juſtæ magnitudinis: & Mathematicorum eſt invenire vim, qua corpus in dato quovis orbe data cum velocitate accurate retineri poſſit; & viciſſim invenire viam curvilineam, in quam corpus e dato quovis loco data cum velocitate egreſſum a data vi flectatur. Eſt autem vis hujus centripetæ quantitas trium generum, abſoluta, acceleratrix, & motrix.

DEFINITIO VI.

Vis centripetæ quantitas abſoluta eſt menſura ejuſdem major vel minor pro efficacia cauſæ eam propagantis a centro per regiones in circuitu.

Ut vis magnetica pro mole magnetis vel intenſione virtutis major in uno magnete, minor in alio.

DEFINITIO VII.

Vis centripetæ quantitas acceleratrix eſt ipſius menſura velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.

Uti virtus magnetis ejuſdem major in minori diſtantia, minor in majori: vel vis gravitans major in vallibus, minor in cacuminibus altorum montium, atque adhuc minor (ut poſthac patebit) in majoribus diſtantiis a globo terræ; in æqualibus autem diſtantiis eadem undique, propterea quod corpora omnia cadentia (gravia an levia, magna an parva) ſublata aëris reſiſtentia, æqualiter accelerat.

DEFINITIO VIII.

Vis centripetæ quantitas motrix eſt ipſius menſura proportionalis motui, quem dato tempore generat.

Uti pondus majus in majore corpore, minus in minore; & in corpore eodem majus prope terram, minus in cœlis. Hæc quantitas eſt corporis totius centripetentia ſeu propenſio in centrum, & (ut ita dicam) pondus; & innoteſcit ſemper per vim ipſi contrariam & æqualem, qua deſcenſus corporis impediri poteſt.

Haſce virium quantitates brevitatis gratia nominare licet vires motrices, acceleratrices, & abſolutas; & diſtinctionis gratia referre ad corpora centrum petentia, ad corporum loca, & ad centrum virium: nimirum vim motricem ad corpus, tanquam conatum totius in centrum ex conatibus omnium partium compoſitum; & vim acceleratricem ad locum corporis, tanquam efficaciam quandam, de centro per loca ſingula in circuitu diffuſam, ad movenda corpora quæ in ipſis ſunt; vim autem abſolutam ad centrum, tanquam cauſa aliqua præditum, ſine qua vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; ſive cauſa illa ſit corpus aliquod centrale (quale eſt magnes in centro vis magneticæ, vel terra in centro vis gravitantis), ſive alia aliqua quæ non apparet. Mathematicus duntaxat eſt hic conceptus: Nam virium cauſas & ſedes phyſicas jam non expendo.

Eſt igitur vis acceleratrix ad vim motricem ut celeritas ad motum. Oritur enim quantitas motus ex celeritate & ex quantitate materiæ, & vis motrix ex vi acceleratrice & ex quantitate ejuſdem materiæ conjunctim. Nam ſumma actionum vis acceleratricis in ſingulas corporis particulas eſt vis motrix totius. Unde juxta ſuperficiem terræ, ubi gravitas acceleratrix ſeu vis gravitans in corporibus univerſis eadem eſt, gravitas motrix ſeu pondus eſt ut corpus: at ſi in regiones aſcendatur ubi gravitas acceleratrix ſit minor, pondus pariter minuetur, eritque ſemper ut corpus & gravitas acceleratrix conjunctim. Sic in regionibus ubi gravitas acceleratrix duplo minor eſt, pondus corporis duplo vel triplo minoris erit quadruplo vel ſextuplo minus.

Porro

DEFINITIONES.

Porro attractiones & impulſus eodem ſenſu acceleratrices & motrices nomino. Voces autem attractionis, impulſus, vel propenſionis cujuſcunque in centrum, indifferenter & pro ſe mutuo promiſcue uſurpo; has vires non phyſice ſed mathematice tantum conſiderando. Unde caveat lector, ne per hujuſmodi voces cogitet me ſpeciem vel modum actionis cauſamve aut rationem phyſicam alicubi definire, vel centris (quæ ſunt puncta mathematica) vires vere & phyſice tribuere; ſi forte aut centra trahere, aut vires centrorum eſſe dixero.

Scholium.

Hactenus voces minus notas, quo ſenſu in ſequentibus accipiendæ ſint, explicare viſum eſt. Tempus, ſpatium, locus & motus, ſunt omnibus notiſſima. Notandum tamen, quod vulgus quantitates haſce non aliter quam ex relatione ad ſenſibilia concipiat. Et inde oriuntur præjudicia quædam, quibus tollendis convenit eaſdem in abſolutas & relativas, veras & apparentes, mathematicas & vulgares diſtingui.

I. Tempus abſolutum, verum, & mathematicum, in ſe & natura ſua ſine relatione ad externum quodvis, æquabiliter fluit, alioque nomine dicitur duratio: Relativum, apparens, & vulgare eſt ſenſibilis & externa quævis durationis per motum menſura (ſeu accurata ſeu inæquabilis) qua vulgus vice veri temporis utitur; ut hora, dies, menſis, annus.

II. Spatium abſolutum, natura ſua ſine relatione ad externum quodvis, ſemper manet ſimilare & immobile: Relativum eſt ſpatii hujus menſura ſeu dimenſio quælibet mobilis, quæ a ſenſibus noſtris per ſitum ſuum ad corpora definitur, & a vulgo pro ſpatio immobili uſurpatur: uti dimenſio ſpatii ſubterranei, aërii vel cœleſtis definita per ſitum ſuum ad terram. Idem ſunt ſpatium abſolutum & relativum, ſpecie & magnitudine; ſed non permanent idem ſemper numero. Nam ſi terra, verbi gratia, moveatur, ſpatium aëris noſtri, quod relative & reſpectu terræ ſemper manet idem, nunc erit una pars ſpatii abſoluti in quam aër tranſit, nunc alia pars ejus; & ſic abſolute mutabitur perpetuo.

III. Locus

III. Locus eſt pars ſpatii quam corpus occupat, eſtque pro ratione ſpatii vel abſolutus vel relativus. Pars, inquam, ſpatii; non ſitus corporis, vel ſuperficies ambiens. Nam ſolidorum æqualium æquales ſemper ſunt loci; Superficies autem ob diſſimilitudinem figurarum ut plurimum inæquales ſunt; Situs vero proprie loquendo quantitatem non habent, neque tam ſunt loca quam affectiones locorum. Motus totius idem eſt cum ſumma motuum partium; hoc eſt, tranſlatio totius de ſuo loco eadem eſt cum ſumma tranſlationum partium de locis ſuis; ideoque locus totius idem eſt cum ſumma locorum partium, & propterea internus & in corpore toto.

IV. Motus abſolutus eſt tranſlatio corporis de loco abſoluto in locum abſolutum, relativus de relativo in relativum. Sic in navi quæ velis paſſis fertur, relativus corporis locus eſt navigii regio illa in qua corpus verſatur, ſeu cavitatis totius pars illa quam corpus implet, quæque adeo movetur una cum navi: & quies relativa eſt permanſio corporis in eadem illa navis regione vel parte cavitatis. At quies vera eſt permanſio corporis in eadem parte ſpatii illius immoti, in qua navis ipſa una cum cavitate ſua & contentis univerſis movetur. Unde ſi terra vere quieſcat, corpus, quod relative quieſcit in navi, movebitur vere & abſolute ea cum velocitate, qua navis movetur in terra. Sin terra etiam moveatur; orietur verus & abſolutus corporis motus, partim ex terræ motu vero in ſpatio immoto, partim ex navis motu relativo in terra. Et ſi corpus etiam moveatur relative in navi; orietur verus ejus motus, partim ex vero motu terræ in ſpatio immoto, partim ex relativis motibus tum navis in terra tum corporis in navi: & ex his motibus relativis orietur corporis motus relativus in terra. Ut ſi terræ pars illa, ubi navis verſatur, moveatur vere in orientem cum velocitate partium 10010; & velis ventoque feratur navis in occidentem cum velocitate partium decem; nauta autem ambulet in navi orientem verſus cum velocitatis parte una: movebitur nauta vere & abſolute in ſpatio immoto cum velocitatis partibus 10001 in orientem, & relative in terra occidentem verſus cum velocitatis partibus novem.

Tempus abſolutum a relativo diſtinguitur in Aſtronomia per æquationem temporis vulgi. Inæquales enim ſunt dies naturales, qui vulgo tanquam æquales pro menſura temporis habentur. Hanc

inæqua-

inæqualitatem corrigunt Aſtronomi, ut ex veriore tempore menſurent motus cœleſtes. Poſſibile eſt, ut nullus ſit motus æquabilis, quo tempus accurate menſuretur. Accelerari & retardari poſſunt motus omnes, ſed fluxus temporis abſoluti mutari nequit. Eadem eſt duratio ſeu perſeverantia exiſtentiæ rerum, ſive motus ſint celeres, ſive tardi, ſive nulli: proinde hæc a menſuris ſuis ſenſibilibus merito diſtinguitur, & ex iiſdem colligitur per æquationem aſtronomicam. Hujus autem æquationis in determinandis phænomenis neceſſitas, tum per experimentum horologii oſcillatorii, tum etiam per eclipſes ſatellitum Jovis evincitur.

Ut ordo partium temporis eſt immutabilis, ſic etiam ordo partium ſpatii. Moveantur hæ de locis ſuis, & movebuntur (ut ita dicam) de ſeipſis. Nam tempora & ſpatia ſunt ſui ipſorum & rerum omnium quaſi loca. In tempore quoad ordinem ſucceſſionis, in ſpatio quoad ordinem ſitus, locantur univerſa. De illorum eſſentia eſt ut ſint loca: & loca primaria moveri abſurdum eſt. Hæc ſunt igitur abſoluta loca; & ſolæ tranſlationes de his locis ſunt abſoluti motus.

Verum quoniam hæ ſpatii partes videri nequeunt, & ab invicem per ſenſus noſtros diſtingui; earum vice adhibemus menſuras ſenſibiles. Ex poſitionibus enim & diſtantiis rerum a corpore aliquo, quod ſpectamus ut immobile, definimus loca univerſa: deinde etiam & omnes motus æſtimamus cum reſpectu ad prædicta loca, quatenus corpora ab iiſdem transferri concipimus. Sic vice locorum & motuum abſolutorum relativis utimur; nec incommode in rebus humanis: in philoſophicis autem abſtrahendum eſt a ſenſibus. Fieri etenim poteſt, ut nullum revera quieſcat corpus, ad quod loca motuſque referantur.

Diſtinguuntur autem quies & motus abſoluti & relativi ab invicem per proprietates ſuas & cauſas & effectus. Quietis proprietas eſt, quod corpora vere quieſcentia quieſcunt inter ſe. Ideoque cum poſſibile ſit, ut corpus aliquod in regionibus fixarum, aut longe ultra, quieſcat abſolute; ſciri autem non poſſit ex ſitu corporum ad invicem in regionibus noſtris, horumne aliquod ad longinquum illud datam poſitionem ſervet necne; quies vera ex horum ſitu inter ſe definiri nequit.

Motus proprietas eſt, quod partes, quæ datas ſervant poſitiones ad tota, participant motus eorundem totorum. Nam gyrantium partes omnes conantur recedere ab axe motus, & progredientium impetus oritur ex conjuncto impetu partium ſingularum. Motis igitur corporibus ambientibus, moventur quæ in ambientibus relative quieſcunt. Et propterea motus verus & abſolutus definiri nequit per tranſlationem e vicinia corporum, quæ tanquam quieſcentia ſpectantur. Debent enim corpora externa non ſolum tanquam quieſcentia ſpectari, ſed etiam vere quieſcere. Alioquin incluſa omnia, præter tranſlationem e vicinia ambientium, participabunt etiam ambientium motus veros; & ſublata illa tranſlatione non vere quieſcent, ſed tanquam quieſcentia ſolummodo ſpectabuntur. Sunt enim ambientia ad incluſa, ut totius pars exterior ad partem interiorem, vel ut cortex ad nucleum. Moto autem cortice, nucleus etiam, ſine tranſlatione de vicinia corticis, ceu pars totius, movetur. DEFINITIONES.

Præcedenti proprietati affinis eſt, quod moto loco movetur una locatum: ideoque corpus, quod de loco moto movetur, participat etiam loci ſui motum. Motus igitur omnes, qui de locis motis fiunt, ſunt partes ſolummodo motuum integrorum & abſolutorum: & motus omnis integer componitur ex motu corporis de loco ſuo primo, & motu loci hujus de loco ſuo, & ſic deinceps; uſque dum perveniatur ad locum immotum, ut in exemplo nautæ ſupra memorato. Unde motus integri & abſoluti non niſi per loca immota definiri poſſunt: & propterea hos ad loca immota, relativos ad mobilia ſupra retuli. Loca autem immota non ſunt, niſi quæ omnia ab infinito in infinitum datas ſervant poſitiones ad invicem; atque adeo ſemper manent immota, ſpatiumque conſtituunt quod immobile appello.

Cauſæ, quibus motus veri & relativi diſtinguuntur ab invicem, ſunt vires in corpora impreſſæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur, niſi per vires in ipſum corpus motum impreſſas: at motus relativus generari & mutari poteſt ſine viribus impreſſis in hoc corpus. Sufficit enim ut imprimantur in alia ſolum corpora ad quæ fit relatio, ut iis cedentibus mutetur relatio illa, in qua hujus quies vel motus relativus conſiſtit. Rurſum motus verus a viribus in corpus motum impreſſis ſemper muta-

DEFINITIONES.

tur; at motus relativus ab his viribus non mutatur neceſſario. Nam ſi eædem vires in alia etiam corpora, ad quæ ſit relatio, ſic imprimantur, ut ſitus relativus conſervetur, conſervabitur relatio in qua motus relativus conſiſtit. Mutari igitur poteſt motus omnis relativus, ubi verus conſervatur, & conſervari ubi verus mutatur; & propterea motus verus in ejuſmodi relationibus minime conſiſtit.

Effectus, quibus motus abſoluti & relativi diſtinguuntur ab invicem, ſunt vires recedendi ab axe motus circularis. Nam in motu circulari nude relativo hæ vires nullæ ſunt, in vero autem & abſoluto majores vel minores pro quantitate motus. Si pendeat ſitula a filo prælongo, agaturque perpetuo in orbem, donec filum a contorſione admodum rigeſcat, dein impleatur aqua, & una cum aqua quieſcat; tum vi aliqua ſubitanea agatur motu contrario in orbem, & filo ſe relaxante, diutius perſeveret in hoc motu; ſuperficies aquæ ſub initio plana erit, quemadmodum ante motum vaſis: At poſtquam vas, vi in aquam paulatim impreſſa, effecit ut hæc quoque ſenſibiliter revolvi incipiat; recedet ipſa paulatim a medio, aſcendetque ad latera vaſis, figuram concavam induens, (ut ipſe expertus ſum) & incitatiore ſemper motu aſcendet magis & magis, donec revolutiones in æqualibus cum vaſe temporibus peragendo, quieſcat in eodem relative. Indicat hic aſcenſus conatum recedendi ab axe motus, & per talem conatum innoteſcit & menſuratur motus aquæ circularis verus & abſolutus, motuique relativo hic omnino contrarius. Initio, ubi maximus erat aquæ motus relativus in vaſe, motus ille nullum excitabat conatum recedendi ab axe: aqua non petebat circumferentiam aſcendendo ad latera vaſis, ſed plana manebat, & propterea illius verus motus circularis nondum inceperat. Poſtea vero, ubi aquæ motus relativus decrevit, aſcenſus ejus ad latera vaſis indicabat conatum recedendi ab axe; atque hic conatus monſtrabat motum illius circularem verum perpetuo creſcentem, ac tandem maximum factum ubi aqua quieſcebat in vaſe relative. Quare conatus iſte non pendet a tranſlatione aquæ reſpectu corporum ambientium, & propterea motus circularis verus per tales tranſlationes definiri nequit. Unicus eſt corporis cujuſque revolventis motus vere circularis, conatui unico tanquam proprio & adæquato effectui reſpondens: motus autem relativi pro variis relationibus ad externa innumeri ſunt; & relationum

inſtar,

inſtar, effectibus veris omnino deſtituuntur, niſi quatenus verum illum & unicum motum participant. Unde & in ſyſtemate eorum, qui cœlos noſtros infra cœlos fixarum in orbem revolvi volunt, & planetas ſecum deferre; ſingulæ cœlorum partes, & planetæ qui relative quidem in cœlis ſuis proximis quieſcunt, moventur vere. Mutant enim poſitiones ſuas ad invicem (ſecus quam fit in vere quieſcentibus) unaque cum cœlis delati participant eorum motus, & ut partes revolventium totorum, ab eorum axibus recedere conantur. DEFINITIONES.

Quantitates relativæ non ſunt igitur eæ ipſæ quantitates, quarum nomina præ ſe ferunt, ſed ſunt earum menſuræ illæ ſenſibiles (veræ an errantes) quibus vulgus loco quantitatum menſuratarum utitur. At ſi ex uſu definiendæ ſunt verborum ſignificationes; per nomina illa temporis, ſpatii, loci & motus proprie intelligendæ erunt hæ menſuræ ſenſibiles; & ſermo erit inſolens & pure mathematicus, ſi quantitates menſuratæ hic intelligantur. Proinde vim inferunt ſacris literis, qui voces haſce de quantitatibus menſuratis ibi interpretantur. Neque minus contaminant matheſin & philoſophiam, qui quantitates veras cum ipſarum relationibus & vulgaribus menſuris confundunt.

Motus quidem veros corporum ſingulorum cognoſcere, & ab apparentibus actu diſcriminare, difficillimum eſt; propterea quod partes ſpatii illius immobilis, in quo corpora vere moventur, non incurrunt in ſenſus. Cauſa tamen non eſt prorſus deſperata. Nam argumenta deſumi poſſunt, partim ex motibus apparentibus qui ſunt motuum verorum differentiæ, partim ex viribus quæ ſunt motuum verorum cauſæ & effectus. Ut ſi globi duo, ad datam ab invicem diſtantiam filo intercedente connexi, revolverentur circa commune gravitatis centrum; innoteſceret ex tenſione fili conatus globorum recedendi ab axe motus, & inde quantitas motus circularis computari poſſet. Deinde ſi vires quælibet æquales in alternas globorum facies ad motum circularem augendum vel minuendum ſimul imprimerentur, innoteſceret ex aucta vel diminuta fili tenſione augmentum vel decrementum motus; & inde tandem inveniri poſſent facies globorum in quas vires imprimi deberent, ut motus maxime augeretur; id eſt, facies poſticæ, ſive quæ in motu circulari ſequuntur. Cognitis autem faciebus quæ ſequuntur,

DEFINITIONES. & faciebus oppoſitis quæ præcedunt, cognoſceretur determinatio motus. In hunc modum inveniri poſſet & quantitas & determinatio motus hujus circularis in vacuo quovis immenſo, ubi nihil extaret externum & ſenſibile quocum globi conferri poſſent. Si jam conſtituerentur in ſpatio illo corpora aliqua longinqua datam inter ſe poſitionem ſervantia, qualia ſunt ſtellæ fixæ in regionibus cœlorum: ſciri quidem non poſſet ex relativa globorum tranſlatione inter corpora, utrum his an illis tribuendus eſſet motus. At ſi attenderetur ad filum, & deprehenderetur tenſionem ejus illam ipſam eſſe quam motus globorum requireret; concludere liceret motum eſſe globorum, & corpora quieſcere; & tum demum ex tranſlatione globorum inter corpora, determinationem hujus motus colligere. Motus autem veros ex eorum cauſis, effectibus, & apparentibus differentiis colligere, & contra ex motibus ſeu veris ſeu apparentibus eorum cauſas & effectus, docebitur fuſius in ſequentibus. Hunc enim in finem tractatum ſequentem compoſui.

AXIO-

AXIOMATA,

SIVE

LEGES MOTUS.

LEX I.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus illud a viribus impreſſis cogitur ſtatum ſuum mutare.

PRojectilia perſeverant in motibus ſuis, niſi quatenus a reſiſtentia aëris retardantur, & vi gravitatis impelluntur deorſum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt ſeſe a motibus rectilineis, non ceſſat rotari, niſi quatenus ab aëre retardatur. Majora autem planetarum & cometarum corpora motus ſuos & progreſſivos & circulares in ſpatiis minus reſiſtentibus factos conſervant diutius.

LEX II.

Mutationem motus proportionalem eſſe vi motrici impreſſæ, & fieri ſecundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet; dupla duplum, tripla triplum generabit, ſive ſimul & ſemel, ſive gradatim & ſucceſſive impreſſa fuerit. Et hic motus (quoniam in eandem ſemper plagam cum vi generatrice determinatur) ſi corpus antea movebatur, motui ejus vel conſpiranti additur, vel contrario ſubducitur, vel oblique oblique adjicitur, & cum eo ſecundum utriuſque determinationem componitur.

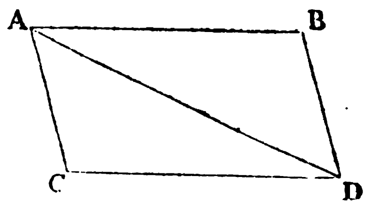
LEX III.

Actioni contrariam ſemper & æqualem eſſe reactionem: ſive corporum duorum actiones in ſe mutuo ſemper eſſe æquales & in partes contrarias dirigi.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Si quis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus a lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahit, retrahetur etiam & equus (ut ita dicam) æqualiter in lapidem: nam funis utrinque diſtentus eodem relaxandi ſe conatu urgebit equum verſus lapidem, ac lapidem verſus equum; tantumque impediet progreſſum unius quantum promovet progreſſum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi ſua quomodocunque mutaverit, idem quoque viciſſim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem preſſionis mutuæ) ſubibit. His actionibus æquales fiunt mutationes, non velocitatum, ſed motuum; ſcilicet in corporibus non aliunde impeditis. Mutationes enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, ſunt corporibus reciproce proportionales. Obtinet etiam hæc lex in attractionibus, ut in ſcholio proximo probabitur.

COROLLARIUM I.

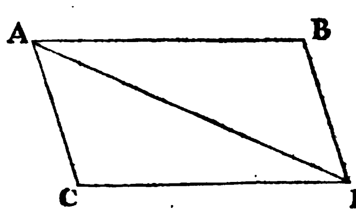
Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore deſcribere, quo latera ſeparatis.



Si corpus dato tempore, vi ſola *M* in loco *A* impreſſa, ferretur uniformi cum motu ab *A* ad *B*; & vi ſola *N* in eodem loco impreſſa, ferretur ab *A* ad *C*: compleatur parallelogrammum *ABDC*, & vi utraque feretur corpus illud eodem tempore in diagonali ab *A* ad *D*. Nam quoniam vis *N* agit ſecundum lineam *AC* ipſi *BD* parallelam, hæc vis per legem II nihil mutabit

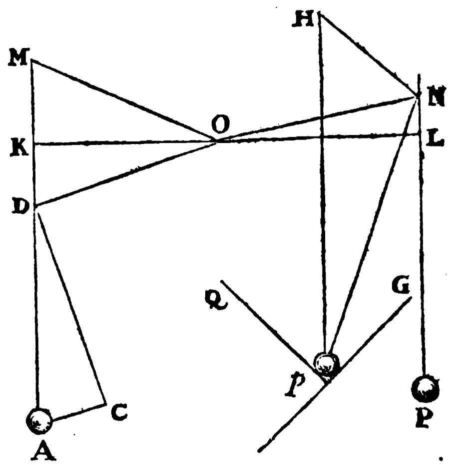
mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam *BD* a vi altera genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam *BD*, ſive vis *N* imprimatur, ſive non; atque ideo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea illa *BD*. Eodem argumento in fine temporis ejuſdem reperietur alicubi in linea *CD*, & idcirco in utriuſque lineæ concurſu *D* reperiri neceſſe eſt. Perget autem motu rectilineo ab *A* ad *D* per legem I.

COROLLARIUM II.



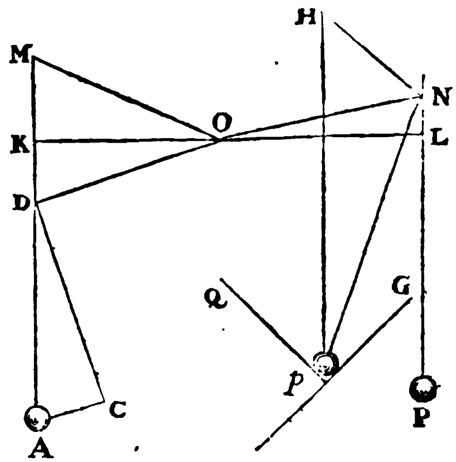
Et hinc patet compoſitio vis directæ AD *ex viribus quibuſvis obliquis* AB *&* BD, *& viciſſim reſolutio vis cujuſvis directæ* AD *in obliquas quaſcunque* AB *&* BD. *Quæ quidem compoſitio & reſolutio abunde confirmatur ex mechanica.*

Ut ſi de rotæ alicujus centro *O* exeuntes radii inæquales *OM*, *ON* filis *MA*, *NP* ſuſtineant pondera *A* & *P*, & quærantur vires ponderum ad movendam rotam: Per centrum *O* agatur recta *KOL* filis perpendiculariter occurrens in *K* & *L*, centroque *O* & intervallorum *OK*, *OL* majore *OL* deſcribatur circulus occurrens filo *MA* in *D*: & actæ rectæ *OD* parallella ſit *AC*, & perpendicularis *DC*. Quoniam nihil refert, utrum filorum puncta *K*, *L*, *D* affixa ſint an non affixa ad planum rotæ; pondera idem valebunt, ac ſi ſuſpenderentur a punctis *K* & *L* vel *D* & *L*. Ponderis autem *A* exponatur vis tota per lineam *AD*, & hæc reſolvetur in vires *AC*, *CD*, quarum *AC* trahendo radium *OD* directe a centro nihil valet ad movendam rotam; vis autem altera *DC*, trahendo radium *DO* perpendiculariter, idem



idem valet, ac ſi perpendiculariter traheret radium *O L* ipſi *OD* æqualem; hoc eſt, idem atque pondus *P*, ſi modo pondus illud ſit ad pondus *A* ut vis *DC* ad vim *DA*, id eſt (ob ſimilia triangula *ADC*, *DOK*,) ut *OK* ad *OD* ſeu *O L*. Pondera igitur *A* & *P*, quæ ſunt reciproce ut radii in directum poſiti *OK* & *O L*, idem pollebunt, & ſic conſiſtent in æquilibrio: quæ eſt proprietas notiſſima libræ, vectis, & axis in peritrochio. Sin pondus alterutrum ſit majus quam in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tanto major.

Quod ſi pondus *p* ponderi *P* æquale partim ſuſpendatur filo *Np*, partim incumbat plano obliquo *p G*: agantur *p H*, *N H*, prior horizonti, poſterior plano *p G* perpendicularis; & ſi vis ponderis *p* deorſum tendens, exponatur per lineam *p H*, reſolvi poteſt hæc in vires *p N*, *H N*. Si filo *p N* perpendiculare eſſet planum aliquod *p Q*, ſecans planum alterum *p G* in linea ad horizontem parallela; & pondus *p* his planis *p Q*, *p G* ſolummodo incumberet; urgeret illud hæc plana viribus *p N*, *H N*, perpendiculariter nimirum planum *p Q* vi *p N*, & planum *p G* vi *H N*. Ideoque ſi tollatur planum *p Q*, ut pondus tendat filum; quoniam filum ſuſtinendo pondus jam vicem præſtat plani ſublati, tendetur illud eadem vi *p N*, qua planum antea urgebatur. Unde tenſio fili hujus obliqui erit ad tenſionem fili alterius perpendicularis *P N*, ut *p N* ad *p H*, Ideoque ſi pondus *p* ſit ad pondus *A* in ratione, quæ componitur ex ratione reciproca minimarum diſtantiarum filorum ſuorum *p N*, *A M* a centro rotæ, & ratione directa *p H* ad *p N*; pondera idem valebunt ad rotam movendam, atque ideo ſe mutuo ſuſtinebunt, ut quilibet experiri poteſt.



Pondus autem *p*, planis illis duobus obliquis incumbens, rationem habet cunei inter corporis fiſſi facies internas: & inde vires cunei & mallei innoteſcunt: utpote cum vis qua pondus *p* urget planum *p Q* ſit ad vim, qua idem vel gravitate ſua vel ictu mallei impellitur

ſecundum

ſecundum lineam pH in plana, ut pN ad pH; atque ad vim, qua urget planum alterum pG, ut pN ad NH. Sed & vis cochleæ per ſimilem virium diviſionem colligitur; quippe quæ cuneus eſt a vecte impulſus. Uſus igitur corollarii hujus latiſſime patet, & late patendo veritatem ejus evincit; cum pendeat ex jam dictis mechanica tota ab auctoribus diverſimode demonſtrata. Ex hiſce enim facile derivantur vires machinarum, quæ ex rotis, tympanis, trochleis, vectibus, nervis tenſis & ponderibus directe vel oblique aſcendentibus, cæteriſque potentiis mechanicis componi ſolent, ut & vires tendinum ad animalium oſſa movenda. LEGES MOTUS.

COROLLARIUM III.

Quantitas motus quæ colligitur capiendo ſummam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, non mutatur ab actione corporum inter ſe.

Etenim actio eique contraria reactio æquales ſunt per legem III, ideoque per legem II æquales in motibus efficiunt mutationes verſus contrarias partes. Ergo ſi motus fiunt ad eandem partem; quicquid additur motui corporis fugientis, ſubducetur motui corporis inſequentis ſic, ut ſumma maneat eadem quæ prius. Sin corpora obviam eant; æqualis erit ſubductio de motu utriuſque, ideoque differentia motuum factorum in contrarias partes manebit eadem.

Ut ſi corpus ſphæricum A ſit triplo majus corpore ſphærico B, habeatque duas velocitatis partes; & B ſequatur in eadem recta cum velocitatis partibus decem, ideoque motus ipſius A ſit ad motum ipſius B, ut ſex ad decem: ponantur motus illis eſſe partium ſex & partium decem, & ſumma erit partium ſexdecim. In corporum igitur concurſu, ſi corpus A lucretur motus partes tres vel quatuor vel quinque, corpus B amittet partes totidem, ideoque perget corpus A poſt reflexionem cum partibus novem vel decem vel undecim, & B cum partibus ſeptem vel ſex vel quinque, exiſtente ſemper ſumma partium ſexdecim ut prius. Si corpus A lucretur partes novem vel decem vel undecim vel duodecim, ideoque progrediatur poſt concurſum cum partibus quindecim vel ſexdecim vel ſeptendecim vel octodecim; corpus B, amittendo tot partes quot A lucratur,

AXIOMATA, SIVE

vel cum una parte progredietur amiſſis partibus novem, vel quieſcet amiſſo motu ſuo progreſſivo partium decem, vel cum una parte regredietur amiſſo motu ſuo & (ut ita dicam) una parte amplius, vel regredietur cum partibus duabus ob detractum motum progreſſivum partium duodecim. Atque ita ſummæ motuum conſpirantium 15+1 vel 16+0, & differentiæ contrariorum 17—1 & 18—2 ſemper erunt partium ſexdecim, ut ante concurſum & reflexionem. Cognitis autem motibus quibuſcum corpora poſt reflexionem pergent, invenietur cujuſque velocitas, ponendo eam eſſe ad velocitatem ante reflexionem, ut motus poſt eſt ad motum ante. Ut in caſu ultimo, ubi corporis *A* motus erat partium ſex ante reflexionem & partium octodecim poſtea, & velocitas partium duarum ante reflexionem; invenietur ejus velocitas partium ſex poſt reflexionem, dicendo, ut motus partes ſex ante reflexionem ad motus partes octodecim poſtea, ita velocitatis partes duæ ante reflexionem ad velocitatis partes ſex poſtea.

Quod ſi corpora vel non ſphærica vel diverſis in rectis moventia incidant in ſe mutuo oblique, & requirantur eorum motus poſt reflexionem; cognoſcendus eſt ſitus plani a quo corpora concurrentia tanguntur in puncto concurſus: dein corporis utriuſque motus (per Corol. II.) diſtinguendus eſt in duos, unum huic plano perpendicularem, alterum eidem parallelum: motus autem paralleli, propterea quod corpora agant in ſe invicem ſecundum lineam huic plano perpendicularem, retinendi ſunt iidem poſt reflexionem atque antea; & motibus perpendicularibus mutationes æquales in partes contrarias tribuendæ ſunt ſic, ut ſumma conſpirantium & differentia contrariorum maneat eadem quæ prius. Ex hujuſmodi reflexionibus oriri etiam ſolent motus circulares corporum circa centra propria. Sed hos caſus in ſequentibus non conſidero, & nimis longum eſſet omnia huc ſpectantia demonſtrare.

COROL-

COROLLARIUM IV.

Commune gravitatis centrum corporum duorum vel plurium, ab actionibus corporum inter ſe, non mutat ſtatum ſuum vel motus vel quietis; & propterea corporum omnium in ſe mutuo agentium (excluſis actionibus & impedimentis externis) commune centrum gravitatis vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum.

Nam ſi puncta duo progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis, & diſtantia eorum dividatur in ratione data, punctum dividens vel quieſcit vel progreditur uniformiter in linea recta. Hoc poſtea in lemmate XXIII ejuſque corollario demonſtratur, ſi punctorum motus fiant in eodem plano; & eadem ratione demonſtrari poteſt, ſi motus illi non fiant in eodem plano. Ergo ſi corpora quotcunque moventur uniformiter in lineis rectis, commune centrum gravitatis duorum quorumvis vel quieſcit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod linea, horum corporum centra in rectis uniformiter progredientia jungens, dividitur ab hoc centro communi in ratione data. Similiter & commune centrum horum duorum & tertii cujuſvis vel quieſcit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod ab eo dividitur diſtantia centri communis corporum duorum & centri corporis tertii in data ratione. Eodem modo & commune centrum horum trium & quarti cujuſvis vel quieſcit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod ab eo dividitur diſtantia inter centrum commune trium & centrum quarti in data ratione, & ſic in infinitum. Igitur in ſyſtemate corporum, quæ actionibus in ſe invicem aliiſque omnibus in ſe extrinſecus impreſſis omnino vacant, ideoque moventur ſingula uniformiter in rectis ſingulis, commune omnium centrum gravitatis vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum.

Porro in ſyſtemate duorum corporum in ſe invicem agentium, cum diſtantiæ centrorum utriuſque a communi gravitatis centro ſint reciproce ut corpora; erunt motus relativi corporum eorundem, vel accedendi ad centrum illud vel ab eodem recedendi, æquales inter

 ſe.

ſe. Proinde centrum illud a motuum æqualibus mutationibus in partes contrarias factis, atque ideo ab actionibus horum corporum inter ſe, nec promovetur nec retardatur nec mutationem patitur in ſtatu ſuo quoad motum vel quietem. In ſyſtemate autem corporum plurium, quoniam duorum quorumvis in ſe mutuo agentium commune gravitatis centrum ob actionem illam nullatenus mutat ſtatum ſuum; & reliquorum, quibuſcum actio illa non intercedit, commune gravitatis centrum nihil inde patitur; diſtantia autem horum duorum centrorum dividitur a communi corporum omnium centro in partes ſummis totalibus corporum quorum ſunt centra reciproce proportionales; ideoque centris illis duobus ſtatum ſuum movendi vel quieſcendi ſervantibus, commune omnium centrum ſervat etiam ſtatum ſuum: manifeſtum eſt quod commune illud omnium centrum ob actiones binorum corporum inter ſe nunquam mutat ſtatum ſuum quoad motum & quietem. In tali autem ſyſtemate actiones omnes corporum inter ſe, vel inter bina ſunt corpora, vel ab actionibus inter bina compoſitæ; & propterea communi omnium centro mutationem in ſtatu motus ejus vel quietis nunquam inducunt. Quare cum centrum illud ubi corpora non agunt in ſe invicem, vel quieſcit, vel in recta aliqua progreditur uniformiter; perget idem, non obſtantibus corporum actionibus inter ſe, vel ſemper quieſcere, vel ſemper progredi uniformiter in directum; niſi a viribus in ſyſtema extrinſecus impreſſis deturbetur de hoc ſtatu. Eſt igitur ſyſtematis corporum plurium lex eadem, quæ corporis ſolitarii, quoad perſeverantiam in ſtatu motus vel quietis. Motus enim progreſſivus ſeu corporis ſolitarii ſeu ſyſtematis corporum ex motu centri gravitatis æſtimari ſemper debet.

COROLLARIUM V.

Corporum dato ſpatio incluſorum iidem ſunt motus inter ſe, ſive ſpatium illud quieſcat, ſive moveatur idem uniformiter in directum ſine motu circulari.

Nam differentiæ motuum tendentium ad eandem partem, & ſummæ tendentium ad contrarias, eædem ſunt ſub initio in utroque caſu (ex hypotheſi) & ex his ſummis vel differentiis oriuntur con-

greſſus

greſſus & impetus quibus corpora ſe mutuo feriunt. Ergo per legem II æquales erunt congreſſuum effectus in utroque caſu; & propterea manebunt motus inter ſe in uno caſu æquales motibus inter ſe in altero. Idem comprobatur experimento luculento. Motus omnes eodem modo ſe habent in navi, ſive ea quieſcat, ſive moveatur uniformiter in directum.

COROLLARIUM VI.

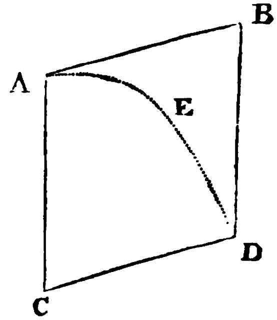
Si corpora moveantur quomodocunque inter ſe, & a viribus acceleratricibus æqualibus ſecundum lineas parallelas urgeantur; pergent omnia eodem modo moveri inter ſe, ac ſi viribus illis non eſſent incitata.

Nam vires illæ æqualiter (pro quantitatibus movendorum corporum) & ſecundum lineas parallelas agendo, corpora omnia æqualiter (quoad velocitatem) movebunt per legem II. ideoque nunquam mutabunt poſitiones & motus eorum inter ſe.

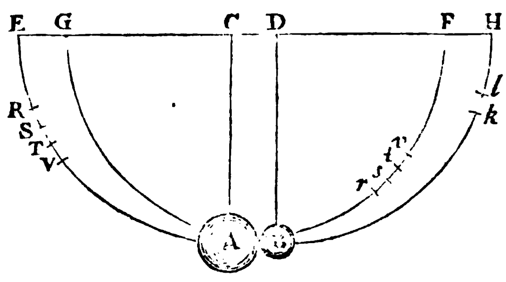
Scholium.

Hactenus principia tradidi a mathematicis recepta & experientia multiplici confirmata. Per leges duas primas & corollaria duo prima *Galilæus* invenit deſcenſum gravium eſſe in duplicata ratione temporis, & motum projectilium fieri in parabola; conſpirante experientia, niſi quatenus motus illi per aëris reſiſtentiam aliquantulum retardantur. Corpore cadente gravitas uniformis, ſingulis temporis particulis æqualibus æqualiter agendo imprimit vires æquales in corpus illud, & velocitates æquales generat: & tempore toto vim totam imprimit & velocitatem totam generat tempori proportionalem. Et ſpatia temporibus proportionalibus deſcripta, ſunt ut velocitates & tempora conjunctim; id eſt in duplicata ratione temporum. Et corpore ſurſum projecto gravitas uniformis vires imprimit & velocitates aufert temporibus proportionales; ac tempora aſcendendi ad altitudines ſummas ſunt ut velocitates auferendæ, & altitudines illæ ſunt ut velocitates ac tempora conjunctim, ſeu in duplicata ratione velocitatum.

velocitatum. Et corporis ſecundum rectam quamvis projecti motus a projectione oriundus cum motu a gravitate oriundo componitur. Ut ſi corpus *A* motu ſolo projectionis dato tempore deſcribere poſſet rectam *AB* & motu ſolo cadendi eodem tempore deſcribere poſſet altitudinem *AC*: compleatur parallelogrammum *ABDC*, & corpus illud motu compoſito reperietur in fine temporis in loco *D*; & curva linea *AED*, quam corpus illud deſcribet, erit parabola quam recta *AB* tangit in *A*, & cujus ordinata *BD* eſt ut *ABq*. Ab iiſdem legibus & corollariis



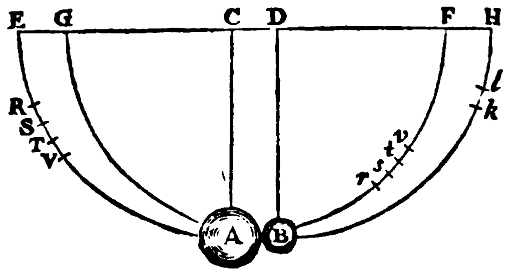
pendent demonſtrata de temporibus oſcillantium pendulorum, ſuffragante horologiorum experientia quotidiana. Ex his iiſdem & lege tertia *Chriſtophorus Wrennus* eques auratus, *Johannes Walliſius* *S. T. D.* & *Chriſtianus Hugenius*, ætatis ſuperioris geometrarum facile principes, regulas congreſſuum & reflexionum durorum corporum ſeorſim invenerunt, & eodem fere tempore cum *Societate Regia* communicarunt, inter ſe (quoad has leges) omnino conſpirantes: & primus quidem *Walliſius*, deinde *Wrennus* & *Hugenius* inventum prodiderunt. Sed & veritas comprobata eſt a *Wrenno* coram *Regia Societate* per experimentum pendulorum: quod etiam *Clariſſimus Mariottus* libro integro exponere mox dignatus eſt. Verum, ut hoc experimentum cum theoriis ad amuſſim congruat, habenda eſt ratio, cum reſiſtentiæ aëris, tum etiam vis elaſticæ concurrentium corporum. Pendeant corpora ſphærica *A*, *B* filis parallelis & æqualibus *AC*, *BD*, a centris *C*, *D*. His centris & intervallis deſcribantur ſemicirculi *EAF*, *GBH* radiis *CA*, *DB* biſecti. Trahatur corpus *A* ad arcus *EAF* punctum quodvis *R*, & (ſubducto corpore *B*) demittatur inde, redeatque poſt unam oſcillationem ad punctum *V*. Eſt *RV* retardatio ex reſiſtentia aeris. Hujus *RV* fiat *ST* pars quarta



ſita in medio, ita ſcilicet ut *RS* & *TV* æquentur, ſitque *RS* ad *ST* ut 3 ad 2. Et iſta *ST* exhibebit retardationem in deſcenſu ab *S* ad *A* quam

A quam proxime. Reſtituatur corpus *B* in locum ſuum. Cadat corpus *A* de puncto *S*, & velocitas ejus in loco reflexionis *A* ſine errore ſenſibili tanta erit, ac ſi in vacuo cecidiſſet de loco *T*. Exponatur igitur hæc velocitas per chordam arcus *TA*. Nam velocitatem penduli in puncto infimo eſſe ut chordam arcus, quem cadendo deſcripſit, propoſitio eſt geometris notiſſima. Poſt reflexionem perveniat corpus *A* ad locum *s*, & corpus *B* ad locum *k*. Tollatur corpus *B* & inveniatur locus *v*; a quo ſi corpus *A* demittatur & poſt unam oſcillationem redeat ad locum *r*, ſit *st* pars quarta ipſius *rv* ſita in medio, ita videlicet ut *rs* & *tv* æquentur; & per chordam arcus *tA* exponatur velocitas, quam corpus *A* proxime poſt reflexionem habuit in loco *A*. Nam *t* erit locus ille verus & correctus, ad quem corpus *A*, ſublata aeris reſiſtentia, aſcendere debuiſſet. Simili methodo corrigendus erit locus *k*, ad quem corpus *B* aſcendit, & inveniendus locus *l*, ad quem corpus illud aſcendere debuiſſet in vacuo. Hoc pacto experiri licet omnia, perinde ac ſi in vacuo conſtituti eſſemus. Tandem ducendum erit corpus *A* (ut ita dicam) in chordam arcus *TA*, quæ velocitatem ejus exhibet, ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime ante reflexionem; deinde in chordam arcus *tA*, ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime poſt reflexionem. Et ſic corpus *B* ducendum erit in chordam arcus *Bl*, ut habeatur motus ejus proxime poſt reflexionem. Et ſimili methodo, ubi corpora duo ſimul demittuntur de locis diverſis, inveniendi ſunt motus utriuſque tam ante, quam poſt reflexionem; & tum demum conferendi ſunt motus inter ſe & colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in pendulis pedum decem rem tentando, idque in corporibus tam inæqualibus quam æqualibus, & faciendo ut corpora de intervallis ampliſſimis, puta pedum octo vel duodecim vel ſexdecim, concurrerent; reperi ſemper ſine errore trium digitorum in menſuris, ubi corpora ſibi mutuo directe occurrebant, æquales eſſe mutationes motuum corporibus in partes contrarias illatæ, atque ideo actionem & reactionem ſemper eſſe æquales. Ut ſi corpus *A* incidebat in corpus *B* quieſcens cum novem partibus motus, & amiſſis ſeptem partibus pergebat poſt reflexionem cum duabus; corpus *B* reſiliebat cum partibus iſtis ſeptem. Si corpora obviam ibant, *A* cum duodecim partibus & *B* cum ſex, & redibat *A* cum duabus; redibat *B* cum octo, facta detractione partium quatuordecim utrinque. De motu ipſius *A* ſubducantur partes duodecim

AXIOMATA, SIVE decim & reſtabit nihil: ſubducantur aliæ partes duæ, & fiet motus duarum partium in plagam contrariam: & ſic de motu corporis *B* partium ſex ſubducendo partes quatuordecim, fient partes octo in plagam contrariam. Quod ſi corpora ibant ad eandem plagam, *A* velocius cum partibus quatuordecim, & *B* tardius cum partibus quinque, & poſt reflexionem pergebat *A* cum quinque partibus; pergebat *B* cum quatuordecim, facta tranſlatione partium novem de *A* in *B*. Et ſic in reliquis. A congreſſu & colliſione corporum nunquam mutabatur quantitas motus, quæ ex ſumma motuum conſpirantium & differentia contrariorum colligebatur. Nam errorem digiti unius & alterius in menſuris tribuerim difficultati peragendi ſingula ſatis accurate. Difficile erat, tum pendula ſimul demittere ſic, ut corpora in ſe mutuo impingerent in loco infimo *AB*; tum loca *s*, *k* notare, ad quæ corpora aſcendebant poſt concurſum. Sed & in ipſis corporibus pendulis inæqualis partium denſitas, & textura aliis de cauſis irregularis, errores inducebant.



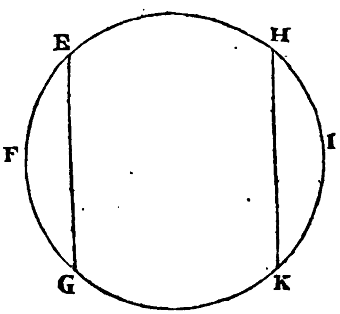
Porro nequis objiciat regulam, ad quam probandam inventum eſt hoc experimentum, præſupponere corpora vel abſolute dura eſſe, vel ſaltem perfecte elaſtica, cujuſmodi nulla reperiuntur in compoſitionibus naturalibus; addo quod experimenta jam deſcripta ſuccedunt in corporibus mollibus æque ac in duris, nimirum a conditione duritiei neutiquam pendentia. Nam ſi regula illa in corporibus non perfecte duris tentanda eſt, debebit ſolummodo reflexio minui in certa proportione pro quantitate vis elaſticæ. In theoria *Wrenni* & *Hugenii* corpora abſolute dura redeunt ab invicem cum velocitate congreſſus. Certius id affirmabitur de perfecte elaſticis. In imperfecte elaſticis velocitas reditus minuenda eſt ſimul cum vi elaſtica; propterea quod vis illa, (niſi ubi partes corporum ex congreſſu læduntur, vel extenſionem aliqualem quaſi ſub malleo patiuntur,) certa ac determinata ſit (quantum ſentio) faciatque ut corpora redeant ab invicem cum velocitate relativa, quæ ſit ad relativam velocitatem concurſus in data ratione. Id in pilis ex

lana

lana arcte conglomerata & fortiter conſtricta ſic tentavi. Primum demittendo pendula & menſurando reflexionem, inveni quantitatem vis elaſticæ; deinde per hanc vim determinavi reflexiones in aliis caſibus concurſuum, & reſpondebant experimenta. Redibant ſemper pilæ ab invicem cum velocitate relativa, quæ eſſet ad velocitatem relativam concurſus ut 5 ad 9 circiter. Eadem fere cum velocitate redibant pilæ ex chalybe: aliæ ex ſubere cum paulo minore: in vitreis autem proportio erat 15 ad 16 circiter. Atque hoc pacto lex tertia quoad ictus & reflexiones per theoriam comprobata eſt, quæ cum experientia plane congruit.

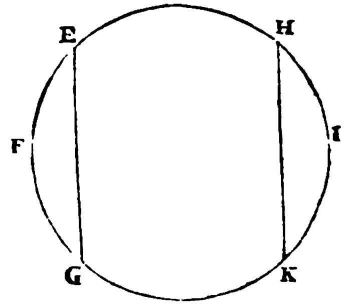
In attractionibus rem ſic breviter oſtendo. Corporibus duobus quibuſvis *A*, *B* ſe mutuo trahentibus, concipe obſtaculum quodvis interponi, quo congreſſus eorum impediatur. Si corpus alterutrum *A* magis trahitur verſus corpus alterum *B*, quam illud alterum *B* in prius *A*, obſtaculum magis urgebitur preſſione corporis *A* quam preſſione corporis *B*; proindeque non manebit in æquilibrio. Prævalebit preſſio fortior, facietque ut ſyſtema corporum duorum & obſtaculi moveatur in directum in partes verſus *B*, motuque in ſpatiis liberis ſemper accelerato abeat in infinitum. Quod eſt abſurdum & legi primæ contrarium. Nam per legem primam debebit ſyſtema perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, proindeque corpora æqualiter urgebunt obſtaculum, & idcirco æqualiter trahentur in invicem. Tentavi hoc in magnete & ferro. Si hæc in vaſculis propriis ſeſe contingentibus ſeorſim poſita, in aqua ſtagnante juxta fluitent; neutrum propellet alterum, ſed æqualitate attractionis utrinque ſuſtinebunt conatus in ſe mutuos, ac tandem in æquilibrio conſtituta quieſcent.

Sic etiam gravitas inter terram & ejus partes mutua eſt. Secetur terra *F I* plano quovis *E G* in partes duas *EGF* & *EGI*: & æqualia erunt harum pondera in ſe mutuo. Nam ſi plano alio *H K* quod priori *E G* parallelum ſit, pars major *EGI* ſecetur in partes duas *EGKH* & *HKI*, quarum *HKI* æqualis ſit parti prius abſciſſæ *E F G*: manifeſtum eſt quod pars media *EGKH* pondere proprio in neutram partium extremarum propendebit, ſed inter utramque in



æqui-

AXIOMATA, SIVE æquilibrio, ut ita dicam, ſuſpendetur, & quieſcet. Pars autem extrema *HKI* toto ſuo pondere incumbet in partem mediam, & urgebit illam in partem alteram extremam *EGF*; ideoque vis qua partium *HKI* & *EGKH* ſumma *EGI* tendit verſus partem tertiam *EGF*, æqualis eſt ponderi partis *HKI*, id eſt ponderi partis tertiæ *EGF*. Et propterea pondera partium duarum *EGI*, *EGF* in ſe mutuo ſunt æqualia, uti volui oſtendere. Et niſi pondera illa æqualia eſſent, terra tota in libero æthere fluitans ponderi majori cederet, & ab eo fugiendo abiret in infinitum.



Ut corpora in concurſu & reflexione idem pollent, quorum velocitates ſunt reciproce ut vires inſitæ: ſic in movendis inſtrumentis mechanicis agentia idem pollent & conatibus contrariis ſe mutuo ſuſtinent, quorum velocitates ſecundum determinationem virium æſtimatæ, ſunt reciproce ut vires. Sic pondera æquipollent ad movenda brachia libræ, quæ oſcillante libra ſunt reciproce ut eorum velocitates ſurſum & deorſum: hoc eſt, pondera, ſi recta aſcendunt & deſcendunt, æquipollent, quæ ſunt reciproce ut punctorum a quibus ſuſpenduntur diſtantiæ ab axe libræ; ſin planis obliquis aliiſve admotis obſtaculis impedita aſcendunt vel deſcendunt oblique, æquipollent, quæ ſunt reciproce ut aſcenſus & deſcenſus, quatenus facti ſecundum perpendiculum: idque ob determinationem gravitatis deorſum. Similiter in trochlea ſeu polyſpaſto vis manus funem directe trahentis, quæ ſit ad pondus vel directe vel oblique aſcendens ut velocitas aſcenſus perpendicularis ad velocitatem manus funem trahentis, ſuſtinebit pondus. In horologiis & ſimilibus inſtrumentis, quæ ex rotulis commiſſis conſtructa ſunt, vires contrariæ ad motum rotularum promovendum & impediendum, ſi ſunt reciproce ut velocitates partium rotularum in quas imprimuntur, ſuſtinebunt ſe mutuo. Vis cochleæ ad premendum corpus eſt ad vim manus manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii ea in parte ubi a manu urgetur, ad velocitatem progreſſivam cochleæ verſus corpus preſſum. Vires quibus Cuneus urget partes duas ligni fiſſi ſunt ad vim mallei in cuneum, ut progreſſus cunei ſecundum determinationem vis a malleo in ipſum impreſſæ,

impreſſæ, ad velocitatem qua partes ligni cedunt cuneo, ſecundum lineas faciebus cunei perpendiculares. Et par eſt ratio machinarum omnium. LEGES MOTUS.

Harum efficacia & uſus in eo ſolo conſiſtit, ut diminuendo velocitatem augeamus vim, & contra: Unde ſolvitur in omni aptorum inſtrumentorum genere problema, *Datum pondus data vi movendi*, aliamve datam reſiſtentiam vi data ſuperandi. Nam ſi machinæ ita formentur, ut velocitates agentis & reſiſtentis ſint reciproce ut vires; agens reſiſtentiam ſuſtinebit: & majori cum velocitatum diſparitate eandem vincet. Certe ſi tanta ſit velocitatum diſparitas, ut vincatur etiam reſiſtentia omnis, quæ tam ex contiguorum & inter ſe labentium corporum attritione, quam ex continuorum & ab invicem ſeparandorum cohæſione & elevandorum ponderibus oriri ſolet; ſuperata omni ea reſiſtentia, vis redundans accelerationem motus ſibi proportionalem, partim in partibus machinæ, partim in corpore reſiſtente producet. Cæterum mechanicam tractare non eſt hujus inſtituti. Hiſce volui tantum oſtendere, quam late pateat quamque certa ſit lex tertia motus. Nam ſi æſtimetur agentis actio ex ejus vi & velocitate conjunctim; & ſimiliter reſiſtentis reactio æſtimetur conjunctim ex ejus partium ſingularum velocitatibus & viribus reſiſtendi ab earum attritione, cohæſione, pondere, & acceleratione oriundis; erunt actio & reactio, in omni inſtrumentorum uſu, ſibi invicem ſemper æquales. Et quatenus actio propagatur per inſtrumentum & ultimo imprimitur in corpus omne reſiſtens, ejus ultima determinatio determinationi reactionis ſemper erit contraria.

DE MOTU CORPORUM LIBER PRIMUS.

SECTIO I.

De methodo rationum primarum & ultimarum, cujus ope ſequentia demonſtrantur.

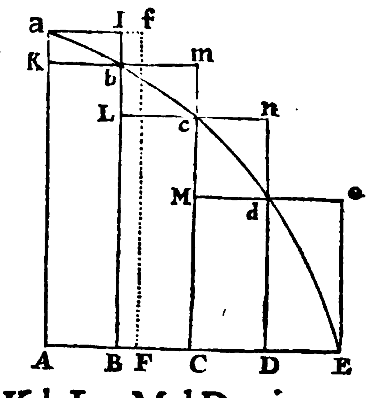
LEMMA I.

Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito conſtanter tendunt, & ante finem temporis illius propius ad invicem accedunt quam pro data quavis differentia, fiunt ultimo æquales.

SI negas; fiant ultimo inæquales, & ſit earum ultima differentia *D*. Ergo nequeunt propius ad æqualitatem accedere quam pro data differentia *D*: contra hypotheſin.

LEMMA II.

Si in figura quavis AacE, *rectis* Aa, AE *& curva* acE *comprehenſa, inſcribantur parallelogramma quotcunque* Ab, Bc, Cd, &c. *ſub baſibus* AB, BC, CD, &c. *æqualibus, & lateribus* Bb, Cc, Dd, &c. *figuræ lateri* Aa *parallelis contenta; & compleantur parallelogramma* aKbl, bLcm, cMdn, &c. *Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, & numerus augeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes quas habent ad ſe invicem figura inſcripta* AKbLcMdD, *circumſcripta*



ſcripta AalbmcndoE, *&* *curvilinea* AabcdE, *ſunt rationes æqualitatis.*

Nam figuræ inſcriptæ & circumſcriptæ differentia eſt ſumma parallelogrammorum *Kl*, *Lm*, *Mn*, *Do*, hoc eſt (ob æquales omnium baſes) rectangulum ſub unius baſi *Kb* & altitudinum ſumma *Aa*, id eſt, rectangulum *ABla*. Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus *AB* in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo (per lemma 1) figura inſcripta & circumſcripta & multo magis figura curvilinea intermedia fiunt ultimo æquales. *Q. E. D.*

LEMMA III.

Eædem rationes ultimæ ſunt etiam rationes æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines AB, BC, CD, &c. *ſunt inæquales, & omnes minuuntur in infinitum.*

Sit enim *AF* æqualis latitudini maximæ, & compleatur parallelogrammum *FAaf*. Hoc erit majus quam differentia figuræ inſcriptæ & figuræ circumſcriptæ; at latitudine ſua *AF* in infinitum diminuta, minus fiet dato quovis rectangulo. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſumma ultima parallelogrammorum evaneſcentium coincidit omni ex parte cum figura curvilinea.

Corol. 2. Et multo magis figura rectilinea, quæ chordis evaneſcentium arcuum *ab*, *bc*, *cd*, &c. comprehenditur, coincidit ultimo cum figura curvilinea.

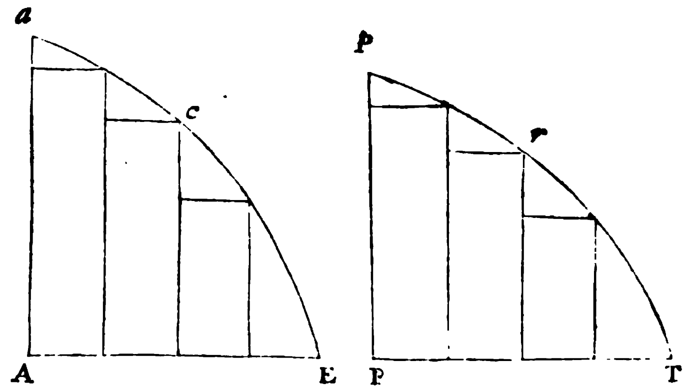
Corol. 3. Ut & figura rectilinea circumſcripta quæ tangentibus eorundem arcuum comprehenditur.

Corol. 4. Et propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros *acE*,) non ſunt rectilineæ, ſed rectilinearum limites curvilinei.

LEMMA IV.

Si in duabus figuris AacE, PprT, *inſcribantur (ut ſupra) duæ parallelogrammorum ſeries, ſitque idem amborum numerus, & ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ parallelogrammorum in una figura ad parallelogramma*

gramma in altera, ſingulorum ad ſingula, ſint eædem; dico quod figuræ duæ AacE, PprT, *ſunt ad invicem in eadem illa ratione.*



Etenim ut ſunt parallelogramma ſingula ad ſingula, ita (componendo) ſit ſumma omnium ad ſummam omnium, & ita figura ad figuram; exiſtente nimirum figura priore (per lemma III) ad ſummam priorem, & figura poſteriore ad ſummam poſteriorem in ratione æqualitatis. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ſi duæ cujuſcunque generis quantitates in eundem partium numerum utcunque dividantur; & partes illæ, ubi numerus earum augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, ſecunda ad ſecundam, cæteræque ſuo ordine ad cæteras: erunt tota ad invicem in eadem illa data ratione. Nam ſi in lemmatis hujus figuris ſumantur parallelogramma inter ſe ut partes, ſummæ partium ſemper erunt ut ſummæ parallelogrammorum; atque ideo, ubi partium & parallelogrammorum numerus augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, in ultima ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id eſt (per hypotheſin) in ultima ratione partis ad partem.

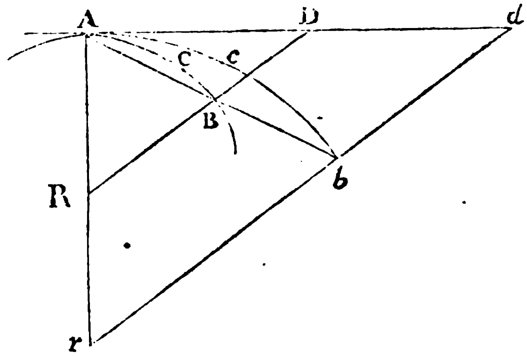
LEMMA V.

Similium figurarum latera omnia, quæ ſibi mutuo reſpondent, ſunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea; & areæ ſunt in duplicata ratione laterum.

LEMMA

LEMMA VI.

Si arcus quilibet poſitione datus ACB *ſubtendatur chorda* AB, *& in puncto aliquo* A, *in medio curvaturæ continuæ, tangatur a recta utrinque producta* AD; *dein puncta* A, B *ad invicem accedant & coëant; dico quod angulus* BAD, *ſub chorda & tangente contentus, minuetur in infinitum & ultimo evaneſcet.*



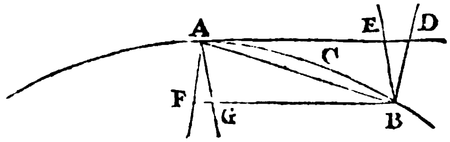
Nam ſi angulus ille non evaneſcit, continebit arcus *ACB* cum tangente *AD* angulum rectilineo æqualem, & propterea curvatura ad punctum *A* non erit continua, contra hypotheſin.

LEMMA VII.

Iiſdem poſitis; dico quod ultima ratio arcus, chordæ, & tangentis ad invicem eſt ratio æqualitatis.

Nam dum punctum *B* ad punctum *A* accedit, intelligantur ſemper *AB* & *AD* ad puncta longinqua *b* ac *d* produci, & ſecanti *BD* parallela agatur *bd*. Sitque arcus *Acb* ſemper ſimilis arcui *ACB*. Et punctis *A*, *B* coeuntibus, angulus *dAb*, per lemma ſuperius, evaneſcet; ideoque rectæ ſemper finitæ *Ab*, *Ad*, & arcus intermedius *Acb* coincident, & propterea æquales erunt. Unde & hiſce ſemper proportionales rectæ *AB*, *AD*, & arcus intermedius *ACB* evaneſcent, & rationem ultimam habebunt æqualitatis. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde ſi per *B* ducatur tangenti parallela *BF*, rectam quamvis *AF* per *A* tranſeuntem perpetuo ſecans in *F*, hæc *BF* ultimo ad arcum evaneſcentem *ACB* rationem habebit æqualitatis, eo quod completo parallelogrammo *AFBD* rationem ſemper habet æqualitatis ad *AD*.



Corol.

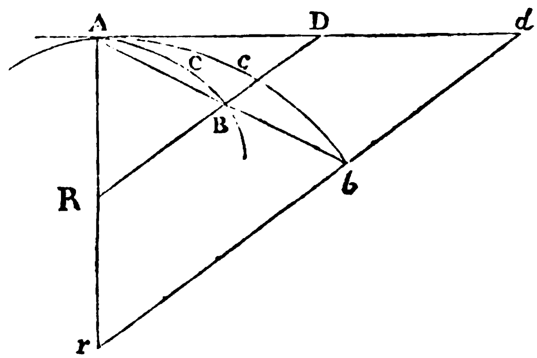
Corol. 2. Et ſi per *B* & *A* ducantur plures rectæ *BE*, *BD*, *AF*, *AG*, ſecantes tangentem *AD* & ipſius parallelam *BF*; ratio ultima abſciſſarum omnium *AD*, *AE*, *BF*, *BG*, chordæque & arcus *AB* ad invicem erit ratio æqualitatis.

Corol. 3. Et propterea hæ omnes lineæ, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro ſe invicem uſurpari poſſunt.

LEMMA VIII.

Si rectæ datæ AR, BR *cum arcu* ACB, *chorda* AB *& tangente* AD, *triangula tria* RAB, RACB, RAD *conſtituunt, dein puncta* A, B *accedunt ad invicem: dico quod ultima forma triangulorum evaneſcentium eſt ſimilitudinis, & ultima ratio æqualitatis.*

Nam dum punctum *B* ad punctum *A* accedit, intelligantur ſemper *AB*, *AD*, *AR* ad puncta longinqua *b*, *d* & *r* produci, ipſique *RD* parallela agi *rbd*, & arcui *ACB* ſimilis ſemper ſit arcus *Acb*. Et coeuntibus punctis *A*, *B*, angulus *bAd* evaneſcet, & propterea triangula tria ſemper finita *rAb*, *rAcb*, *rAd* coincident, ſuntque eo nomine ſimilia & æqualia.



Unde & hiſce ſemper ſimilia & proportionalia *RAB*, *RACB*, *RAD* fient ultimo ſibi invicem ſimilia & æqualia. *Q. E. D.*

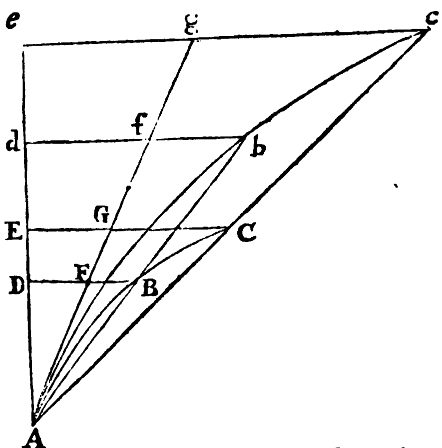
Corol. Et hinc triangula illa, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro ſe invicem uſurpari poſſunt.

LEMMA IX.

Si recta AE *& curva* ABC *poſitione datæ ſe mutuo ſecent in angulo dato* A, *& ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim*

natim applicentur BD, CE, *curvæ occurrentes in* B, C, *dein punƈta* B, C *ſimul accedant ad punƈtum* A: *dico quod areæ triangulorum* ABD, ACE *erunt ultimo ad invicem in duplicata ratione laterum.*

Etenim dum punƈta *B*, *C* accedunt ad punƈtum *A*, intelligatur ſemper *AD* produci ad punƈta longinqua *d* & *e*, ut ſint *A d*, *A e* ipſis *AD*, *A E* proportionales, & erigantur ordinatæ *d b*, *e c* ordinatis *D B*, *E C* parallelæ quæ occurrant ipſis *A B*, *A C* produƈtis in *b* & *c*. Duci intelligatur, tum curva *A b c* ipſi *A B C* ſimilis, tum reƈta *A g*, quæ tangat curvam utramque in *A*, & ſecet ordinatim applicatas *D B*, *E C*, *d b*, *e c* in *F*, *G*, *f*, *g*. Tum manente longitudine *A e* coeant punƈta *B*, *C* cum punƈto *A*; & angulo *c A g* evaneſcente, coincident areæ curvilineæ *A b d*, *A c e* cum reƈtilineis *A f d*, *A g e*; ideoque (per lemma v.) erunt in duplicata ratione laterum *A d*, *A e*: Sed his areis proportionales ſemper ſunt areæ *A B D*, *A C E*, & his lateribus latera *A D*, *A E*. Ergo & areæ *A B D*, *A C E* ſunt ultimo in duplicata ratione laterum *A D*, *A E*. *Q. E. D.*



LEMMA X.

Spatia quæ corpus urgente quacunque vi finita deſcribit, ſive vis illa determinata & immutabilis ſit, ſive eadem continuo augeatur vel continuo diminuatur, ſunt ipſo motus initio in duplicata ratione temporum.

Exponantur tempora per lineas *A D*, *A E*, & velocitates genitæ per ordinatas *D B*, *E C*; & ſpatia his velocitatibus deſcripta, erunt ut areæ *A B D*, *A C E* his ordinatis deſcriptæ, hoc eſt, ipſo motus initio (per lemma IX) in duplicata ratione temporum *A D*, *A E*. *Q. E. D.*

Corol.

Corol. 1. Et hinc facile colligitur, quod corporum ſimiles ſimilium figurarum partes temporibus proportionalibus deſcribentium errores, qui viribus quibuſvis æqualibus ad corpora ſimiliter applicatis generantur, & menſurantur per diſtantias corporum a figurarum ſimilium locis illis, ad quæ corpora eadem temporibus iiſdem proportionalibus ſine viribus iſtis pervenirent, ſunt ut quadrata temporum in quibus generantur quam proxime.

Corol. 2. Errores autem qui viribus proportionalibus ad ſimiles figurarum ſimilium partes ſimiliter applicatis generantur, ſunt ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 3. Idem intelligendum eſt de ſpatiis quibuſvis quæ corpora urgentibus diverſis viribus deſcribunt. Hæc ſunt, ipſo motus initio, ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 4. Ideoque vires ſunt ut ſpatia, ipſo motus initio, deſcripta directe & quadrata temporum inverſe.

Corol. 5. Et quadrata temporum ſunt ut deſcripta ſpatia directe & vires inverſe.

Scholium.

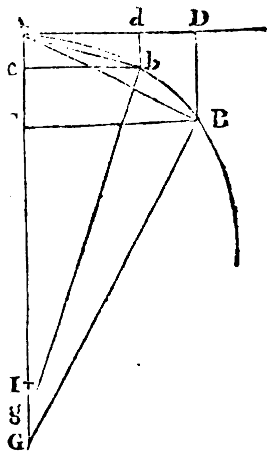
Si quantitates indeterminatæ diverſorum generum conferantur inter ſe, & earum aliqua dicatur eſſe ut eſt alia quævis directe vel inverſe: ſenſus eſt, quod prior augetur vel diminuitur in eadem ratione cum poſteriore, vel cum ejus reciproca. Et ſi earum aliqua dicatur eſſe ut ſunt aliæ duæ vel plures directe vel inverſe: ſenſus eſt, quod prima augetur vel diminuitur in ratione quæ componitur ex rationibus in quibus aliæ vel aliarum reciprocæ augentur vel diminuuntur. Ut ſi A dicatur eſſe ut B directe & C directe & D inverſe: ſenſus eſt, quod A augetur vel diminuitur in eadem ratione cum $B \times C \times \frac{1}{D}$ hoc eſt, quod A & $\frac{BC}{D}$ ſunt ad invicem in ratione data.

LEMMA XI.

Subtenſa evaneſcens anguli contactus, in curvis omnibus curvaturam finitam ad punctum contactus habentibus, eſt ultimo in ratione duplicata ſubtenſæ arcus contermini.

Caſ.

Caſ. 1. Sit arcus ille *AB*, tangens ejus *AD*, ſubtenſa anguli contactus ad tangentem perpendicularis *BD*, ſubtenſa arcus *AB*. Huic ſubtenſæ *AB* & tangenti *AD* perpendiculares erigantur *AG*, *BG*, concurrentes in *G*; dein accedant puncta *D*, *B*, *G*, ad puncta *d*, *b*, *g*, ſitque *J* interſectio linearum *BG*, *AG* ultimo facta ubi puncta *D*, *B* accedunt uſque ad *A*. Manifeſtum eſt quod diſtantia *GJ* minor eſſe poteſt quam aſſignata quævis. Eſt autem (ex natura circulorum per puncta *ABG*, *Abg* tranſeuntium) *AB quad.* æquale *AG* × *BD*, & *Ab quad.* æquale *Ag* × *bd*; ideoque ratio *AB quad.* ad *Ab quad.* componitur ex rationibus *AG* ad *Ag* & *BD* ad *bd*. Sed quoniam *GJ* aſſumi poteſt minor longitudine quavis aſſignata, fieri poteſt ut ratio *AG* ad *Ag* minus differat a ratione æqualitatis quam pro differentia quavis aſſignata, ideoque ut ratio *AB quad.* ad *Ab quad.* minus differat a ratione *BD* ad *bd* quam pro differentia quavis aſſignata. Eſt ergo, per lemma 1, ratio ultima *AB quad.* ad *Ab quad.* eadem cum ratione ultima *BD* ad *bd*. *Q. E. D.*



Caſ. 2. Inclinetur jam *BD* ad *AD* in angulo quovis dato, & eadem ſemper erit ratio ultima *BD* ad *bd* quæ prius, ideoque eadem ac *AB quad.* ad *Ab quad.* *Q. E. D.*

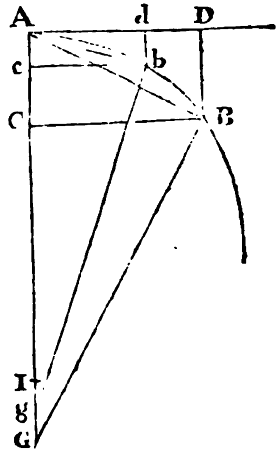
Caſ. 3. Et quamvis angulus *D* non detur, ſed recta *BD* ad datum punctum convergat, vel alia quacunque lege conſtituatur; tamen anguli *D*, *d* communi lege conſtituti ad æqualitatem ſemper vergent & propius accedent ad invicem quam pro differentia quavis aſſignata, ideoque ultimo æquales erunt, per lem. 1, & propterea lineæ *BD*, *bd* ſunt in eadem ratione ad invicem ac prius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde cum tangentes *AD*, *Ad*, arcus *AB*, *Ab*, & eorum ſinus *BC*, *bc* fiant ultimo chordis *AB*, *Ab* æquales; erunt etiam illorum quadrata ultimo ut ſubtenſæ *BD*, *bd*.

Corol. 2. Eorundem quadrata ſunt etiam ultimo ut ſunt arcuum ſagittæ, quæ chordas biſecant & ad datum punctum convergunt. Nam ſagittæ illæ ſunt ut ſubtenſæ *BD*, *bd*.

Corol. 3. Ideoque ſagitta eſt in duplicata ratione temporis quo corpus data velocitate deſcribit arcum.

Corol. 4. Triangula rectilinea *ADB*, *Adb* ſunt ultimo in triplicata ratione laterum *AD*, *Ad*, inque ſeſquiplicata laterum *DB*, *db*; utpote in compoſita ratione laterum *AD* & *DB*, *Ad* & *db* exiſtentia. Sic & triangula *ABC*, *Abc* ſunt ultimo in triplicata ratione laterum *BC*, *bc*. Rationem vero ſeſquiplicatam voco triplicatæ ſubduplicatam, quæ nempe ex ſimplici & ſubduplicata componitur.



Corol. 5. Et quoniam *DB*, *db* ſunt ultimo parallelæ & in duplicata ratione ipſarum *AD*, *Ad*: erunt areæ ultimæ curvilineæ *ADB*, *Adb* (ex natura parabolæ) duæ tertiæ partes triangulorum rectilineorum *ADB*, *Adb*; & ſegmenta *AB*, *Ab* partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ areæ & hæc ſegmenta erunt in triplicata ratione tum tangentium *AD*, *Ad*; tum chordarum & arcuum *AB*, *Ab*.

Scholium.

Cæterum in his omnibus ſupponimus angulum contactus nec infinite majorem eſſe angulis contactuum, quos circuli continent cum tangentibus ſuis, nec iiſdem infinite minorem; hoc eſt, curvaturam ad punctum *A*, nec infinite parvam eſſe nec infinite magnam, ſeu intervallum *AJ* finitæ eſſe magnitudinis. Capi enim poteſt *DB* ut AD^3: quo in caſu circulus nullus per punctum *A* inter tangentem *AD* & curvam *AB* duci poteſt, proindeque angulus contactus erit infinite minor circularibus. Et ſimili argumento ſi fiat *DB* ſucceſſive ut AD^4, AD^5, AD^6, AD^7, &c. habebitur ſeries angulorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet poſterior eſt infinite minor priore. Et ſi fiat *DB* ſucceſſive ut AD^2, $AD^{\frac{3}{2}}$, $AD^{\frac{4}{3}}$, $AD^{\frac{5}{4}}$, $AD^{\frac{6}{5}}$, $AD^{\frac{7}{6}}$, &c. habebitur alia ſeries infinita angulorum contactus, quorum primus eſt ejuſdem generis cum circularibus, ſecundus infinite major, & quilibet poſterior infinite major priore. Sed & inter duos quoſvis ex his angulis poteſt ſeries utrinque in infinitum pergens angulorum intermediorum inſeri, quorum quilibet poſterior erit infinite major minorve priore. Ut ſi inter terminos AD^2 & AD^3 inſeratur ſeries $AD^{\frac{13}{6}}$, $AD^{\frac{11}{5}}$, $AD^{\frac{9}{4}}$,

$AD^{\frac{7}{3}}$, $AD^{\frac{5}{2}}$, $AD^{\frac{8}{3}}$, $AD^{\frac{11}{4}}$, $AD^{\frac{14}{5}}$, $AD^{\frac{17}{6}}$, &c. Et rurſus inter binos quoſvis angulos hujus ſeriei inſeri poteſt ſeries nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium. Neque novit natura limitem.

Quæ de curvis lineis deque ſuperficiebus comprehenſis demonſtrata ſunt, facile applicantur ad ſolidorum ſuperficies curvas & contenta. Præmiſi vero hæc lemmata, ut effugerem tædium deducendi longas demonſtrationes, more veterum geometrarum, ad abſurdum. Contractiores enim redduntur demonſtrationes per methodum indiviſibilium. Sed quoniam durior eſt indiviſibilium hypotheſis, & propterea methodus illa minus geometrica cenſetur; malui demonſtrationes rerum ſequentium ad ultimas quantitatum evaneſcentium ſummas & rationes, primaſque naſcentium, id eſt, ad limites ſummarum & rationum deducere; & propterea limitum illorum demonſtrationes qua potui brevitate præmittere. His enim idem præſtatur quod per methodum indiviſibilium; & principiis demonſtratis jam tutius utemur. Proinde in ſequentibus, ſiquando quantitates tanquam ex particulis conſtantes conſideravero, vel ſi pro rectis uſurpavero lineolas curvas; nolim indiviſibilia, ſed evaneſcentia diviſibilia, non ſummas & rationes partium determinatarum, ſed ſummarum & rationum limites ſemper intelligi; vimque talium demonſtrationum ad methodum præcedentium lemmatum ſemper revocari.

Objectio eſt, quod quantitatum evaneſcentium nulla ſit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non eſt ultima, ubi evanuerunt, nulla eſt. Sed & eodem argumento æque contendi poſſet nullam eſſe corporis ad certum locum, ubi motus finiatur, pervenientis velocitatem ultimam: hanc enim, antequam corpus attingit locum, non eſſe ultimam, ubi attingit, nullam eſſe. Et reſponſio facilis eſt: Per velocitatem ultimam intelligi eam, qua corpus movetur, neque antequam attingit locum ultimum & motus ceſſat, neque poſtea, ſed tunc cum attingit; id eſt, illam ipſam velocitatem quacum corpus attingit locum ultimum & quacum motus ceſſat. Et ſimiliter per ultimam rationem quantitatum evaneſcentium, intelligendam eſſe rationem quantitatum, non antequam evaneſcunt, non poſtea, ſed quacum evaneſcunt. Pariter & ratio prima naſcentium eſt ratio quacum naſcuntur. Et ſumma prima & ultima

eſt

De Motu Corporum

eſt quacum eſſe (vel augeri aut minui) incipiunt & ceſſant. Extat limes quem velocitas in fine motus attingere poteſt, non autem tranſgredi. Hæc eſt velocitas ultima. Et par eſt ratio limitis quantitatum & proportionum omnium incipientium & ceſſantium. Cumque hic limes ſit certus & definitus, problema eſt vere geometricum eundem determinare. Geometrica vero omnia in aliis geometricis determinandis ac demonſtrandis legitime uſurpantur.

Contendi etiam poteſt, quod ſi dentur ultimæ quantitatum evaneſcentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines: & ſic quantitas omnis conſtabit ex indiviſibilibus, contra quam *Euclides* de incommenſurabilibus, in libro decimo elementorum, demonſtravit. Verum hæc objectio falſæ innititur hypotheſi. Ultimæ rationes illæ quibuſcum quantitates evaneſcunt, revera non ſunt rationes quantitatum ultimarum, ſed limites ad quos quantitatum ſine limite decreſcentium rationes ſemper appropinquant; & quas propius aſſequi poſſunt quam pro data quavis differentia, nunquam vero tranſgredi, neque prius attingere quam quantitates diminuuntur in infinitum. Res clarius intelligetur in infinite magnis. Si quantitates duæ quarum data eſt differentia augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis, nec tamen ideo dabuntur quantitates ultimæ ſeu maximæ quarum iſta eſt ratio. In ſequentibus, igitur ſiquando facili rerum conceptui conſulens dixero quantitates quam minimas, vel evaneſcentes, vel ultimas; cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, ſed cogita ſemper diminuendas ſine limite.

SECTIO II.

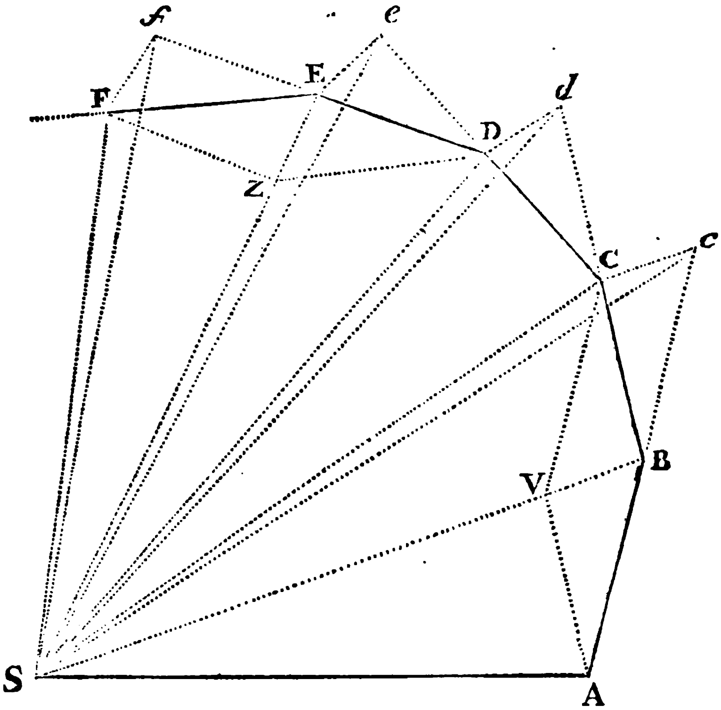
De inventione virium centripetarum.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Areas, quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis deſcribunt, & in planis immobilibus conſiſtere, & eſſe temporibus proportionales.

Dividatur tempus in partes æquales, & prima temporis parte deſcribat corpus vi inſita rectam *AB*. Idem ſecunda temporis parte, ſi nil

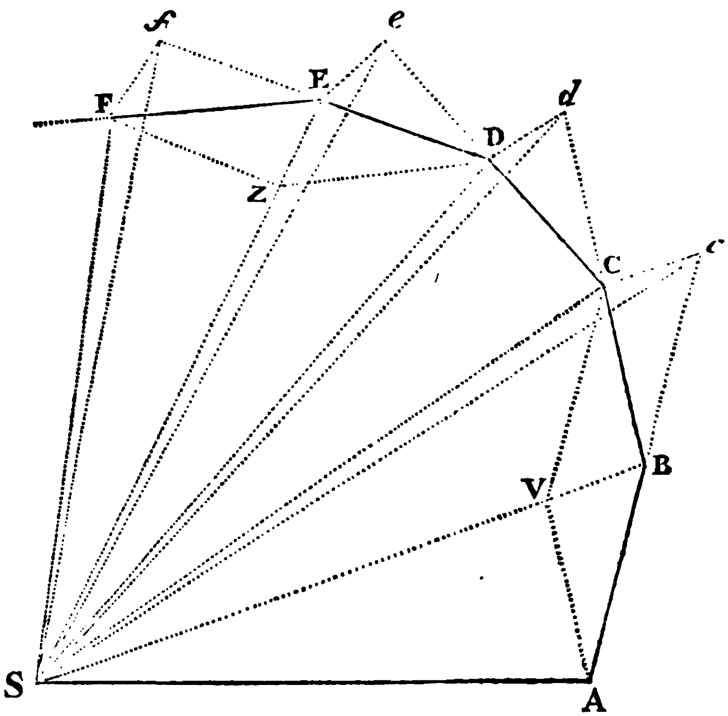
nil impediret, recta pergeret ad *c*, (per leg. 1.) deſcribens lineam *Bc* æqualem ipſi *AB*; adeo ut radiis *AS*, *BS*, *cS* ad centrum actis, confectæ forent æquales areæ *ASB*, *BSc*. Verum ubi corpus venit ad *B*, agat vis centripeta impulſu unico ſed magno, efficiatque ut corpus de recta *Bc* declinet & pergat in recta *BC*. Ipſi *BS* parallela agatur *cC*, occurrens *BC* in *C*; & completa ſecunda temporis parte, corpus (per legum corol. 1.) reperietur in *C*, in eodem plano cum triangulo *ASB*. Junge *SC*; & triangulum *SBC*, ob



parallelas *SB*, *Cc*, æquale erit triangulo *SBc*, atque ideo etiam triangulo *SAB*. Simili argumento ſi vis centripeta ſucceſſive agat in *C*, *D*, *E*, &c. faciens ut corpus ſingulis temporis particulis ſingulas deſcribat rectas *CD*, *DE*, *EF*, &c. jacebunt hæ omnes in eodem plano; & triangulum *SCD* triangulo *SBC*, & *SDE* ipſi *SCD*, & *SEF* ipſi *SDE* æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto deſcribuntur: & componendo, ſunt arearum ſummæ quævis *SADS*, *SAFS* inter ſe, ut ſunt tempora deſcriptionum. Augeatur jam numerus & minuatur latitudo triangulorum in infinitum; & eorum ultima perimeter *ADF*, (per corollarium quartum lemmatis tertii) erit linea curva: ideoque vis centripeta, qua corpus a tangente hujus curvæ perpetuo retrahitur, aget indeſinenter; areæ vero quævis deſcriptæ *SADS*, *SAFS* temporibus deſcriptionum ſemper proportionales, erunt iiſdem temporibus in hoc caſu proportionales. *Q. E. D.*

Corol.

Corol. 1. Velocitas corporis in centrum immobile attracti eſt in ſpatiis non reſiſtentibus reciproce ut perpendiculum a centro illo in orbis tangentem rectilineam demiſſum. Eſt enim velocitas in locis illis *A, B, C, D, E,* ut ſunt baſes æqualium triangulorum *AB, BC, CD, DE, EF*; & hæ baſes ſunt reciproce ut perpendicula in ipſas demiſſa.



Corol. 2. Si arcuum duorum æqualibus temporibus in ſpatiis non reſiſtentibus ab eodem corpore ſucceſſive deſcriptorum chordæ *AB, BC* compleantur in parallelogrammum *ABCV*, & hujus diagonalis *BV* in ea poſitione quam ultimo habet ubi arcus illi in infinitum diminuuntur, producatur utrinque; tranſibit eadem per centrum virium.

Corol. 3. Si arcuum æqualibus temporibus in ſpatiis non reſiſtentibus deſcriptorum chordæ *AB, BC* ac *DE, EF* compleantur in parallelogramma *ABCV, DEFZ*; vires in *B* & *E* ſunt ad invicem in ultima ratione diagonalium *BV, EZ,* ubi arcus iſti in infinitum diminuuntur. Nam corporis motus *BC* & *EF* componuntur (per legum corol. 1.) ex motibus *Bc, BV* & *Ef, EZ:* atqui *BV* & *EZ*, ipſis *Cc* & *Ff* æquales, in demonſtratione propoſitionis hujus generabantur ab impulſibus vis centripetæ in *B* & *E*, ideoque ſunt his impulſibus proportionales.

Corol. 4. Vires quibus corpora quælibet in ſpatiis non reſiſtentibus a motibus rectilineis retrahuntur ac detorquentur in orbes curvos ſunt inter ſe ut arcuum æqualibus temporibus deſcriptorum ſagittæ illæ quæ convergunt ad centrum virium, & chordas biſecant

ubi

ubi arcus illi in infinitum diminuuntur. Nam hæ ſagittæ ſunt ſemiſſes diagonalium, de quibus egimus in corollario tertio.

Corol. 5. Ideoque vires eædem ſunt ad vim gravitatis, ut hæ ſagittæ ad ſagittas horizonti perpendiculares arcuum parabolicorum, quos projectilia eodem tempore deſcribunt.

Corol. 6. Eadem omnia obtinent per legum corol. v. ubi plana, in quibus corpora moventur, una cum centris virium, quæ in ipſis ſita ſunt, non quieſcunt, ſed moventur uniformiter in directum.

PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Corpus omne, quod movetur in linea aliqua curva in plano deſcripta, & radio ducto ad punctum vel immobile, vel motu rectilineo uniformiter progrediens, deſcribit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur a vi centripeta tendente ad idem punctum.

Caſ. 1. Nam corpus omne, quod movetur in linea curva, detorquetur de curſu rectilineo per vim aliquam in ipſum agentem (per leg. 1.) Et vis illa, qua corpus de curſu rectilineo detorquetur, & cogitur triangula quam minima *SAB*, *SBC*, *SCD*, &c. circa punctum immobile *S* temporibus æqualibus æqualia deſcribere, agit in loco *B* ſecundum lineam parallelam ipſi *cC* (per prop. xl. lib. 1. elem. & leg. 11.) hoc eſt, ſecundum lineam *BS*; & in loco *C* ſecundum lineam ipſi *dD* parallelam, hoc eſt, ſecundum lineam *SC*, &c. Agit ergo ſemper ſecundum lineas tendentes ad punctum illud immobile *S*. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Et, per legum corollarium quintum, perinde eſt, ſive quieſcat ſuperficies, in qua corpus deſcribit figuram curvilineam, ſive moveatur eadem una cum corpore, figura deſcripta, & puncto ſuo *S* uniformiter in directum.

Corol. 1. In ſpatiis vel mediis non reſiſtentibus, ſi areæ non ſunt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concurſum radiorum; ſed inde declinant in conſequentia, ſeu verſus plagam in quam fit motus, ſi modo arearum deſcriptio acceleratur: ſin retardatur, declinant in antecedentia.

Corol. 2. In mediis etiam reſiſtentibus, ſi arearum deſcriptio acceleratur, virium directiones declinant a concurſu radiorum verſus plagam, in quam fit motus.

Scholium.

Urgeri poteſt corpus a vi centripeta compoſita ex pluribus viribus. In hoc caſu ſenſus propoſitionis eſt, quod vis illa quæ ex omnibus componitur, tendit ad punctum *S*. Porro ſi vis aliqua agat perpetuo ſecundum lineam ſuperficiei deſcriptæ perpendicularem; hæc faciet ut corpus deflectatur a plano ſui motus: ſed quantitatem ſuperficiei deſcriptæ nec augebit nec minuet, & propterea in compoſitione virium negligenda eſt.

PROPOSITIO III. THEOREMA III.

Corpus omne, quod radio ad centrum corporis alterius utcunque moti ducto deſcribit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi compoſita ex vi centripeta tendente ad corpus illud alterum, & ex vi omni acceleratrice qua corpus illud alterum urgetur.

Sit corpus primum *L*, & corpus alterum *T*: & (per legum corol. vi.) ſi vi nova, quæ æqualis & contraria ſit illi, qua corpus alterum *T* urgetur, urgeatur corpus utrumque ſecundum lineas parallelas; perget corpus primum *L* deſcribere circa corpus alterum *T* areas eaſdem ac prius: vis autem, qua corpus alterum *T* urgebatur, jam deſtruetur per vim ſibi æqualem & contrariam; & propterea (per leg. 1.) corpus illud alterum *T* ſibimet ipſi jam relictum vel quieſcet, vel movebitur uniformiter in directum: & corpus primum *L* urgente differentia virium, id eſt, urgente vi reliqua perget areas temporibus proportionales circa corpus alterum *T* deſcribere. Tendit igitur (per theor. 11.) differentia virium ad corpus illud alterum *T* ut centrum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi corpus unum *L* radio ad alterum *T* ducto deſcribit areas temporibus proportionales; atque de vi tota (ſive ſimplici, ſive ex viribus pluribus juxta legum corollarium ſecundum

compoſita,)

compoſita) qua corpus prius L urgetur, ſubducatur (per idem legum corollarium) vis tota acceleratrix, qua corpus alterum urgetur: vis omnis reliqua, qua corpus prius urgetur, tendet ad corpus alterum T ut centrum.

Corol. 2. Et, ſi areæ illæ ſunt temporibus quamproxime proportionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum T quamproxime.

Corol. 3. Et vice verſa, ſi vis reliqua tendit quamproxime ad corpus alterum T, erunt areæ illæ temporibus quamproxime proportionales.

Corol. 4. Si corpus L radio ad alterum corpus T ducto deſcribit areas, quæ cum temporibus collatæ ſunt valde inæquales; & corpus illud alterum T vel quieſcit, vel movetur uniformiter in directum: actio vis centripetæ ad corpus illud alterum T tendentis vel nulla eſt, vel miſcetur & componitur cum actionibus admodum potentibus aliarum virium: viſque tota ex omnibus, ſi plures ſunt vires, compoſita ad aliud (ſive immobile ſive mobile) centrum dirigitur. Idem obtinet, ubi corpus alterum motu quocunque movetur; ſi modo vis centripeta ſumatur, quæ reſtat poſt ſubductionem vis totius in corpus illud alterum T agentis.

Scholium.

Quoniam æquabilis arearum deſcriptio index eſt centri, quod vis illa reſpicit, qua corpus maxime afficitur, quaque retrahitur a motu rectilineo, & in orbita ſua retinetur; quidni uſurpemus in ſequentibus æquabilem arearum deſcriptionem ut indicem centri, circum quod motus omnis circularis in ſpatiis liberis peragitur?

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

Corporum, quæ diverſos circulos æquabili motu deſcribunt, vires centripetas ad centra eorundem circulorum tendere; & eſſe inter ſe, ut ſunt arcuum ſimul deſcriptorum quadrata applicata ad circulorum radios.

Tendunt hæ vires ad centra circulorum per prop. 11. & corol. 2. prop. 1. & ſunt inter ſe ut arcuum æqualibus temporibus quam minimis

nimis deſcriptorum ſinus verſi per corol. 4. prop. 1. hoc eſt, ut quadrata arcuum eorundem ad diametros circulorum applicata per lem. vii. & propterea, cum hi arcus ſint ut arcus temporibus quibuſvis æqualibus deſcripti, & diametri ſint ut eorum radii; vires erunt ut arcuum quorumvis ſimul deſcriptorum quadrata applicata ad radios circulorum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Cum arcus illi ſint ut velocitates corporum, vires centripetæ erunt in ratione compoſita ex duplicata ratione velocitatum directe, & ratione ſimplici radiorum inverſe.

Corol. 2. Et, cum tempora periodica ſint in ratione compoſita ex ratione radiorum directe, & ratione velocitatum inverſe; vires centripetæ ſunt in ratione compoſita ex ratione radiorum directe, & ratione duplicata temporum periodicorum inverſe.

Corol. 3. Unde ſi tempora periodica æquentur, & propterea velocitates ſint ut radii; erunt etiam vires centripetæ ut radii: & contra.

Corol. 4. Si & tempora periodica, & velocitates ſint in ratione ſubduplicata radiorum; æquales erunt vires centripetæ inter ſe: & contra.

Corol. 5. Si tempora periodica ſint ut radii, & propterea velocitates æquales; vires centripetæ erunt reciproce ut radii: & contra.

Corol. 6. Si tempora periodica ſint in ratione ſeſquiplicata radiorum, & propterea velocitates reciproce in radiorum ratione ſubduplicata; vires centripetæ erunt reciproce ut quadrata radiorum: & contra.

Corol. 7. Et univerſaliter, ſi tempus periodicum ſit ut radii R poteſtas quælibet R^n, & propterea velocitas reciproce ut radii poteſtas R^{n-1}; erit vis centripeta reciproce ut radii poteſtas R^{2n-1}: & contra.

Corol. 8. Eadem omnia de temporibus, velocitatibus, & viribus, quibus corpora ſimiles figurarum quarumcunque ſimilium, centraque in figuris illis ſimiliter poſita habentium, partes deſcribunt, conſequuntur ex demonſtratione præcedentium ad hoſce caſus applicata. Applicatur autem ſubſtituendo æquabilem arearum deſcriptionem pro æquabili motu, & diſtantias corporum a centris pro radiis uſurpando.

Corol. 9. Ex eadem demonſtratione conſequitur etiam; quod arcus, quem corpus in circulo data vi centripeta uniformiter revolvendo

vendo tempore quovis deſcribit, medius eſt proportionalis inter diametrum circuli, & deſcenſum corporis eadem data vi eodemque tempore cadendo confectum.

Scholium.

Caſus corollarii ſexti obtinet in corporibus cœleſtibus, (ut ſeorſum collegerunt etiam noſtrates *Wrennus*, *Hookius* & *Halleus*) & propterea quæ ſpectant ad vim centripetam decreſcentem in duplicata ratione diſtantiarum a centris, decrevi fuſius in ſequentibus exponere.

Porro præcedentis propoſitionis & corollariorum ejus beneficio, colligitur etiam proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam, qualis eſt ea gravitatis. Nam ſi corpus in circulo terræ concentrico vi gravitatis ſuæ revolvatur, hæc gravitas eſt ipſius vis centripeta. Datur autem ex deſcenſu gravium & tempus revolutionis unius, & arcus dato quovis tempore deſcriptus, per hujus corol. ix. Et hujuſmodi propoſitionibus *Hugenius* in eximio ſuo tractatu *de Horologio Oſcillatorio* vim gravitatis cum revolventium viribus centrifugis contulit.

Demonſtrari etiam poſſunt præcedentia in hunc modum. In circulo quovis deſcribi intelligatur polygonum laterum quotcunque. Et ſi corpus in polygoni lateribus data cum velocitate movendo ad ejus angulos ſingulos a circulo reflectatur; vis, qua ſingulis reflexionibus impingit in circulum, erit ut ejus velocitas: ideoque ſumma virium in dato tempore erit ut velocitas illa, & numerus reflexionum conjunctim: hoc eſt (ſi polygonum detur ſpecie) ut longitudo dato illo tempore deſcripta, & aucta vel diminuta in ratione longitudinis ejuſdem ad circuli prædicti radium; id eſt, ut quadratum longitudinis illius applicatum ad radium: ideoque, ſi polygonum lateribus infinite diminutis coincidat cum circulo, ut quadratum arcus dato tempore deſcripti applicatum ad radium. Hæc eſt vis centrifuga, qua corpus urget circulum; & huic æqualis eſt vis contraria, qua circulus continuo repellit corpus centrum verſus.

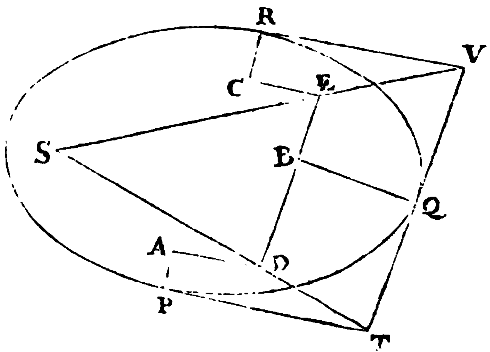
PROPOSITIO

PROPOSITIO V. PROBLEMA I.

Data quibuſcunque in locis velocitate, qua corpus figuram datam viribus ad commune aliquod centrum tendentibus deſcribit, centrum illud invenire.

Figuram deſcriptam tangant rectæ tres *PT*, *TQV*, *VR* in punctis totidem *P*, *Q*, *R*, concurrentes in *T* & *V*. Ad tangentes eriganṫur perpendicula *PA*, *QB*, *RC* velocitatibus corporis in punctis illis *P*, *Q*, *R*, a quibus eriguntur, reciproce proportionalia; id eſt, ita ut ſit *PA* ad *QB* ut velocitas in *Q* ad velocitatem in *P*, & *QB* ad *RC* ut velocitas in *R* ad velocitatem in *Q*. Per perpendiculorum terminos *A*, *B*, *C* ad angulos rectos ducantur *AD*, *DBE*, *EC* concurrentes in *D* & *E*: Et actæ *TD*, *VE* concurrent in centro quæſito *S*.

Nam perpendicula a centro *S* in tangentes *PT*, *QT* demiſſa (per corol. 1. prop. 1.) ſunt reciproce ut velocitates corporis in punctis *P* & *Q*; ideoque per conſtructionem ut perpendicula *AP*, *BQ* directe, id eſt ut perpendicula a puncto *D* in tangentes demiſſa. Unde facile colligitur quod puncta *S*, *D*, *T* ſunt in una recta. Et ſimili argumento puncta *S*, *E*, *V* ſunt etiam in una recta; & propterea centrum *S* in concurſu rectarum *TD*, *VE* verſatur. *Q. E. D.*



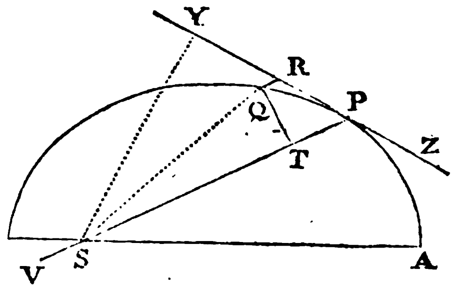
PROPOSITIO VI. THEOREMA V.

Si corpus in ſpatio non reſiſtente circa centrum immobile in orbe quocunque revolvatur, & arcum quemvis jamjam naſcentem tempore quam minimo deſcribat, & ſagitta arcus duci intelligatur, quæ chordam biſecet, & producta tranſeat per

per centrum virium: erit vis centripeta in medio arcus, ut
ſagitta directe & tempus bis inverſe.

Nam ſagitta dato tempore eſt ut vis (per corol. 4. prop. I.) & augendo tempus in ratione quavis, ob auctum arcum in eadem ratione ſagitta augetur in ratione illa duplicata (per corol. 2 & 3, lem. XI.) ideoque eſt ut vis ſemel & tempus bis. Subducatur duplicata ratio temporis utrinque, & fiet vis ut ſagitta directe & tempus bis inverſe. *Q. E. D.*

Idem facile demonſtratur etiam per corol. 4. lem. X.



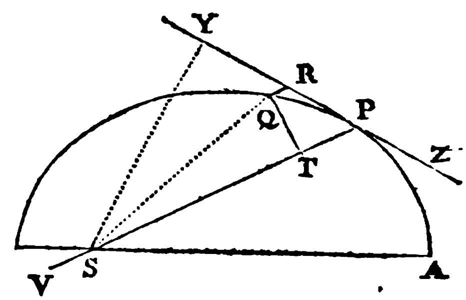
Corol. 1. Si corpus *P* revolvendo circa centrum *S* deſcribat lineam curvam *APQ*; tangat vero recta *ZPR* curvam illam in puncto quovis *P*, & ad tangentem ab alio quovis curvæ puncto *Q* agatur *QR* diſtantiæ *SP* parallela, ac demittatur *QT* perpendicularis ad diſtantiam illam *SP*: vis centripeta erit reciproce ut ſolidum $\frac{SP\ quad. \times QT\ quad.}{QR}$; ſi modo ſolidi illius ea ſemper ſumatur quantitas, quæ ultimo fit, ubi coeunt puncta *P* & *Q*. Nam *QR* æqualis eſt ſagittæ dupli arcus *QP*, in cujus medio eſt *P*, & duplum trianguli *SQP* ſive *SP* × *QT*, tempori, quo arcus iſte duplus deſcribitur, proportionale eſt; ideoque pro temporis exponente ſcribi poteſt.

Corol. 2. Eodem argumento vis centripeta eſt reciproce ut ſolidum $\frac{SY q \times QP q}{QR}$, ſi modo *SY* perpendiculum ſit a centro virium in orbis tangentem *PR* demiſſum. Nam rectangula *SY* × *QP* & *SP* × *QT* æquantur.

Corol. 3. Si orbis vel circulus eſt, vel circulum concentrice tangit, aut concentrice ſecat, id eſt, angulum contactus aut ſectionis cum circulo quam minimum continet, eandem habens curvaturam eundemque radium curvaturæ ad punctum *P*; & ſi *PV* chorda ſit circuli hujus a corpore per centrum virium acta: erit vis centripeta reciproce ut ſolidum $SYq \times PV$. Nam *PV* eſt $\frac{QPq}{QR}$.

Corol.

Corol. 4. Iiſdem poſitis, eſt vis centripeta ut velocitas bis directe, & chorda illa inverſe. Nam velocitas eſt reciproce ut perpendiculum *ST* per corol. 1. prop. 1.

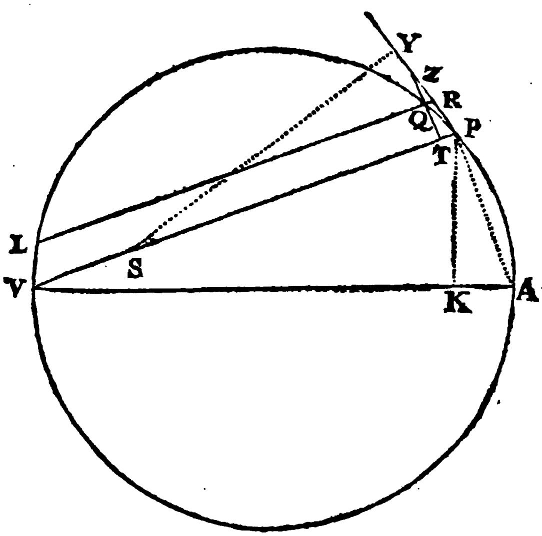


Corol. 5. Hinc ſi detur figura quævis curvilinea *APQ*, & in ea detur etiam punctum *S*, ad quod vis centripeta perpetuo dirigitur, inveniri poteſt lex vis centripetæ, qua corpus quodvis *P* a curſu rectilineo perpetuo retractum in figuræ illius perimetro detinebitur, eamque revolvendo deſcribet. Nimirum computandum eſt vel ſolidum $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ vel ſolidum $STq \times PV$ huic vi reciproce proportionale. Ejus rei dabimus exempla in problematis ſequentibus.

PROPOSITIO VII. PROBLEMA II.

Gyretur corpus in circumferentia circuli, requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum.

Eſto circuli circumferentia *VQPA*; punctum datum, ad quod vis ceu ad centrum ſuum tendit, *S*; corpus in circumferentia latum *P*; locus proximus, in quem movebitur *Q*; & circuli tangens ad locum priorem *PRZ*. Per punctum *S* ducatur chorda *PV*; & acta circuli diametro *VA*, jungatur *AP*; & ad *SP* demittatur perpendiculum *QT*, quod productum occurrat tangenti *PR* in *Z*; ac denique per punctum *Q* agatur *LR*, quæ ipſi *SP* parallella ſit, & occurrat tum circulo in *L*, tum tangenti *PZ* in *R*. Et ob ſimilia triangula *ZQR*, *ZTP*, *VPA*; erit *RP quad.* hoc eſt *QRL* ad *QT quad.*



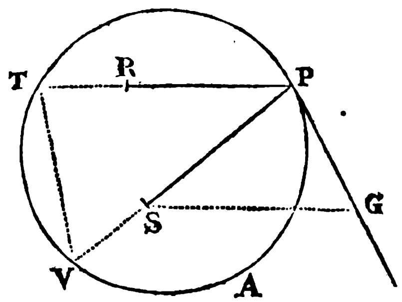
QT *quad.* ut AV *quad.* ad PV *quad.* Ideoque $\frac{QRL \times PV \text{ quad.}}{AV \text{ quad.}}$ æquatur QT *quad.* Ducantur hæc æqualia in $\frac{SP \text{ quad.}}{QR}$, & punctis P & Q coeuntibus ſcribatur PV pro RL. Sic fiet $\frac{SP \text{ quad.} \times PV \text{ cub.}}{AV \text{ quad.}}$ æquale $\frac{SP \text{ quad.} \times QT \text{ quad.}}{QR}$. Ergo (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta eſt reciproce ut $\frac{SPq \times PV \text{ cub.}}{AV \text{ quad.}}$; id eſt (ob datum AV *quad.*) reciproce ut quadratum diſtantiæ ſeu altitudinis SP & cubus chordæ PV conjunctim. *Q. E. I.*

Idem aliter.

Ad tangentem PR productam demittatur perpendiculum SY: & ob ſimilia triangula SYP, VPA; erit AV ad PV ut SP ad SY: ideoque $\frac{SP \times PV}{AV}$ æquale SY, & $\frac{SP \text{ quad.} \times PV \text{ cub.}}{AV \text{ quad.}}$ æquale SY *quad.* $\times PV$. Et propterea (per. corol. 3. & 5. prop. VI.) vis centripeta eſt reciproce ut $\frac{SPq \times PV \text{ cub.}}{AVq}$, hoc eſt, ob datam AV reciproce ut $SPq \times PV$ *cub.* *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc ſi punctum datum S, ad quod vis centripeta ſemper tendit, locetur in circumferentia hujus circuli, puta ad V; erit vis centripeta reciproce ut quadrato-cubus altitudinis SP.

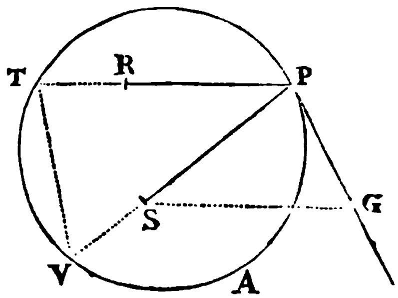
Corol. 2. Vis, qua corpus P in circulo $APTV$ circum virium centrum S revolvitur, eſt ad vim, qua corpus idem P in eodem circulo & eodem tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum R revolvi poteſt, ut RP *quad.* $\times SP$ ad cubum rectæ SG, quæ a primo virium centro S ad orbis tangentem PG ducitur, & diſtantiæ corporis à ſecundo virium centro parallela eſt.



Nam per conſtructionem hujus propoſitionis vis prior eſt ad vim poſteriorem ut $RPq \times PT$ *cub.* ad $SPq \times PV$ *cub.*

id eſt, ut $SP \times RPq$ ad $\frac{SP\ cub. \times PV\ cub.}{PT\ cub.}$, ſive (ob ſimilia triangula *PSG*, *TPV*) ad *SG cub.*

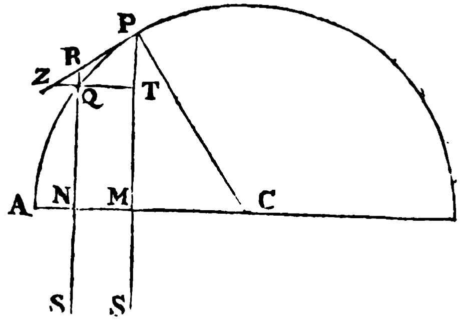
Corol. 3. Vis, qua corpus *P* in orbe quocunque circum virium centrum *S* revolvitur, eſt ad vim, qua corpus idem *P* in eodem orbe eodemque tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum *R* revolvi poteſt, ut $SP \times RPq$, contentum utique ſub diſtantia corporis a primo virium centro *S* & quadrato diſtantiæ ejus a ſecundo virium centro *R*, ad cubum rectæ *SG*, quæ a primo virium centro *S* ad orbis tangentem *PG* ducitur, & corporis a ſecundo virium centro diſtantiæ *RP* parallela eſt. Nam vires in hoc orbe ad ejus punctum quodvis *P* eædem ſunt ac in circulo ejuſdem curvaturæ.



PROPOSITIO VIII. PROBLEMA III.

Moveatur corpus in ſemicirculo PQA: *ad hunc effectum requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeo longinquum* S, *ut lineæ omnes* PS, RS *ad id ductæ, pro parallelis haberi poſſint.*

A ſemicirculi centro *C* agatur ſemidiameter *CA* parallelas iſtas perpendiculariter ſecans in *M* & *N*, & jungatur *CP*. Ob ſimilia triangula *CPM*, *PZT* & *RZQ* eſt *CPq* ad *PMq* ut *PRq* ad *QTq*, & ex natura circuli *PRq* æquale eſt rectangulo $QR \times \overline{RN + QN}$, ſive coeuntibus punctis *P* & *Q* rectangulo $QR \times 2PM$. Ergo eſt *CPq* ad *PM quad.* ut $QR \times 2PM$ ad *QT quad.* ideoque $\frac{QT\ quad.}{QR}$ æquale $\frac{2PM\ cub.}{CP\ quad.}$, & $\frac{QT\ quad. \times SP\ quad.}{QR}$ æquale $\frac{2PM\ cub. \times SP\ quad.}{CP\ quad.}$



Eſt

Eſt ergo (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2PM\,cub. \times SP\,quad.}{CP\,quad.}$, hoc eſt (neglecta ratione determinata $\frac{2SP\,quad.}{CP\,quad.}$) reciproce ut $PM\,cub.$ *Q. E. I.*

Idem facile colligitur etiam ex propoſitione præcedente.

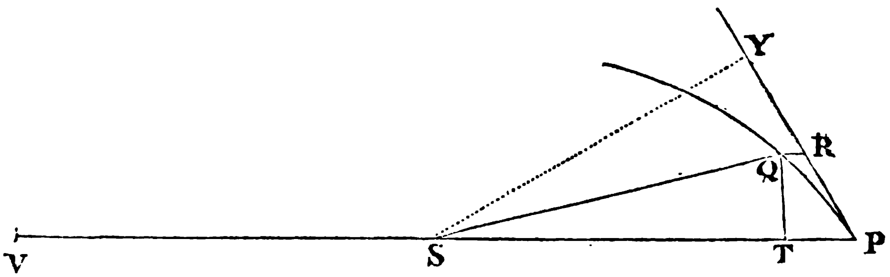
Scholium.

Et argumento haud multum diſſimili corpus invenietur moveri in ellipſi, vel etiam in hyperbola vel parabola, vi centripeta, quæ ſit reciproce ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium maxime longinquum tendentis.

PROPOSITIO IX. PROBLEMA IV.

Gyretur corpus in ſpirali PQS *ſecante radios omnes* SP, SQ, *&c. in angulo dato: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum ſpiralis.*

Detur angulus indefinite parvus PSQ, & ob datos omnes an-



gulos dabitur ſpecie figura $SPRQT$. Ergo datur ratio $\frac{QT}{QR}$, eſtque $\frac{QT\,quad.}{QR}$ ut QT, hoc eſt (ob datam ſpecie figuram illam) ut SP. Mutetur jam utcunque angulus PSQ, & recta QR angulum contactus QPR ſubtendens mutabitur (per lemma XI.) in duplicata ratione ipſius PR vel QT. Ergo manebit $\frac{QT\,quad.}{QR}$ eadem quæ prius, hoc eſt ut SP. Quare $\frac{QTq \times SPq}{QR}$ eſt ut $SP\,cub.$ ideoque (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta eſt reciproce ut cubus diſtantiæ SP. *Q. E. I.*

Idem aliter.

Perpendiculum ST in tangentem demiſſum, & circuli ſpiralem concentrice ſecantis chorda PV ſunt ad altitudinem SP in datis rationibus; ideoque SP *cub.* eſt ut $STq \times PV$, hoc eſt (per corol. 3. & 5. prop. VI.) reciproce ut vis centripeta.

LEMMA XII.

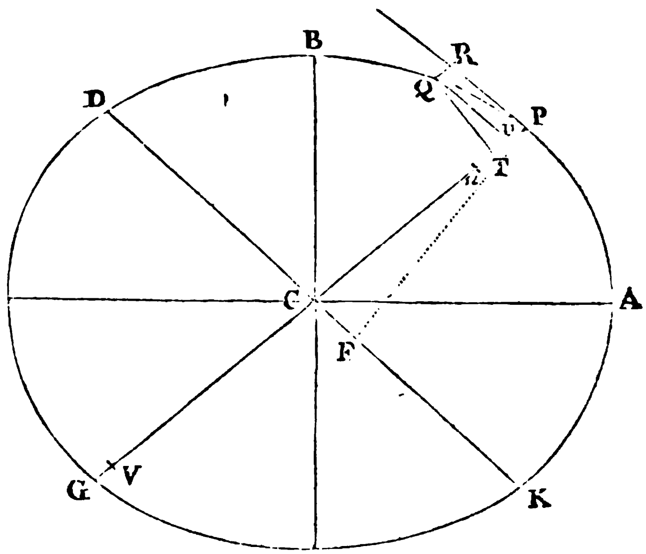
Parallelogramma omnia circa datæ ellipſeos vel hyperbolæ diametros quaſvis conjugatas deſcripta eſſe inter ſe æqualia.

Conſtat ex conicis.

PROPOSITIO X. PROBLEMA V.

Gyretur corpus in ellipſi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum ellipſeos.

Sunto CA, CB ſemiaxes ellipſeos; GP, DK diametri aliæ conjugatæ; PF, QT perpendicula ad diametros; Qv ordinatim applicata ad diametrum GP; & ſi compleatur parallelogrammum $QvPR$, erit (ex conicis) rectangulum PvG ad Qv *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & (ob ſimilia triangula QvT, PCF) Qv *quad.* eſt ad QT *quad.* ut PC *quad.* ad PF *quad.* & conjunctis rationibus, rectangulum PvG ad



QT *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & PC *quad.* ad PF *quad.* id eſt, vG ad $\frac{QT\ quad.}{Pv}$ ut PC *quad.* ad $\frac{CDq \times PFq}{PCq}$. Scribe QR pro

Pv,

Pv, & (per lemma XII.) $BC \times CA$ pro $CD \times PF$, nec non (punctis P & Q coeuntibus) $2PC$ pro vG, & ductis extremis & mediis in ſe mutuo fiet $\frac{QT\ quad. \times PCq}{QR}$ æquale $\frac{2\,BCq \times CAq}{PC}$. Eſt ergo (per corol. 5. prop. VI.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2\,BCq \times CAq}{PC}$; id eſt (ob datum $2\,BCq \times CAq$) reciproce ut $\frac{1}{PC}$; hoc eſt, directe ut diſtantia PC. *Q. E. I.*

Idem aliter.

In recta PG ab altera parte puncti T ſumatur punctum u ut Tu ſit æqualis ipſi Tv; deinde cape uV, quæ ſit ad vG ut eſt DC *quad.* ad PC *quad.* Et quoniam ex conicis eſt Qv *quad.* ad PvG ut DC *quad.* ad PC *quad.* erit Qv *quad.* æquale $Pv \times uV$. Adde rectangulum uPv utrinque, & prodibit quadratum chordæ arcus PQ æquale rectangulo VPv; ideoque circulus, qui tangit ſectionem conicam in P & tranſit per punctum Q, tranſibit etiam per punctum V. Coeant puncta P & Q, & ratio uV ad vG, quæ eadem eſt cum ratione DCq ad PCq, fiet ratio PV ad PG ſeu PV ad $2PC$; ideoque PV æqualis erit $\frac{2\,DCq}{PC}$. Proinde vis, qua corpus P in ellipſi revolvitur, erit reciproce ut $\frac{2\,DCq}{PC}$ in PFq (per corol. 3. prop. VI.) hoc eſt (ob datum $2\,DCq$ in PFq) directe ut PC. *Q. E. I.*

Corol. 1. Eſt igitur vis ut diſtantia corporis a centro ellipſeos: & viciſſim, ſi vis ſit ut diſtantia, movebitur corpus in ellipſi centrum habente in centro virium, aut forte in circulo, in quem utique ellipſis migrare poteſt.

Corol. 2. Et æqualia erunt revolutionum in ellipſibus univerſis circum centrum idem factarum periodica tempora. Nam tempora illa in ellipſibus ſimilibus æqualia ſunt (per corol. 3. & 8. prop. IV.) in ellipſibus autem communem habentibus axem majorem ſunt ad invicem ut ellipſeon areæ totæ directe, & arearum particulæ ſimul deſcriptæ inverſe; id eſt, ut axes minores directe, & corporum velocitates in verticibus principalibus inverſe; hoc eſt, ut axes illi minores

minores directe, & ordinatim applicatæ ad idem punctum axis communis inverſe; & propterea (ob æqualitatem rationum directarum & inverſarum) in ratione æqualitatis.

Scholium.

Si ellipſis centro in infinitum abeunte vertatur in parabolam, corpus movebitur in hac parabola; & vis ad centrum infinite diſtans jam tendens evadet æquabilis. Hoc eſt theorema *Galilæi*. Et ſi coni ſectio parabolica (inclinatione plani ad conum ſectum mutata) vertatur in hyperbolam, movebitur corpus in hujus perimetro vi centripeta in centrifugam verſa. Et quemadmodum in circulo vel ellipſi ſi vires tendunt ad centrum figuræ in abſciſſa poſitum; hæ vires augendo vel diminuendo ordinatas in ratione quacunque data, vel etiam mutando angulum inclinationis ordinatarum ad abſciſſam, ſemper augentur vel diminuuntur in ratione diſtantiarum a centro, ſi modo tempora periodica maneant æqualia; ſic etiam in figuris univerſis ſi ordinatæ augeantur vel diminuantur in ratione quacunque data, vel angulus ordinationis utcunque mutetur, manente tempore periodico; vires ad centrum quodcunque in abſciſſa poſitum tendentes in ſingulis ordinatis augentur vel diminuuntur in ratione diſtantiarum a centro.

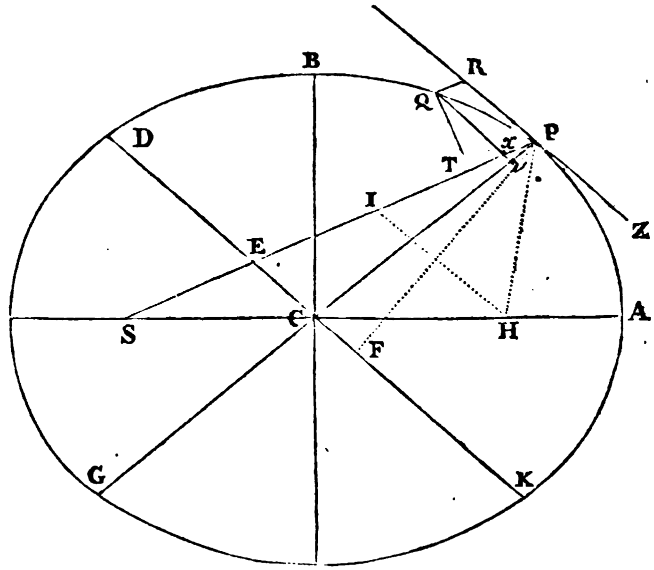
SECTIO III.

De motu corporum in conicis ſectionibus excentricis.

PROPOSITIO XI. PROBLEMA VI.

Revolvatur corpus in ellipſi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum ellipſeos.

Eſto ellipſeos umbilicus *S*. Agatur *SP* ſecans ellipſeos tum diametrum *DK* in *E*, tum ordinatim applicatam *Qv* in *x*, & compleatur parallelogrammum *QxPR*. Patet *EP* æqualem eſſe ſemiaxi majori *AC*, eo quod, acta ab altero ellipſeos umbilico *H* linea *HI* ipſi *EC* parallela, ob æquales *CS*, *CH* æquentur *ES*, *EI*, adeo



adeo ut EP ſemiſumma ſit ipſarum PS, PI, id eſt (ob parallelas HI, PR, & angulos æquales IPR, HPZ) ipſarum PS, PH, quæ conjunctim axem totum $2AC$ adæquant. Ad SP demittatur perpendicularis QT, & ellipſeos latere recto principali (ſeu $\frac{2BC\,quad.}{AC}$) dicto L, erit $L\times QR$ ad $L\times Pv$ ut QR ad Pv, id eſt, ut PE ſeu AC ad PC; & $L\times Pv$ ad GvP ut L ad Gv; & GvP ad Qv *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & (per corol. 2. lem. VII.) Qv *quad.* ad Qx *quad.* punctis Q & P coeuntibus eſt ratio æqualitatis; & Qx *quad.* ſeu Qv *quad.* eſt ad QT *quad.* ut EP *quad.* ad PF *quad.* id eſt, ut CA *quad.* ad PF *quad.* ſive (per lem. XII.) ut CD *quad.* ad CB *quad.* Et conjunctis his omnibus rationibus, $L\times QR$ fit ad QT *quad.* ut $AC\times L\times PCq\times CDq$, ſeu $2CBq\times PCq\times CDq$ ad $PC\times Gv \times CDq\times CBq$, ſive ut $2PC$ ad Gv. Sed punctis Q & P coeuntibus æquantur $2PC$ & Gv. Ergo & his proportionalia $L\times QR$ & QT *quad.* æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet $L\times SPq$ æquale $\frac{SPq\times QTq}{QR}$. Ergo (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta reciproce eſt ut $L\times SPq$, id eſt, reciproce in ratione duplicata diſtantiæ SP. *Q. E. I.*

Idem aliter.

Cum vis ad centrum ellipſeos tendens, qua corpus P in ellipſi illa revolvi poteſt, ſit (per corol. 1. prop. X.) ut CP diſtantia corporis ab ellipſeos centro C; ducatur CE parallela ellipſeos tangenti

PR

PR; & vis, qua corpus idem P circum aliud quodvis ellipſeos punctum S revolvi poteſt, ſi CE & PS concurrant in E, erit ut $\frac{PE\ cub.}{SPq}$ (per corol. 3. prop. VII.) hoc eſt, ſi punctum S ſit umbilicus ellipſeos, ideoque PE detur, ut SPq reciproce. *Q. E. I.*

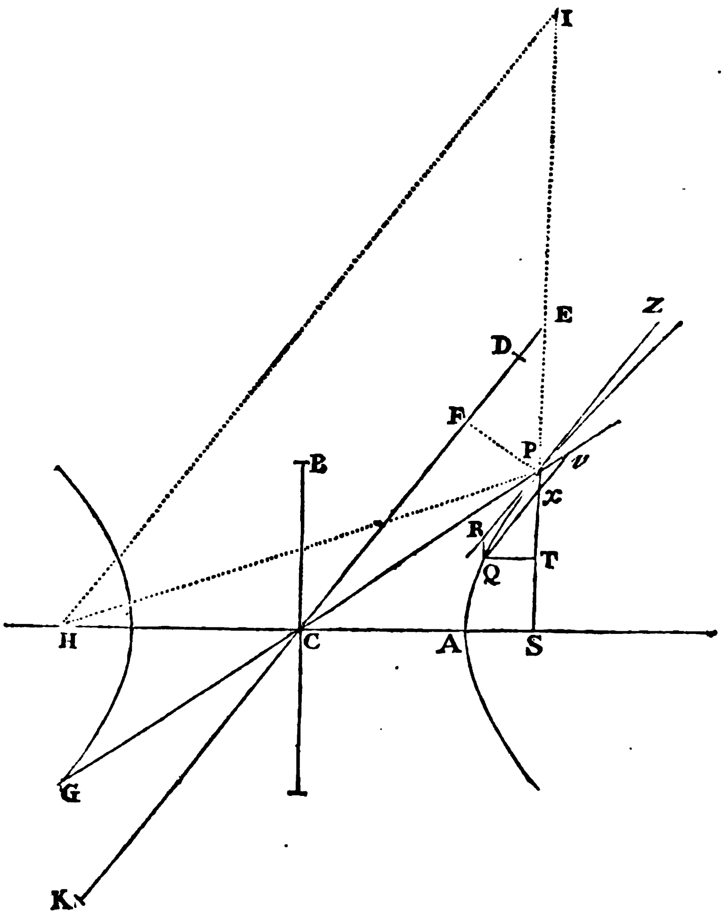
Eadem brevitate, qua traduximus problema quintum ad parabolam, & hyperbolam, liceret idem hic facere: verum ob dignitatem problematis, & uſum ejus in ſequentibus non pigebit caſus cæteros demonſtratione confirmare.

PROPOSITIO XII. PROBLEMA VII.

Moveatur corpus in hyperbola: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.

Sunto CA, CB ſemiaxes hyperbolæ; PG, KD diametri aliæ conjugatæ; PF perpendiculum ad diametrum KD; & Qv ordinatim applicata ad diametrum GP. Agatur SP ſecans cum diametrum DK in E, tum ordinatim applicatam Qv in x, & compleatur parallelogrammum $QRPx$. Patet EP æqualem eſſe ſemiaxi tranſverſo AC, eo quod, acta ab altero hyperbolæ umbilico H linea HI ipſi EC parallela, ob æquales CS, CH æquentur ES, EI; adeo ut EP ſemidifferentia ſit ipſarum PS, PI, id eſt (ob parallelas IH, PR & angulos æquales IPR, HPZ) ipſarum PS, PH, quarum differentia axem totum $2AC$ adæquat. Ad SP demittatur perpendicularis QT. Et hyperbolæ latere recto principali (ſeu $\frac{2BCq}{AC}$) dicto L, erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut QR ad Pv, ſeu Px ad Pv, id eſt (ob ſimilia triangula Pxv, PEC) ut PE ad PC, ſeu AC ad PC. Erit etiam $L \times Pv$ ad $Gv \times Pv$ ut L ad Gv; & (ex natura conicorum) rectangulum GvP ad $Qv\ quad.$ ut PCq ad CDq; & (per corol. 2. lem. VII.) $Qv\ quad.$ ad $Qx\ quad.$ punctis Q & P coeuntibus fit ratio æqualitatis; & $Qx\ quad.$ ſeu $Qv\ quad.$ eſt ad QTq ut EPq ad PFq, id eſt, ut CAq ad PFq, ſive (per lem. XII.) ut CDq ad CBq: & conjunctis his omnibus rationibus $L \times QR$ fit ad QTq ut $AC \times L \times PCq \times CDq$, ſeu $2CBq \times PCq \times CDq$ ad $PC \times Gv \times CDq \times CBq$, ſive ut $2PC$ ad Gv. Sed punctis P & Q coeuntibus

coeuntibus æquantur $2\,PC$ & Gv. Ergo & his proportionalia $L \times QR$ & QTq æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet $L \times SPq$ æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$. Ergo (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta reciproce eſt ut $L \times SPq$, id eſt, reciproce in ratione duplicata diſtantiæ SP. *Q. E. I.*



Idem aliter.

Inveniatur vis, quæ tendit ab hyperbolæ centro C. Prodibit hæc diſtantiæ CP proportionalis. Inde vero (per corol. 3. prop. VII.) vis ad umbilicum S tendens erit ut $\frac{PE\ cub.}{SPq}$, hoc eſt, ob datam PE reciproce ut SPq. *Q. E. I.*

Eodem modo demonſtratur, quod corpus hac vi centripeta in centrifugam verſa movebitur in hyperbola oppoſita.

LEMMA XIII.

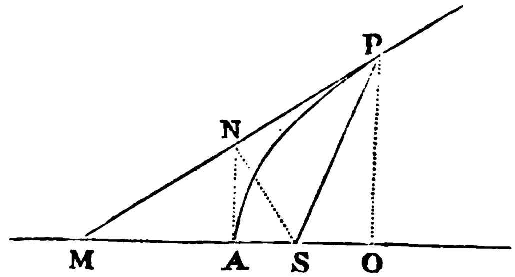
Latus rectum parabolæ ad verticem quemvis pertinens eſt quadruplum diſtantiæ verticis illius ab umbilico figuræ.

Patet ex conicis.

LEMMA XIV.

Perpendiculum, quod ab umbilico parabolæ ad tangentem ejus demittitur, medium eſt proportionale inter diſtantias umbilici a puncto contactus & a vertice principali figuræ.

Sit enim *AP* parabola, *S* umbilicus ejus, *A* vertex principalis, *P* punctum contactus, *PO* ordinatim applicata ad diametrum principalem, *PM* tangens diametro principali occurrens in *M*, & *SN* linea perpendicularis ab umbilico in tangentem. Jungatur *AN* & ob æquales *MS* & *SP*, *MN*, & *NP*, *MA* & *AO* parallelæ erunt rectæ *AN* & *OP*; & inde triangulum *SAN* rectangulum erit ad *A*, & ſimile triangulis æqualibus *SNM*, *SNP*: ergo *PS* eſt ad *SN* ut *SN* ad *SA*. *Q. E. D.*



Corol. 1. *PSq* eſt ad *SNq* ut *PS* ad *SA*.

Corol. 2. Et ob datam *SA* eſt *SNq* ut *PS*.

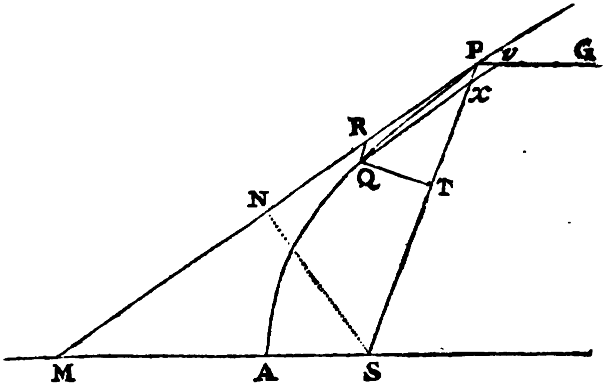
Corol. 3. Et concurſus tangentis cujuſvis *PM* cum recta *SN*, quæ ab umbilico in ipſam perpendicularis eſt, incidit in rectam *AN*, quæ parabolam tangit in vertice principali.

PROPOSITIO XIII. PROBLEMA VIII.

Moveatur corpus in perimetro parabolæ: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.

Maneat conſtructio lemmatis, ſitque *P* corpus in perimetro parabolæ, & a loco *Q*, in quem corpus proxime movetur, age ipſi *SP* parallelam

parallelam QR & perpendicularem QT, necnon Qv tangenti parallelam, & occurrentem tum diametro PG in v, tum diſtantiæ SP in x. Jam ob ſimilia triangula Pxv, SPM, & æqualia unius latera SM, SP, æqualia ſunt alterius latera Px ſeu QR & Pv. Sed ex conicis quadratum ordinatæ Qv æquale eſt rectangulo ſub latere recto & ſegmento diametri Pv, id eſt (per lem. XIII.) rectangulo $4PS \times Pv$, ſeu $4PS \times QR$; & punctis P & Q coeuntibus, ratio Qv ad Qx (per corol. 2. lem. VII.) fit ratio æqualitatis. Ergo Qx *quad.* eo in caſu æquale eſt rectangulo $4PS \times QR$. Eſt autem (ob ſimilia triangula QxT, SPN) Qxq ad QTq ut PSq ad SNq, hoc eſt (per corol. 1. lem. XIV.) ut PS ad SA, id eſt, ut $4PS \times QR$ ad $4SA \times QR$, & inde (per prop. IX. lib. V. elem.)



QTq & $4SA \times QR$ æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ æquale $SPq \times 4SA$: & propterea (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta eſt reciproce ut $SPq \times 4SA$, id eſt, ob datam $4SA$ reciproce in duplicata ratione diſtantiæ SP. *Q.E.I.*

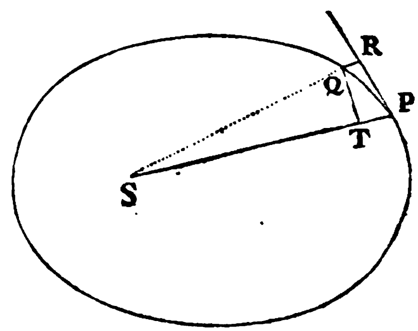
Corol. 1. Ex tribus noviſſimis propoſitionibus conſequens eſt, quod ſi corpus quodvis P ſecundum lineam quamvis rectam PR quacunque cum velocitate exeat de loco P, & vi centripeta, quæ ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ locorum a centro, ſimul agitetur; movebitur hoc corpus in aliqua ſectionum conicarum umbilicum habente in centro virium; & contra. Nam datis umbilico, & puncto contactus, & poſitione tangentis, deſcribi poteſt ſectio conica, quæ curvaturam datam ad punctum illud habebit. Datur autem curvatura ex data vi centripeta, & velocitate corporis: & orbes duo ſe mutuo tangentes eadem vi centripeta eademque velocitate deſcribi non poſſunt.

Corol 2. Si velocitas, quacum corpus exit de loco ſuo P, ea ſit, qua lineola PR in minima aliqua temporis particula deſcribi poſ-

De Motu Corporum ſit; & vis centripeta potis ſit eodem tempore corpus idem movere per ſpatium QR: movebitur hoc corpus in conica aliqua ſectione, cujus latus rectum principale eſt quantitas illa $\frac{QTq}{QR}$, quæ ultimo fit, ubi lineolæ PR, QR in infinitum diminuuntur. Circulum in his corollariis refero ad ellipſin; & caſum excipio, ubi corpus recta deſcendit ad centrum.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA VI.

Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centripeta ſit reciproce in duplicata ratione diſtantiæ locorum a centro; dico quod orbium latera recta principalia ſunt in duplicata ratione arearum, quas corpora radiis ad centrum ductis eodem tempore deſcribunt.



Nam (per corol 2. prop. XIII.) latus rectum L æquale eſt quantitati $\frac{QTq}{QR}$, quæ ultimo fit, ubi coeunt puncta P & Q. Sed linea minima QR dato tempore eſt ut vis centripeta generans, hoc eſt (per hypotheſin) reciproce ut SPq. Ergo $\frac{QTq}{QR}$ eſt ut $QTq \times SPq$, hoc eſt, latus rectum L in duplicata ratione areæ $QT \times SP$. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ellipſeos area tota, eique proportionale rectangulum ſub axibus eſt in ratione compoſita ex ſubduplicata ratione lateris recti, & ratione temporis periodici. Namque area tota eſt ut area $QT \times SP$, quæ dato tempore deſcribitur, ducta in tempus periodicum.

PROPOSITIO XV. THEOREMA VII.

Iiſdem poſitis, dico quod tempora periodica in ellipſibus ſunt in ratione ſeſquiplicata majorum axium.

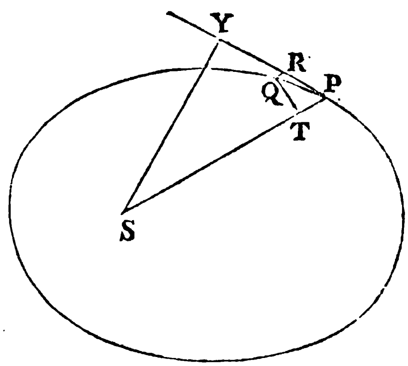
Namque axis minor eſt medius proportionalis inter axem majorem & latus rectum, atque ideo rectangulum ſub axibus eſt in ratione

tione compoſita ex ſubduplicata ratione lateris recti & ſeſquiplicata ratione axis majoris. Sed hoc rectangulum (per corol. prop. XIV.) eſt in ratione compoſita ex ſubduplicata ratione lateris recti & ratione periodici temporis. Dematur utrobique ſubduplicata ratio lateris recti, & manebit ſeſquiplicata ratio majoris axis eadem cum ratione periodici temporis. *Q. E. D.*

Corol. Sunt igitur tempora periodica in ellipſibus eadem ac in circulis, quorum diametri æquantur majoribus axibus ellipſeon.

PROPOSITIO XVI. THEOREMA VIII.

Iiſdem poſitis, & actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant orbitas, demiſſiſque ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico quod velocitates corporum ſunt in ratione compoſita ex ratione perpendiculorum inverſe, & ſubduplicata ratione laterum rectorum principalium directe.



Ab umbilico *S* ad tangentem *PR* demitte perpendiculum *SY*, & velocitas corporis *P* erit reciproce in ſubduplicata ratione quantitatis $\frac{SYq}{L}$. Nam velocitas illa eſt ut arcus quam minimus *PQ* in data temporis particula deſcriptus, hoc eſt (per lem. VII.) ut tangens *PR*, id eſt, ob proportionales *PR* ad *QT* & *SP* ad *SY*, ut $\frac{SP \times QT}{SY}$, ſive ut *SY* reciproce & $SP \times QT$ directe; eſtque $SP \times QT$ ut area dato tempore deſcripta, id eſt (per prop. XIV.) in ſubduplicata ratione lateris recti. *Q. E. D.*

Corol. 1. Latera recta principalia ſunt in ratione compoſita ex duplicata ratione perpendiculorum, & duplicata ratione velocitatum.

Corol.

Corol. 2. Velocitates corporum, in maximis & minimis ab umbilico communi diſtantiis, ſunt in ratione compoſita ex ratione diſtantiarum inverſe, & ſubduplicata ratione laterum rectorum principalium directe. Nam perpendicula jam ſunt ipſæ diſtantiæ.

Corol. 3. Ideoque velocitas in conica ſectione, in maxima vel minima ab umbilico diſtantia, eſt ad velocitatem in circulo in eadem a centro diſtantia in ſubduplicata ratione lateris recti principalis ad duplam illam diſtantiam.

Corol. 4. Corporum in ellipſibus gyrantium velocitates in mediocribus diſtantiis ab umbilico communi ſunt eædem, quæ corporum gyrantium in circulis ad eaſdem diſtantias; hoc eſt (per corol. 6. prop. IV.) reciproce in ſubduplicata ratione diſtantiarum. Nam perpendicula jam ſunt ſemi-axes minores, & hi ſunt ut mediæ proportionales inter diſtantias & latera recta. Componatur hæc ratio inverſe cum ſubduplicata ratione laterum rectorum directe, & fiet ratio ſubduplicata diſtantiarum inverſe.

Corol. 5. In eadem figura, vel etiam in figuris diverſis, quarum latera recta principalia ſunt æqualia, velocitas corporis eſt reciproce ut perpendiculum demiſſum ab umbilico ad tangentem.

Corol. 6. In parabola velocitas eſt reciproce in ſubduplicata ratione diſtantiæ corporis ab umbilico figuræ; in ellipſi magis variatur, in hyperbola minus quam in hac ratione. Nam (per corol. 2. lem. XIV.) perpendiculum demiſſum ab umbilico ad tangentem parabolæ eſt in ſubduplicata ratione diſtantiæ. In hyperbola perpendiculum minus variatur, in ellipſi magis.

Corol. 7. In parabola velocitas corporis ad quamvis ab umbilico diſtantiam eſt ad velocitatem corporis revolventis in circulo ad eandem a centro diſtantiam in ſubduplicata ratione numeri binarii ad unitatem; in ellipſi minor eſt, in hyperbola major quam in hac ratione. Nam per hujus corollarium ſecundum velocitas in vertice parabolæ eſt in hac ratione, & per corollaria ſexta hujus & propoſitionis quartæ ſervatur eadem proportio in omnibus diſtantiis. Hinc etiam in parabola velocitas ubique æqualis eſt velocitati corporis revolventis in circulo ad dimidiam diſtantiam, in ellipſi minor eſt, in hyperbola major.

Corol. 8. Velocitas gyrantis in ſectione quavis conica eſt ad velocitatem gyrantis in circulo in diſtantia dimidii lateris recti principalis

cipalis

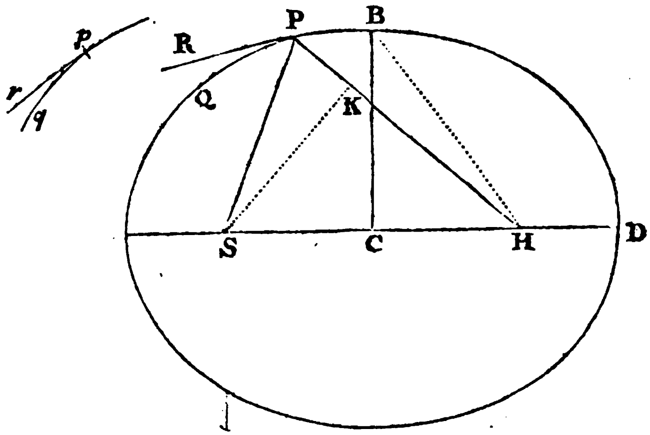
cipalis ſectionis, ut diſtantia illa ad perpendiculum ab umbilico in tangentem ſectionis demiſſum. Patet per corollarium quintum.

Corol. 9. Unde cum (per corol 6. prop. IV.) velocitas gyrantis in hoc circulo ſit ad velocitatem gyrantis in circulo quovis alio reciproce in ſubduplicata ratione diſtantiarum; fiet ex æquo velocitas gyrantis in conica ſectione ad velocitatem gyrantis in circulo in eadem diſtantia, ut media proportionalis inter diſtantiam illam communem & ſemiſſem principalis lateris recti ſectionis, ad perpendiculum ab umbilico communi in tangentem ſectionis demiſſum.

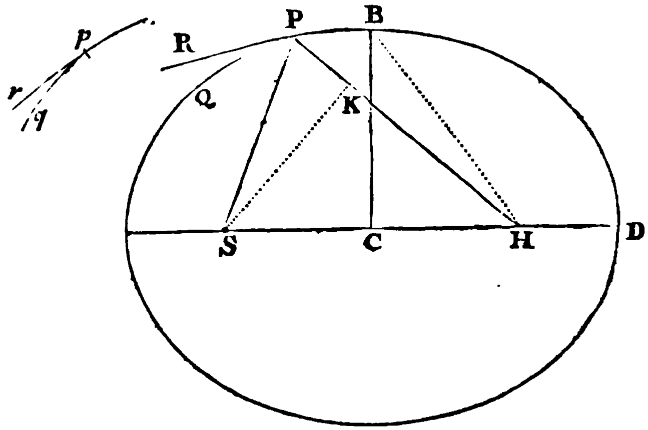
PROPOSITIO XVII. PROBLEMA IX.

Poſito quod vis centripeta ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ locorum a centro, & quod vis illius quantitas abſoluta ſit cognita; requiritur linea, quam corpus deſcribit de loco dato cum data velocitate ſecundum datam rectam egrediens.

Vis centripeta tendens ad punctum *S* ea ſit, qua corpus *p* in orbita quavis data *pq* gyretur, & cognoſcatur hujus velocitas in loco *p*. De loco *P* ſecundum lineam *PR* exeat corpus *P* cum data velocitate, & mox inde, cogente vi centripeta, deflectat illud in coni ſectionem *PQ*. Hanc igitur recta *PR* tanget in *P*. Tangat itidem recta aliqua *pr* orbitam *pq* in *p*, & ſi ab *S* ad eas tangentes demitti intelligantur perpendicula, erit (per corol. I. prop. XVI.) latus rectum principale coni ſectionis ad latus rectum principale orbitæ in ratione compoſita ex duplicata ratione perpendiculorum & duplicata ratione velocitatum, atque ideo datur. Sit *L* coni ſectionis latus rectum. Datur præterea ejuſdem coni ſectionis umbilicus *S*. Anguli *RPS* complementum



mentum ad duos rectos fiat angulus RPH; & dabitur poſitione linea PH, in qua umbilicus alter H locatur. Demiſſo ad PH perpendiculo SK, erigi intelligatur ſemiaxis conjugatus BC, & erit $SPq - 2KPH + PHq = SHq = 4CHq = 4BHq - 4BCq = \overline{SP+PH}\text{: quad.} - L \times \overline{SP+PH} = SPq + 2SPH + PHq - L \times \overline{SP+PH}$. Addantur utrobique $2KPH - SPq - PHq + L \times \overline{SP+PH}$, & fiet $L \times \overline{SP+PH} = 2SPH + 2KPH$, ſeu $SP + PH$ ad PH ut $2SP + 2KP$ ad L. Unde datur PH tam longitudine quam poſitione. Nimirum ſi ea ſit corporis in P velocitas, ut latus rectum L minus fuerit quam $2SP + 2KP$, jacebit PH ad eandem partem tangentis PR cum linea PS; ideoque figura erit ellipſis, & ex datis umbilicis S, H, & axe principali $SP + AH$, dabitur. Sin tanta ſit corporis velocitas, ut latus rectum L æquale fuerit $2SP + 2KP$, longitudo PH infinita erit; & propterea figura erit parabola axem habens SH parallelum lineæ PK, & inde dabitur. Quod ſi corpus majori adhuc cum velocitate de loco ſuo P exeat, capienda erit longitudo PH ad alteram partem tangentis; ideoque tangente inter umbilicos pergente, figura erit hyperbola axem habens principalem æqualem differentiæ linearum SP & PH, & inde dabitur. Nam ſi corpus in his caſibus revolvatur in conica ſectione ſic inventa, demonſtratum eſt in prop. XI, XII, & XIII, quod vis centripeta erit ut quadratum diſtantiæ corporis a centro virium S reciproce; ideoque linea PQ recte exhibetur, quam corpus tali vi deſcribet, de loco dato P, cum data velocitate, ſecundum rectam poſitione datam PR egrediens. *Q. E. F.*



Corol. 1. Hinc in omni coni ſectione ex dato vertice principali D, latere recto L, & umbilico S, datur umbilicus alter H capiendo DH ad DS ut eſt latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4DS$. Nam proportio $SP + PH$ ad PH ut $2SP + 2KP$ ad L in

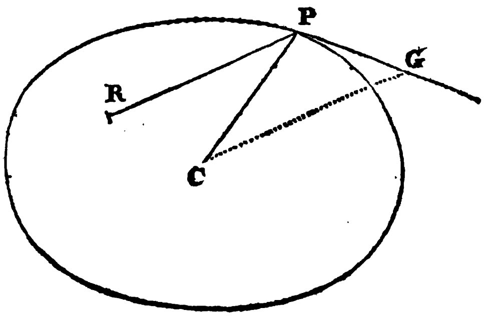
in caſu hujus corollarii, fit $DS + DH$ ad DH ut $4DS$ ad L, & diviſim DS ad DH ut $4DS - L$ ad L. LIBER PRIMUS.

Corol. 2. Unde ſi datur corporis velocitas in vertice principali D, invenietur orbita expedite, capiendo ſcilicet latus rectum ejus ad duplam diſtantiam DS, in duplicata ratione velocitatis hujus datæ ad velocitatem corporis in circulo ad diſtantiam DS gyrantis (per corol. 3. prop. XVI.;) dein DH ad DS ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4DS$.

Corol. 3. Hinc etiam ſi corpus moveatur in ſectione quacunque conica, & ex orbe ſuo impulſu quocunque exturbetur; cognoſci poteſt orbis, in quo poſtea curſum ſuum peraget. Nam componendo proprium corporis motum cum motu illo, quem impulſus ſolus generaret, habebitur motus quocum corpus de dato impulſus loco, ſecundum rectam poſitione datam, exibit.

Corol. 4. Et ſi corpus illud vi aliqua extrinſecus impreſſa continuo perturbetur, innoteſcet curſus quam proxime, colligendo mutationes quas vis illa in punctis quibuſdam inducit, & ex ſeriei analogia mutationes continuas in locis intermediis æſtimando.

Scholium.



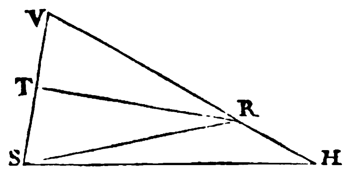
Si corpus P vi centripeta ad punctum quodcunque datum R tendente moveatur in perimetro datæ cujuſcunque ſectionis conicæ, cujus centrum ſit C; & requiratur lex vis centripetæ: ducatur CG radio RP parallela, & orbis tangenti PG occurrens in G; & vis illa (per corol. 1. & ſchol. prop. X. & corol. 3. prop. VII.) erit ut $\frac{CG\ cub.}{RP\ quad.}$

SECTIO IV.

De inventione orbium ellipticorum, parabolicorum & hyperbolicorum ex umbilico dato.

LEMMA XV.

Si ab ellipſeos vel hyperbolæ cujuſvis umbilicis duobus S, H, *ad punctum quodvis tertium* V *inflectantur rectæ duæ* SV, HV, *quarum una* HV *æqualis ſit axi principali figuræ, id eſt, axi in quo umbilici jacent, altera* SV *a perpendiculo* TR *in ſe demiſſo biſecetur in* T; *perpendiculum illud* TR *ſectionem conicam alicubi tanget: & contra, ſi tangit, erit* HV *æqualis axi principali figuræ.*

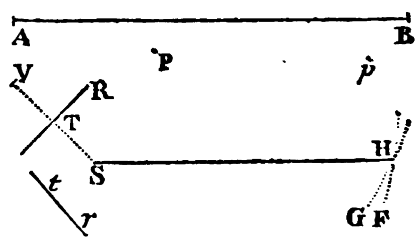


Secet enim perpendiculum *TR* rectam *HV* productam, ſi opus fuerit, in *R*; & jungatur *SR*. Ob æquales *TS*, *TV*, æquales erunt & rectæ *SR*, *VR* & anguli *TRS*, *TRV*. Unde punctum *R* erit ad ſectionem conicam, & perpendiculum *TR* tanget eandem: & contra. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA X.

Datis umbilico & axibus principalibus deſcribere trajectorias ellipticas & hyperbolicas, quæ tranſibunt per puncta data, & rectas poſitione datas contingent.

Sit *S* communis umbilicus figurarum; *AB* longitudo axis principalis trajectoriæ cujuſvis; *P* punctum per quod trajectoria debet tranſire; & *TR* recta quam debet tangere. Centro *P* intervallo *AB*—*SP*, ſi orbita ſit ellipſis, vel *AB*+*SP*, ſi ea ſit hyperbola, deſcribatur circulus *HG*. Ad tangentem *TR* demittatur perpendiculum *ST*, & producatur idem ad *V*, ut ſit *TV* æqualis *ST*; centroque

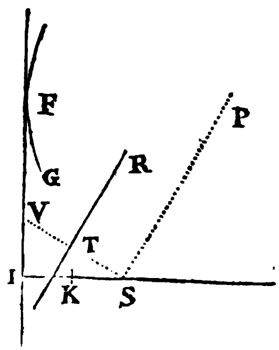


que *V* & intervallo *AB* deſcribatur circulus *FH*. Hac methodo ſive dentur duo puncta *P*, *p*, ſive duæ tangentes *TR*, *tr*, ſive punctum *P* & tangens *TR*, deſcribendi ſunt circuli duo. Sit *H* eorum interſectio communis, & umbilicis *S*, *H*, axe illo dato deſcribatur trajectoria. Dico factum. Nam trajectoria deſcripta (eo quod *PH* + *SP* in ellipſi, & *PH* — *SP* in hyperbola æquatur axi) tranſibit per punctum *P*, & (per lemma ſuperius) tanget rectam *TR*. Et eodem argumento vel tranſibit eadem per puncta duo *P*, *p*, vel tanget rectas duas *TR*, *tr*. Q. E. F.

PROPOSITIO XIX. PROBLEMA XI.

Circa datum umbilicum trajectoriam parabolicam deſcribere, quæ tranſibit per puncta data, & rectas poſitione datas continget.

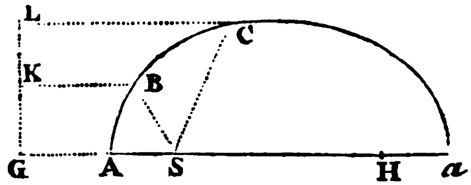
Sit *S* umbilicus, *P* punctum & *TR* tangens trajectoriæ deſcribendæ. Centro *P*, intervallo *PS* deſcribe circulum *FG*. Ab umbilico ad tangentem demitte perpendicularem *ST*, & produc eam ad *V*, ut ſit *TV* æqualis *ST*. Eodem modo deſcribendus eſt alter circulus *fg*, ſi datur alterum punctum *p*; vel inveniendum alterum punctum *v*, ſi datur altera tangens *tr*; dein ducenda recta *IF* quæ tangat duos circulos *FG*, *fg* ſi dantur duo puncta *P*, *p*, vel tranſeat per duo puncta *V*, *v*, ſi dantur duæ tangentes *TR*, *tr*, vel tangat circulum *FG* & tranſeat per punctum *V*, ſi datur punctum *P* & tangens *TR*. Ad *FI* demitte perpendicularem *SI*, eamque biſeca in *K*; & axe *SK*, vertice principali *K* deſcribatur parabola. Dico factum. Nam parabola, ob æquales *SK* & *IK*, *SP* & *FP*, tranſibit per punctum *P*; & (per lem. XIV. corol. 3.) ob æquales *ST* & *TV* & angulum rectum *STR*, tanget rectam *TR*. Q. E. F.



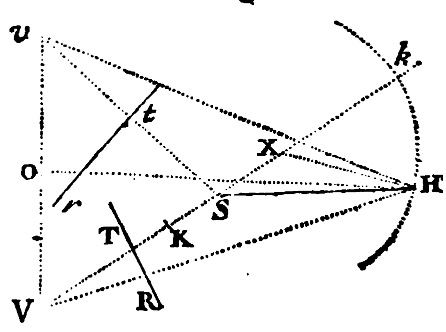
PROPOSITIO XX. PROBLEMA XII.

Circa datum umbilicum trajectoriam quamvis ſpecie datam deſcribere, quæ per data puncta tranſibit & rectas tanget poſitione datas.

Caſ. 1. Dato umbilico *S*, deſcribenda ſit trajectoria *ABC* per puncta duo *B*, *C*. Quoniam trajectoria datur ſpecie, dabitur ratio axis principalis ad diſtantiam umbilicorum. In ea ratione cape *KB* ad *BS*, & *LC* ad *CS*. Centris *B*, *C*, intervallis *BK*, *CL*, deſcribe circulos duos, & ad rectam *KL*, quæ tangat eoſdem in *K* & *L*, demitte perpendiculum *SG*, idemque ſeca in *A* & *a*, ita ut ſit *GA* ad *AS* & *Ga* ad *aS* ut eſt *KB* ad *BS* & axe *Aa*, verticibus *A*, *a*, deſcribatur trajectoria. Dico factum. Sit enim *H* umbilicus alter figuræ deſcriptæ, & cum ſit *GA* ad *AS* ut *Ga* ad *aS*, erit diviſim *Ga* — *GA* ſeu *Aa* ad *aS* — *AS* ſeu *SH* in eadem ratione, ideoque in ratione quam habet axis principalis figuræ deſcribendæ ad diſtantiam umbilicorum ejus; & propterea figura deſcripta eſt ejuſdem ſpeciei cum deſcribenda. Cumque ſint *KB* ad *BS* & *LC* ad *CS* in eadem ratione, tranſibit hæc figura per puncta *B*, *C*, ut ex conicis manifeſtum eſt.

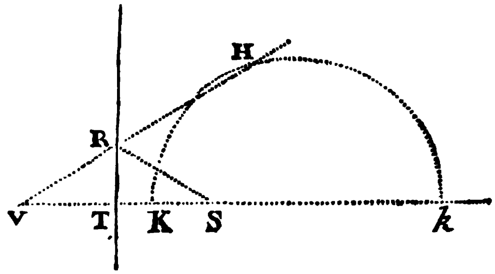


Caſ. 2. Dato umbilico *S*, deſcribenda ſit trajectoria quæ rectas duas *TR*, *tr* alicubi contingat. Ab umbilico in tangentes demitte perpendicula *ST*, *St* & produc eadem ad *V*, *v*, ut ſint *TV*, *tv* æquales *TS*, *tS*. Biſeca *Vv* in *O*, & erige perpendiculum infinitum *OH*, rectamque *VS* infinite productam ſeca in *K* & *k*, ita ut ſit *VK* ad *KS* & *Vk* ad *kS* ut eſt trajectoriæ deſcribendæ axis principalis ad umbilicorum diſtantiam. Super diametro *Kk* deſcribatur circulus ſecans *OH* in *H*; & umbilicis *S*, *H*, axe principali ipſam *VH* æquante, deſcribatur trajectoria. Dico factum. Nam biſeca *Kk* in *X*, & junge



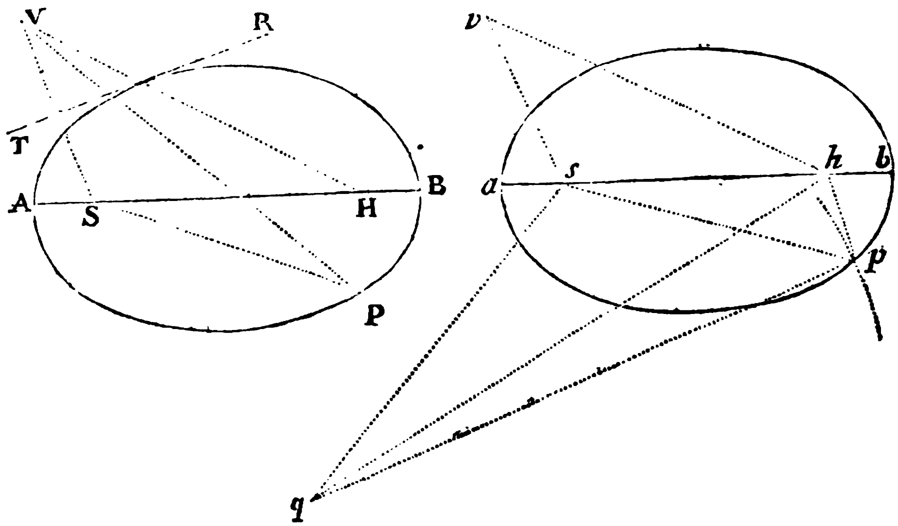
junge *HX*, *HS*, *HV*, *Hv*. Quoniam eſt *VK* ad *KS* ut *Vk* ad *kS*; & compoſite ut *VK*+*Vk* ad *KS*+*kS*; diviſimque ut *Vk*—*VK* ad *kS*—*KS*, id eſt, ut 2 *VX* ad 2 *KX* & 2 *KX* ad 2 *SX*, ideoque ut *VX* ad *HX* & *HX* ad *SX*, ſimilia erunt triangula *VXH*, *HXS*, & propterea *VH* erit ad *SH* ut *VX* ad *XH*, ideoque ut *VK* ad *KS*. Habet igitur trajectoriæ deſcriptæ axis principalis *VH* eam rationem ad ipſius umbilicorum diſtantiam *SH*, quam habet trajectoriæ deſcribendæ axis principalis ad ipſius umbilicorum diſtantiam, & propterea ejuſdem eſt ſpeciei. Inſuper cum *VH*, *vH* æquentur axi principali, & *VS*, *vS* a rectis *TR*, *tr* perpendiculariter biſecentur, liquet (ex lem. xv.) rectas illas trajectoriam deſcriptam tangere. *Q. E. F.*

Caſ. 3. Dato umbilico *S* deſcribenda ſit trajectoria quæ rectam *TR* tanget in puncto dato *R*. In rectam *TR* demitte perpendicularem *ST*, & produc eandem ad *V*, ut ſit *TV* æqualis *ST*. Junge *VR* & rectam *VS* infinite productam ſeca in *K* & *k*, ita ut ſit *VK* ad *SK* & *Vk* ad *Sk* ut ellipſeos deſcribendæ axis principalis ad diſtantiam umbilicorum; circuloque ſuper diametro *Kk* deſcripto ſecetur producta recta *VR* in *H*, & umbilicis *S*, *H*, axe principali rectam *VH* æquante, deſcribatur trajectoria. Dico factum. Namque *VH* eſſe ad *SH* ut *VK* ad *SK*, atque ideo ut axis principalis trajectoriæ deſcribendæ ad diſtantiam umbilicorum ejus, patet ex demonſtratis in caſu ſecundo, & propterea trajectoriam deſcriptam ejuſdem eſſe ſpeciei cum deſcribenda, rectam vero *TR* qua angulus *VRS* biſecatur, tangere trajectoriam in puncto *R*, patet ex conicis. *Q. E. F.*



Caſ. 4. Circa umbilicum *S* deſcribenda jam ſit trajectoria *APB*, quæ tangat rectam *TR*, tranſeatque per punctum quodvis *P* extra tangentem datum, quæque ſimilis ſit figuræ *apb*, axe principali *ab* & umbilicis *s*, *h* deſcriptæ. In tangentem *TR* demitte perpendiculum *ST*, & produc idem ad *V*, ut ſit *TV* æqualis *ST*. Angulis autem *VSP*, *SVP* fac angulos *hsq*, *shq* æquales; centroque *q* & intervallo quod ſit ad *ab* ut *SP* ad *VS* deſcribe circulum ſecantem figuram *apb* in *p*. Junge *sp* & age *SH*, quæ ſit ad *sh* ut eſt *SP* ad

SP ad *sp*, quæque angulum *PSH* angulo *psh* & angulum *VSH* angulo *psq* æquales conſtituat. Denique umbilicis *S*, *H*, & axe principali *AB* diſtantiam *VH* æquante, deſcribatur ſectio conica. Dico factum. Nam ſi agatur *sv* quæ ſit ad *sp* ut eſt *sh* ad *sq*, quæque conſtituat angulum *vsp* angulo *hsq* & angulum *vsh* angulo *psq* æquales, triangula *svh*, *spq* erunt ſimilia, & propterea *vh* erit ad *pq* ut eſt *sh* ad *sq*, id eſt (ob ſimilia triangula *VSP*, *hsq*) ut eſt *VS* ad *SP* ſeu *ab* ad *pq*. Æquantur ergo *vh* & *ab*.



Porro ob ſimilia triangula *VSH*, *vsh*, eſt *VH* ad *SH* ut *vh* ad *sh*, id eſt, axis conicæ ſectionis jam deſcriptæ ad illius umbilicorum intervallum, ut axis *ab* ad umbilicorum intervallum *sh*; & propterea figura jam deſcripta ſimilis eſt figuræ *aph*. Tranſit autem hæc figura per punctum *P*, eo quod triangulum *PSH* ſimile ſit triangulo *psh*; & quia *VH* æquatur ipſius axi & *VS* biſecatur perpendiculariter a recta *TR*, tangit eadem rectam *TR*. *Q. E. F.*

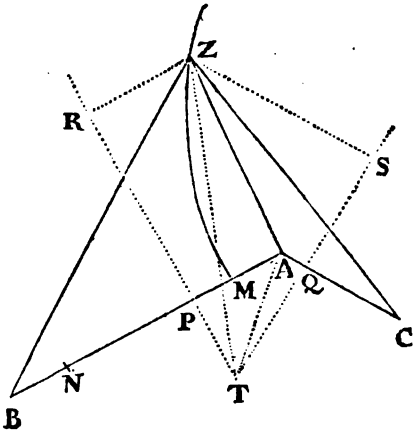
LEMMA XVI.

A datis tribus punctis ad quartum non datum inflectere tres rectas quarum differentiæ vel dantur vel nullæ ſunt.

Caſ. 1. Sunto puncta illa data *A*, *B*, *C* & punctum quartum *Z*, quod invenire oportet; ob datam differentiam linearum *AZ*, *BZ*,

locabitur

locabitur punctum *Z* in hyperbola cujus umbilici ſunt *A* & *B*, & principalis axis differentia illa data. Sit axis ille *MN*. Cape *PM* ad *MA* ut eſt *MN* ad *AB*, & erecta *PR* perpendiculari ad *AB*, demiſſaque *ZR* perpendiculari ad *PR*; erit, ex natura hujus hyperbolæ, *ZR* ad *AZ* ut eſt *MN* ad *AB*. Simili diſcurſu punctum *Z* locabitur in alia hyperbola, cujus umbilici ſunt *A*, *C* & principalis axis differentia inter *AZ* & *CZ*, ducique poteſt *QS* ipſi *AC* perpendicularis, ad quam ſi ab hyperbolæ hujus puncto quovis *Z* demittatur normalis *ZS*, hæc fuerit ad *AZ* ut eſt differentia inter *AZ* & *CZ* ad *AC*. Dantur ergo rationes ipſarum *ZR* & *ZS* ad *AZ*, & idcirco datur earundem *ZR* & *ZS* ratio ad invicem; ideoque ſi rectæ *RP*, *SQ* concurrant in *T*, & agantur *TZ* & *TA*, figura *TRZS* dabitur ſpecie, & recta *TZ* in qua punctum *Z* alicubi locatur, dabitur poſitione. Dabitur etiam recta *TA*, ut & angulus *ATZ*; & ob datas rationes ipſarum *AZ* ac *TZ* ad *ZS* dabitur earundem ratio ad invicem; & inde dabitur triangulum *ATZ*, cujus vertex eſt punctum *Z*. *Q. E. I.*



Caſ. 2. Si duæ ex tribus lineis, puta *AZ* & *BZ*, æquantur, ita age rectam *TZ*, ut biſecet rectam *AB*; dein quære triangulum *ATZ* ut ſupra.

Caſ. 3. Si omnes tres æquantur, locabitur punctum *Z* in centro circuli per puncta *A*, *B*, *C* tranſeuntis. *Q. E. I.*

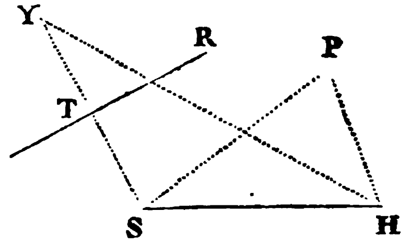
Solvitur etiam hoc lemma problematicum per librum tactionum *Apollonii* a *Vieta* reſtitutum.

PROPOSITIO XXI. PROBLEMA XIII.

Trajectoriam circa datum umbilicum deſcribere, quæ tranſibit per puncta data & rectas poſitione datas continget.

Detur umbilicus *S*, punctum *P*, & tangens *TR*, & inveniendus ſit umbilicus alter *H*. Ad tangentem demitte perpendiculum *ST*, & pro-

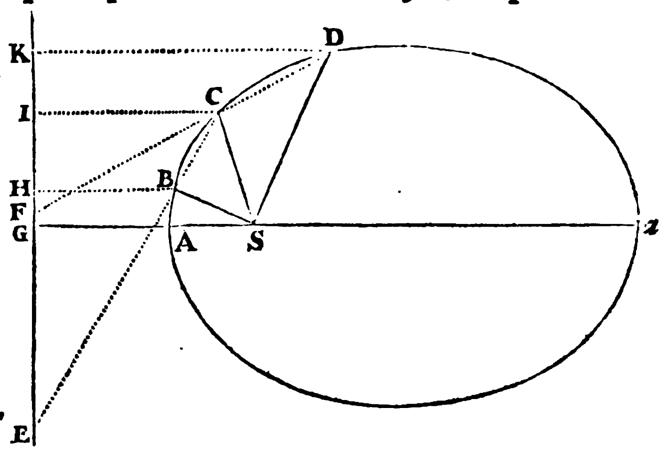
produc idem ad *Y*, ut ſit *TY* æqualis *ST*, & erit *YH* æqualis axi principali. Junge *SP*, *HP*, & erit *SP* differentia inter *HP* & axem principalem. Hoc modo ſi dentur plures tangentes *TR*, vel plura puncta *P*, devenietur ſemper ad lineas totidem *YH*, vel *PH*, a dictis punctis *Y* vel *P* ad umbilicum *H* ductas, quæ vel æquantur axibus, vel datis longitudinibus *SP* differunt ab iiſdem, atque ideo quæ vel æquantur ſibi invicem, vel datas habent differentias; & inde, per lemma ſuperius, datur umbilicus ille alter *H*. Habitis autem umbilicis una cum axis longitudine (quæ vel eſt *YH*; vel, ſi trajectoria ellipſis eſt, *PH*+*SP*; ſin hyperbola, *PH*—*SP*) habetur trajectoria. *Q. E. I.*



Scholium.

Ubi trajectoria eſt hyperbola, ſub nomine hujus trajectoriæ oppoſitam hyperbolam non comprehendo. Corpus enim pergendo in motu ſuo in oppoſitam hyperbolam tranſire non poteſt.

Caſus ubi dantur tria puncta ſic ſolvitur expeditius. Dentur puncta *B*, *C*, *D*. Junctas *BC*, *CD* produc ad *E*, *F*, ut ſit *EB* ad *EC* ut *SB* ad *SC*, & *FC* ad *FD* ut *SC* ad *SD*. Ad *EF* ductam & productam demitte normales *SG*, *BH*, inque *GS* infinite producta cape *GA* ad *AS* & *Ga* ad *aS* ut eſt *HB* ad *BS*; & erit *A* vertex, & *Aa* axis principalis trajectoriæ: quæ, perinde ut *GA* major, æqualis, vel minor fuerit quam *AS*, erit ellipſis, parabola vel hyperbola; puncto *a* in primo caſu cadente ad eandem partem lineæ *GF* cum puncto *A*; in ſecundo caſu abeunte in infinitum; in tertio cadente ad contrariam partem lineæ *GF*. Nam ſi demittantur ad *GF* perpendicula *CI*, *DK*; erit *IC* ad *HB* ut *EC* ad *EB*, hoc eſt, ut *SC* ad *SB*; & viciſſim *IC* ad *SC* ut *HB* ad *SB* ſive ut *GA* ad *SA*. Et



Et ſimili argumento probabitur eſſe *KD* ad *SD* in eadem ratione. Jacent ergo puncta *B*, *C*, *D* in coni ſectione circa umbilicum *S* ita deſcripta, ut rectæ omnes, ab umbilico *S* ad ſingula ſectionis puncta ductæ, ſint ad perpendicula a punctis iiſdem ad rectam *GF* demiſſa in data illa ratione.

Methodo haud multum diſſimili hujus problematis ſolutionem tradit clariſſimus geometra *de la Hire*, conicorum ſuorum lib. VIII. prop. XXV.

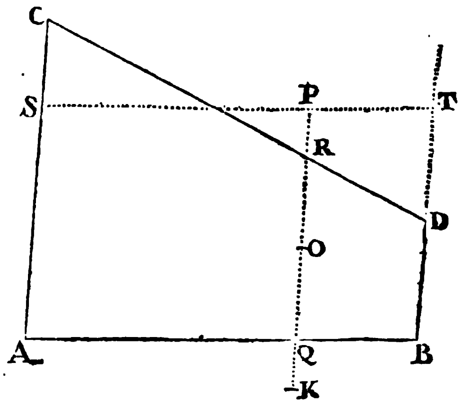
SECTIO V.

Inventio orbium ubi umbilicus neuter datur.

LEMMA XVII.

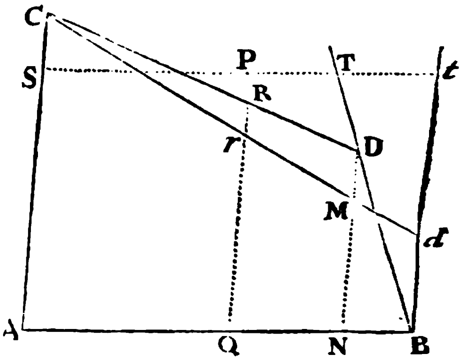
Si a datæ conicæ ſectionis puncto quovis P *ad trapezii alicujus* ABDC, *in conica illa ſectione inſcripti, latera quatuor infinite producta* AB, CD, AC, DB *totidem rectæ* PQ, PR, PS, PT *in datis angulis ducantur, ſingulæ ad ſingula: rectangulum ductarum ad oppoſita duo latera* PQ×PR, *erit ad rectangulum ductarum ad alia duo latera oppoſita* PS×PT *in data ratione.*

Caſ. 1. Ponamus primo lineas ad oppoſita latera ductas parallelas eſſe alterutri reliquorum laterum, puta *PQ* & *PR* lateri *AC*, & *PS* ac *PT* lateri *AB*. Sintque inſuper latera duo ex oppoſitis, puta *AC* & *BD*, ſibi invicem parallela. Et recta, quæ biſecat parallela illa latera, erit una ex diametris conicæ ſectionis, & biſecabit etiam *RQ*. Sit *O* punctum in quo *RQ* biſecatur, & erit *PO* ordinatim applicata ad diametrum illam. Produc *PO* ad *K*, ut ſit *OK* æqualis *PO*, & erit *OK* ordinatim applicata ad contrarias partes diametri. Cum igitur puncta *A*, *B*, *P* & *K* ſint ad conicam ſectionem, & *PK* ſecet *AB* in dato angulo, erit (per prop. 17, 19, 21 & 23. lib. III. coni-



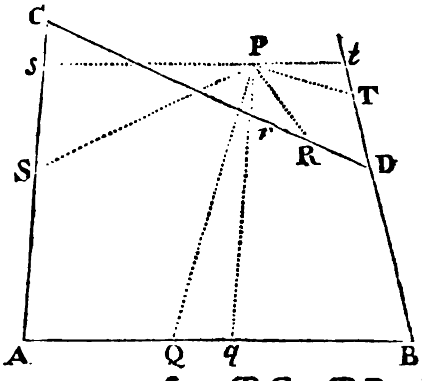
corum *Apollonii*) rectangulum *PQK* ad rectangulum *AQB* in data ratione. Sed *QK* & *PR* æquales ſunt, utpote æqualium *OK*, *OP*, & *OQ*, *OR* differentiæ, & inde etiam rectangula *PQK* & *PQ* × *PR* æqualia ſunt; atque ideo rectangulum *PQ* × *PR* eſt ad rectangulum *AQB*, hoc eſt ad rectangulum *PS* × *PT* in data ratione. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Ponamus jam trapezii latera oppoſita *AC* & *BD* non eſſe parallela. Age *Bd* parallelam *AC* & occurrentem tum rectæ *ST* in *t*, tum conicæ ſectioni in *d*. Junge *Cd* ſecantem *PQ* in *r*, & ipſi *PQ* parallelam age *DM* ſecantem *Cd* in *M* & *AB* in *N*. Jam ob ſimilia triangula *BTt*, *DBN*; eſt *Bt* ſeu *PQ* ad *Tt* ut *DN* ad *NB*. Sic & *Rr* eſt ad *AQ* ſeu *PS* ut *DM* ad *AN*. Ergo, ducendo antecedentes in antecedentes & conſequentes in conſequentes, ut rectangulum *PQ* in *Rr* eſt ad rectangulum *PS* in *Tt*,



ita rectangulum *NDM* eſt ad rectangulum *ANB*, & (per caſ. 1.) ita rectangulum *PQ* in *Pr* eſt ad rectangulum *PS* in *Pt*, ac diviſim ita rectangulum *PQ* × *PR* eſt ad rectangulum *PS* × *PT*. *Q. E. D.*

Caſ. 3. Ponamus denique lineas quatuor *PQ*, *PR*, *PS*, *PT* non eſſe parallelas lateribus *AC*, *AB*, ſed ad ea utcunque inclinatas. Earum vice age *Pq*, *Pr* parallelas ipſi *AC*; & *Ps*, *Pt* parallelas ipſi *AB*; & propter datos angulos triangulorum *PQq*, *PRr*, *PSs*, *PTt*, dabuntur rationes *PQ* ad *Pq*, *PR* ad *Pr*, *PS* ad *Ps*, & *PT* ad *Pt*; atque ideo rationes compoſitæ *PQ* × *PR* ad *Pq* × *Pr*, & *PS* × *PT* ad *Ps* × *Pt*. Sed, per ſuperius demonſtrata, ratio *Pq* × *Pr* ad *Ps* × *Pt* data eſt: ergo & ratio *PQ* × *PR* ad *PS* × *PT*. *Q. E. D.*

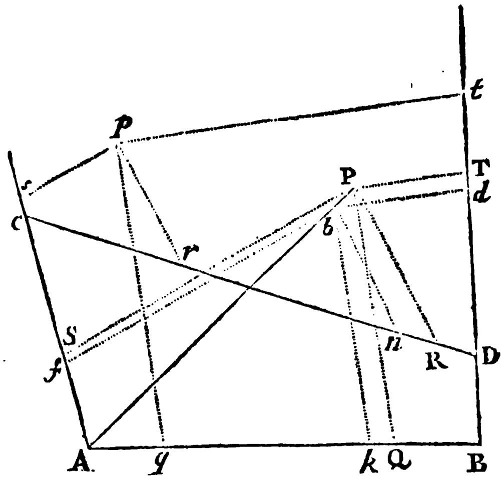


LEMMA

LEMMA XVIII.

Iiſdem poſitis, ſi rectangulum ductarum ad oppoſita duo latera trapezii PQ×PR *ſit ad rectangulum ductarum ad reliqua duo latera* PS×PT *in data ratione; punctum* P, *a quo lineæ ducuntur, tanget conicam ſectionem circa trapezium deſcriptam.*

Per puncta *A*, *B*, *C*, *D* & aliquod infinitorum punctorum *P*, puta *p*, concipe conicam ſectionem deſcribi: dico punctum *P* hanc ſemper tangere. Si negas, junge *AP* ſecantem hanc conicam ſectionem alibi quam in *P*, ſi fieri poteſt, puta in *b*. Ergo ſi ab his punctis *p* & *b* ducantur in datis angulis ad latera trapezii rectæ *pq*, *pr*, *ps*, *pt* & *bk*, *bn*, *bf*, *bd*; erit ut *bk*×*bn* ad *bf*×*bd* ita (per lem. XVII.) *pq*×*pr* ad *ps*×*pt*, & ita (per hypoth.) *PQ*×*PR* ad *PS*×*PT*. Eſt & propter ſimilitudinem trapeziorum *bkAf*, *PQAS*, ut *bk* ad *bf* ita *PQ* ad *PS*. Quare, applicando terminos prioris proportionis ad terminos correſpondentes hujus, erit *bn* ad *bd* ut *PR* ad *PT*. Ergo trapezia æquiangula *Dnbd*, *DRPT* ſimilia ſunt, & eorum diagonales *Db*, *DP* propterea coincidunt. Incidit itaque *b* in interſectionem rectarum *AP*, *DP* ideoque coincidit cum puncto *P*. Quare punctum *P*, ubicunque ſumatur, incidit in aſſignatam conicam ſectionem. *Q. E. D.*

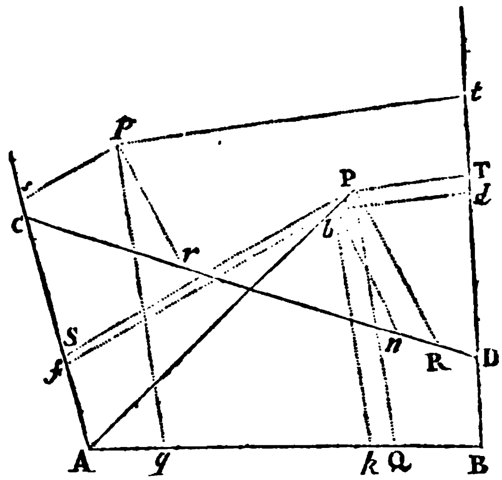


Corol. Hinc ſi rectæ tres *PQ*, *PR*, *PS* a puncto communi *P* ad alias totidem poſitione datas rectas *AB*, *CD*, *AC*, ſingulæ ad ſingulas, in datis angulis ducantur, ſitque rectangulum ſub duabus ductis *PQ*×*PR* ad quadratum tertiæ *PS* in data ratione: punctum *P*, a quibus rectæ ducuntur, locabitur in ſectione conica quæ tangit lineas *AB*, *CD* in *A* & *C*; & contra. Nam coeat linea

De Motu Corporum *BD* cum linea *AC*, manente poſitione trium *AB*, *CD*, *AC*; dein coeat etiam linea *PT* cum linea *PS*: & rectangulum *PS*x*PT* evadet *PS quad.* rectæque *AB*, *CD*, quæ curvam in punctis *A* & *B*, *C* & *D* ſecabant, jam curvam in punctis illis coeuntibus non amplius ſecare poſſunt, ſed tantum tangent.

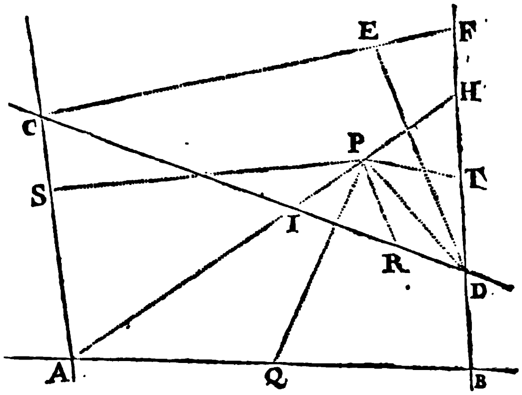
Scholium.

Nomen conicæ ſectionis in hoc lemmate late ſumitur, ita ut ſectio tam rectilinea per verticem coni tranſiens, quam circularis baſi parallela includatur. Nam ſi punctum *p* incidit in rectam, qua puncta *A* & *D* vel *C* & *B* junguntur, conica ſectio vertetur in geminas rectas, quarum una eſt recta illa in quam punctum *p* incidit, & altera eſt recta qua alia duo ex punctis quatuor junguntur. Si trapezii anguli duo oppoſiti ſimul ſumpti æquentur duobus rectis, & lineæ quatuor *PQ*, *PR*, *PS*, *PT* ducantur ad latera ejus vel perpendiculariter vel in angulis quibuſvis æqualibus, ſitque rectangulum ſub duabus ductis *PQ* x *PR* æquale rectangulo ſub duabus aliis *PS* x *PT*, ſectio conica evadet circulus. Idem fiet, ſi lineæ quatuor ducantur in angulis quibuſvis, & rectangulum ſub duabus ductis *PQ*x*PR* ſit ad rectangulum ſub aliis duabus *PS*x*PT* ut rectangulum ſub ſinubus angulorum *S*, *T*, in quibus duæ ultimæ *PS*, *PT* ducuntur, ad rectangulum ſub ſinubus angulorum *Q*, *R*, in quibus duæ primæ *PQ*, *PR* ducuntur. Cæteris in caſibus locus puncti *P* erit aliqua trium figurarum, quæ vulgo nominantur ſectiones conicæ. Vice autem trapezii *ABCD* ſubſtitui poteſt quadrilaterum, cujus latera duo oppoſita ſe mutuo inſtar diagonalium decuſſant. Sed & e punctis quatuor *A*, *B*, *C*, *D* poſſunt unum vel duo abire ad infinitum, eoque pacto latera figuræ, quæ ad puncta illa convergunt, evadere parallela: quo in caſu ſectio conica tranſibit per cætera puncta, & in plagas parallelarum abibit in infinitum.



LEMMA

LEMMA XIX.



Invenire punctum P, *a quo ſi rectæ quatuor* PQ, PR, PS, PT *ad alias totidem poſitione datas rectas* AB, CD, AC, BD, *ſingulæ ad ſingulas, in datis angulis ducantur, rectangulum ſub duabus ductis,* PQ×PR, *ſit ad rectangulum ſub aliis duabus,* PS×PT, *in data ratione.*

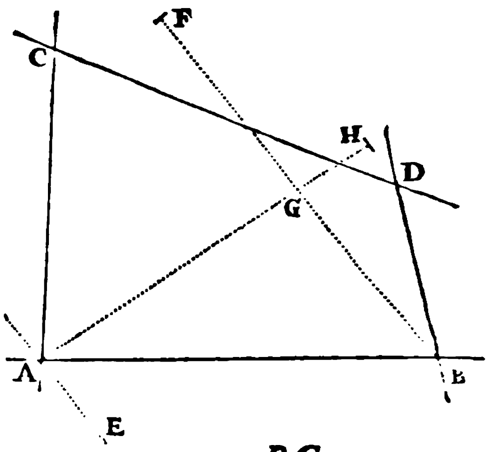
Lineæ *AB, CD,* ad quas rectæ duæ *PQ, PR* unum rectangulorum continentes ducuntur, conveniant cum aliis duabus poſitione datis lineis in punctis *A, B, C, D.* Ab eorum aliquo *A* age rectam quamlibet *AH,* in qua velis punctum *P* reperiri. Secet ea lineas oppoſitas *BD, CD,* nimirum *BD* in *H* & *CD* in *I,* & ob datos omnes angulos figuræ, dabuntur rationes *PQ* ad *PA* & *PA* ad *PS,* ideoque ratio *PQ* ad *PS.* Auferendo hanc a data ratione *PQ* ×*PR* ad *PS*×*PT,* dabitur ratio *PR* ad *PT,* & addendo datas rationes *PI* ad *PR,* & *PT* ad *PH* dabitur ratio *PI* ad *PH,* atque ideo punctum *P.* *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc etiam ad loci punctorum infinitorum *P* punctum quodvis *D* tangens duci poteſt. Nam chorda *PD,* ubi puncta *P* ac *D* conveniunt, hoc eſt, ubi *AH* ducitur per punctum *D,* tangens evadit. Quo in caſu, ultima ratio evaneſcentium *IP* & *PH* invenietur ut ſupra. Ipſi igitur *AD* duc parallelam *CF,* occurrentem *BD* in *F,* & in ea ultima ratione ſectam in *E,* & *DE* tangens erit, propterea quod *CF* & evaneſcens *IH* parallelæ ſunt, & in *E* & *P* ſimiliter ſectæ.

Corol. 2. Hinc etiam locus punctorum omnium *P* definiri poteſt. Per quodvis punctorum *A, B, C, D,* puta *A,* duc loci tangentem *AE,* & per aliud quodvis punctum *B* duc tangenti parallelam *BF*

occurren-

occurrentem loco in *F*. Invenietur autem punctum *F* per lem. XIX. Biſeca *BF* in *G*, & acta indefinita *AG* erit poſitio diametri ad quam *B G* & *FG* ordinatim applicantur. Hæc *A G* occurrat loco in *H*, & erit *A H* diameter ſive latus tranſverſum, ad quod latus rectum erit ut *BGq* ad *AG* x *GH*. Si *AG* nuſquam occurrit loco, linea *AH* exiſtente infinita, locus erit parabola,



& latus rectum ejus ad diametrum *AG* pertinens erit $\frac{BGq}{AG}$. Sin ea alicubi occurrit, locus hyperbola erit, ubi puncta *A* & *H* ſita ſunt ad eaſdem partes ipſius *G*: & ellipſis, ubi *G* intermedium eſt, niſi forte angulus *A G B* rectus ſit, & inſuper *B G quad.* æquale rectangulo *A G H*, quo in caſu circulus habebitur.

Atque ita problematis veterum de quatuor lineis ab *Euclide* incœpti & ab *Apollonio* continuati non calculus, ſed compoſitio geometrica, qualem veteres quærebant, in hoc corollario exhibetur.

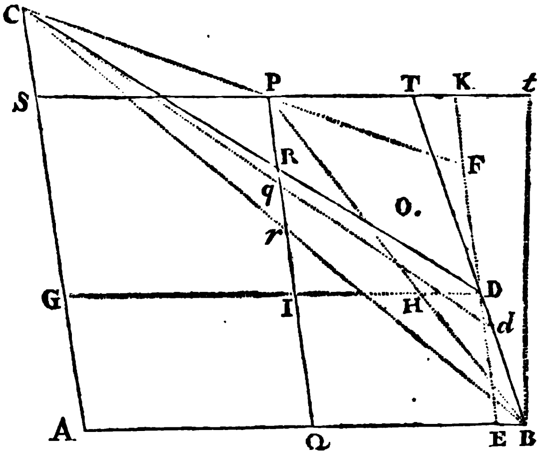
LEMMA XX.

Si parallelogrammum quodvis ASPQ *angulis duobus oppoſitis* A *&* P *tangit ſectionem quamvis conicam in punctis* A *&* P; *&* *lateribus unius angulorum illorum infinite productis* AQ, AS *occurrit eidem ſectioni conicæ in* B *&* C; *a punctis autem occurſuum* B *&* C *ad quintum quodvis ſectionis conicæ punctum* D *agantur rectæ duæ* BD, CD *occurrentes alteris duobus infinite productis parallelogrammi lateribus* PS, PQ *in* T *&* R: *erunt ſemper abſciſſæ laterum partes* PR *&* PT *ad invicem in data ratione. Et contra, ſi partes illæ abſciſſæ ſunt ad invicem in data ratione, punctum* D *tanget ſectionem conicam per puncta quatuor* A, B, C, P *tranſeuntem.*

Caſ.

LIBER PRIMUS.

Caſ. 1. Jungantur *BP*, *CP* & a puncto *D* agantur rectæ duæ *DG*, *DE*, quarum prior *DG* ipſi *AB* parallela ſit & occurrat *PB*, *PQ*, *CA* in *H*, *I*, *G*; altera *DE* parallela ſit ipſi *AC* & occurrat *PC*, *PS*, *AB* in *F*, *K*, *E*: & erit (per lem. XVII.) rectangulum *DE*x*DF* ad rectangulum *DG*x*DH* in ratione data. Sed eſt *PQ* ad *DE* (ſeu *IQ*) ut *PB* ad *HB*, ideoque ut *PT* ad *DH*; & viciſſim *PQ* ad *PT* ut *DE* ad *DH*. Eſt & *PR* ad *DF* ut *RC* ad *DC*, ideoque ut (*IG* vel) *PS* ad *DG*, & viciſſim *PR* ad *PS* ut *DF* ad *DG*; & conjunctis rationibus fit rectangulum *PQ*x*PR* ad rectangulum *PS*x*PT* ut rectangulum *DE* x *DF* ad rectangulum *DG* x *DH*, atque ideo in data ratione. Sed dantur *PQ* & *PS*, & propterea ratio *PR* ad *PT* datur. *Q. E. D.*



Caſ. 2. Quod ſi *PR* & *PT* ponantur in data ratione ad invicem, tum ſimili ratiocinio regrediendo, ſequetur eſſe rectangulum *DE* x *DF* ad rectangulum *DG* x *DH* in ratione data, ideoque punctum *D* (per lem. XVIII.) contingere conicam ſectionem tranſeuntem per puncta *A*, *B*, *C*, *P*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi agatur *BC* ſecans *PQ* in *r*, & in *PT* capiatur *Pt* in ratione ad *Pr* quam habet *PT* ad *PR*: erit *Bt* tangens conicæ ſectionis ad punctum *B*. Nam concipe punctum *D* coire cum puncto *B*, ita ut, chorda *BD* evaneſcente, *BT* tangens evadat; & *CD* ac *BT* coincident cum *CB* & *Bt*.

Corol. 2. Et vice verſa ſi *Bt* ſit tangens, & ad quodvis conicæ ſectionis punctum *D* conveniant *BD*, *CD*; erit *PR* ad *PT* ut *Pr* ad *Pt*. Et contra, ſi ſit *PR* ad *PT* ut *Pr* ad *Pt*: convenient, *BD*, *CD* ad conicæ ſectionis punctum aliquod *D*.

Corol. 3. Conica ſectio non ſecat conicam ſectionem in punctis pluribus quam quatuor. Nam, ſi fieri poteſt, tranſeant duæ conicæ ſectiones per quinque puncta *A*, *B*, *C*, *P*, *O*; eaſque ſecet recta *BD* in punctis *D*, *d*, & ipſam *PQ* ſecet recta *Cd* in *q*. Ergo *PR* eſt ad

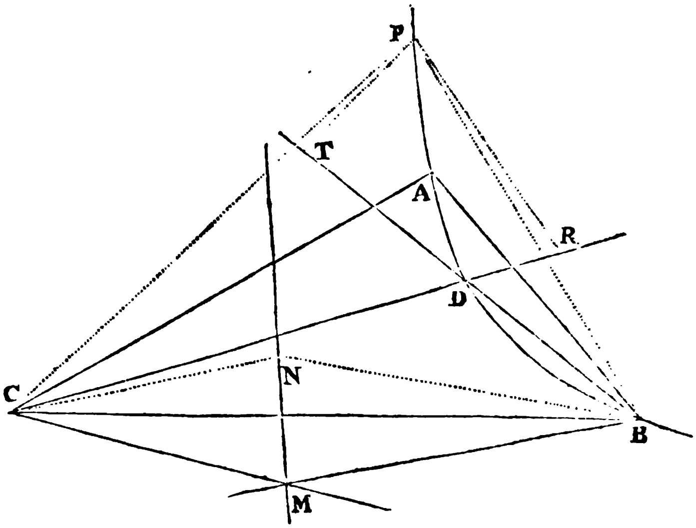
PT

PT ut *Pq* ad *PT*; unde *PR* & *Pq* ſibi invicem æquantur, contra hypotheſin.

LEMMA XXI.

Si rectæ duæ mobiles & infinitæ BM, CM *per data puncta* B, C *ceu polos ductæ, concurſu ſuo* M *deſcribant tertiam poſitione datam rectam* MN; *& aliæ duæ infinitæ rectæ* BD, CD *cum prioribus duabus ad puncta illa data* B, C *datos angulos* MBD, MCD *efficientes ducantur: dico quod hæ duæ* BD, CD *concurſu ſuo* D *deſcribent ſectionem conicam per puncta* B, C *tranſeuntem. Et vice verſa, ſi rectæ* BD, CD *concurſu ſuo* D *deſcribant ſectionem conicam per data puncta* B, C, A *tranſeuntem, & ſit angulus* DBM *ſemper æqualis angulo dato* ABC, *anguluſque* DCM *ſemper æqualis angulo dato* ACB: *punctum* M *continget rectam poſitione datam.*

Nam in recta *MN* detur punctum *N*, & ubi punctum mobile *M* incidit in immotum *N*, incidat punctum mobile *D* in immotum *P*.

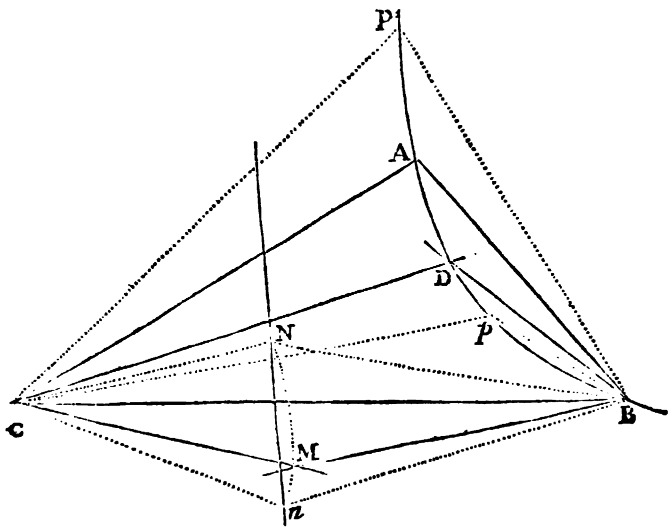


Junge *CN*, *BN*, *CP*, *BP*, & a puncto *P* age rectas *PT*, *PR* occurrentes ipſis *BD*, *CD* in *T* & *R*, & facientes angulum *BPT*

æqualem

æqualem angulo dato *BNM*, & angulum *CPR* æqualem angulo dato *CNM*. Cum ergo (ex hypotheſi) æquales ſint anguli *MBD*, *NBP*, ut & anguli *MCD*, *NCP*; aufer communes *NBD* & *NCD*, & reſtabunt æquales *NBM* & *PBT*, *NCM* & *PCR*: ideoque triangula *NBM*, *PBT* ſimilia ſunt, ut & triangula *NCM*, *PCR*. Quare *PT* eſt ad *NM* ut *PB* ad *NB*, & *PR* ad *NM* ut *PC* ad *NC*. Sunt autem puncta *B*, *C*, *N*, *P* immobilia. Ergo *PT* & *PR* datam habent rationem ad *NM*, proindeque datam rationem inter ſe; atque ideo (per lem. xx.) punctum *D*, perpetuus rectarum mobilium *BT* & *CR* concurſus, contingit ſectionem conicam, per puncta *B*, *C*, *P* tranſeuntem. *Q. E. D.*

Et contra, ſi punctum mobile *D* contingat ſectionem conicam tranſeuntem per data puncta *B*, *C*, *A*, & ſit angulus *DBM* ſemper æqualis angulo dato *ABC*, & angulus *DCM* ſemper æqualis angulo dato *ACB*, & ubi punctum *D* incidit ſucceſſive in duo quævis ſectionis puncta immobilia *p*, *P*, punctum mobile *M* incidat ſucceſſive in puncta duo immobilia *n*, *N*: per eadem *n*, *N* agatur



recta *nN*, & hæc erit locus perpetuus puncti illius mobilis *M*. Nam, ſi fieri poteſt, verſetur punctum *M* in linea aliqua curva. Tanget ergo punctum *D* ſectionem conicam per puncta quinque *B*, *C*, *A*, *p*, *P* tranſeuntem, ubi punctum *M* perpetuo tangit lineam curvam. Sed & ex jam demonſtratis tanget etiam punctum *D* ſectionem conicam per eadem quinque puncta *B*, *C*, *A*, *p*, *P*, tranſeuntem, ubi

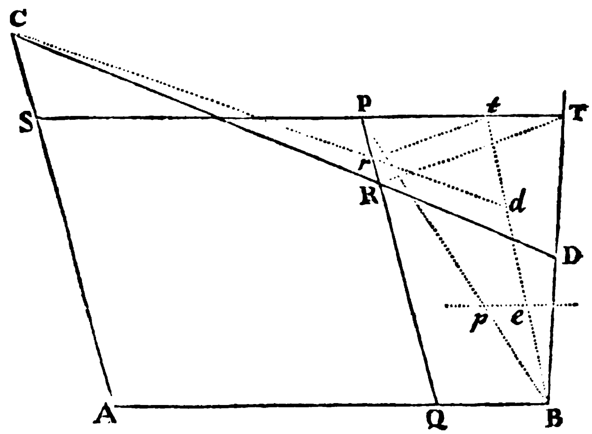
M punctum

punctum *M* perpetuo tangit lineam rectam. Ergo duæ ſectiones conicæ tranſibunt per eadem quinque puncta, contra corol 3. lemmat. xx. Igitur punctum *M* verſari in linea curva abſurdum eſt. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXII. PROBLEMA XIV.

Trajectoriam per data quinque puncta deſcribere.

Dentur puncta quinque *A*, *B*, *C*, *P*, *D*. Ab eorum aliquo *A* ad alia duo quævis *B*, *C*, quæ poli nominentur, age rectas *AB*, *AC*, hiſque parallelas *TPS*, *PRQ* per punctum quartum *P*. Deinde a polis duobus *B*, *C* age per punctum quintum *D* infinitas duas *BDT*, *CRD*, noviſſime ductis *TPS*, *PRQ* (priorem priori & poſteriorem poſteriori) occurrentes in *T* & *R*. Denique de rectis *PT*, *PR*, acta recta *tr* ipſi *TR* parallela, abſcinde quaſvis *Pt*, *Pr* ipſis *PT*, *PR* proportionales; & ſi per earum terminos *t*, *r* & polos *B*, *C* actæ *Bt*, *Cr* concurrant in *d*, locabitur punctum illud *d* in trajectoria quæſita.

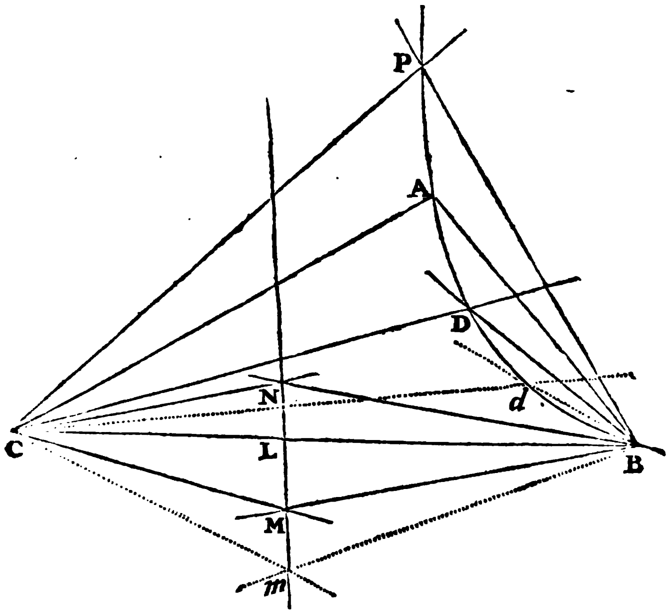


Nam punctum illud *d* (per lem. xx.) verſatur in conica ſectione per puncta quatuor *A*, *B*, *C*, *P* tranſeunte; & lineis *Rr*, *Tt* evaneſcentibus, coit punctum *d* cum puncto *D*. Tranſit ergo ſectio conica per puncta quinque *A*, *B*, *C*, *P*, *D*. *Q. E. D.*

Idem aliter.

E punctis datis junge tria quævis *A*, *B*, *C*; & circum duo eorum *B*, *C*, ceu polos, rotando angulos magnitudine datos *ABC*, *ACB*, applicentur crura *BA*, *CA* primo ad punctum *D*, deinde ad punctum

ctum *P*, & notentur puncta *M*, *N* in quibus altera crura *BL*, *CL* caſu utroque ſe decuſſant. Agatur recta infinita *MN*, & rotentur anguli illi mobiles circum polos ſuos *B*, *C*, ea lege ut crurum *BL*, *CL* vel *BM*, *CM* interſectio, quæ jam ſit *m*, incidat ſemper in rectam illam infinitam *MN*; & crurum *BA*, *CA*, vel *BD*, *CD* interſectio, quæ jam ſit *d*, trajectoriam quæſitam *PADdB* delineabit. Nam punctum *d* (per lem. XXI.) continget ſectionem conicam



per puncta *B*, *C* tranſeuntem; & ubi punctum *m* accedit ad puncta *L*, *M*, *N*, punctum *d* (per conſtructionem) accedet ad puncta *ADP*. Deſcribetur itaque ſectio conica tranſiens per puncta quinque *A*, *B*, *C*, *P*, *D*. *Q. E. F.*

Corol. 1. Hinc recta expedite duci poteſt, quæ trajectoriam quæſitam in puncto quovis dato *B* continget. Accedat punctum *d* ad punctum *B*, & recta *Bd* evadet tangens quæſita.

Corol. 2. Unde etiam trajectoriarum centra, diametri & latera recta inveniri poſſunt, ut in corollario ſecundo lemmatis XIX.

Scholium.

Conſtructio prior evadet paulo ſimplicior jungendo *BP*, & in ea, ſi opus eſt, producta capiendo *Bp* ad *BP* ut eſt *PR* ad *PT*; & per *p* agendo rectam infinitam *pe* ipſi *SPT* parallelam, & in ea

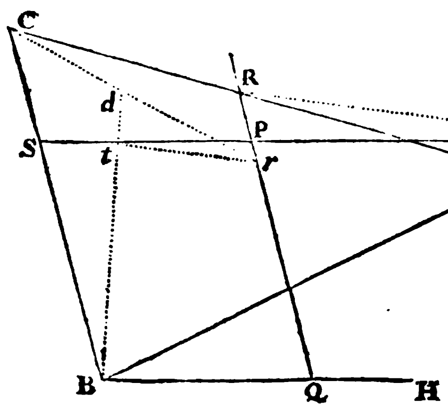
 capiendo

capiendo ſemper *p e* æqualem *P r*; & agendo rectas *B e*, *C r* concurrentes in *d*. Nam cum ſint *P r* ad *P t*, *P R* ad *P T*, *p B* ad *P B*, *p e* ad *P t* in eadem ratione; erunt *p e* & *P r* ſemper æquales. Hac methodo puncta trajectoriæ inveniuntur expeditiſſime, niſi mavis curvam, ut in conſtructione ſecunda, deſcribere mechanice.

PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA XV.

Trajectoriam deſcribere, quæ per data quatuor puncta tranſibit, & rectam continget poſitione datam.

Caſ. 1. Dentur tangens *H B*, punctum contactus *B*, & alia tria puncta *C*, *D*, *P*. Junge *B C*, & agendo *P S* parallelam rectæ *B H*, & *P Q* parallelam rectæ *B C*, comple parallelogrammum *B S P Q*. Age *B D* ſecantem *S P* in *T*, & *C D* ſecantem *P Q* in *R*. Deni-

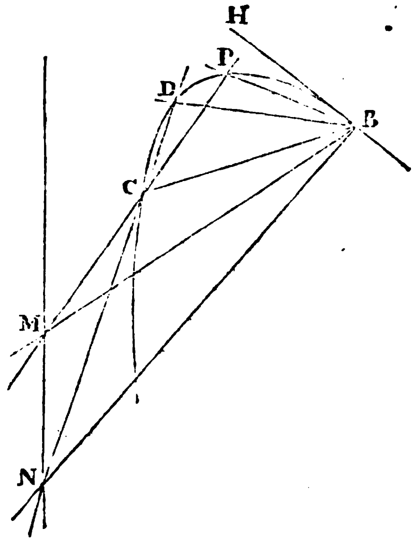


que, agendo quamvis *t r* ipſi *T R* parallelam, de *P Q*, *P S* abſcinde *P r*, *P t* ipſis *P R*, *P T* proportionales reſpective; & actarum *C r*, *B t* concurſus *d* (per lem. xx.) incidet ſemper in trajectoriam deſcribendam.

Idem aliter.

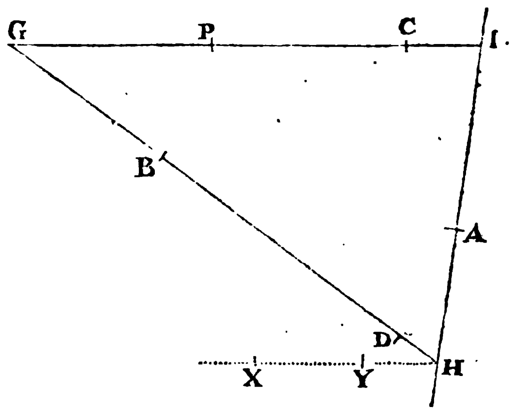
Revolvatur tum angulus magnitudine datus *C B H* circa polum *B*, tum radius quilibet rectilineus & utrinque productus *D C* circa polum *C*. Notentur puncta *M*, *N*, in quibus anguli crus *B C* ſecat radium illum, ubi crus alterum *B H* concurrit cum eodem radio in punctis *P* & *D*. Deinde ad actam infinitam *M N* concurrant perpetuo

petuo radius ille *CP* vel *CD* & anguli crus *BC*, & cruris alterius *BH* concurſus cum radio delineabit trajectoriam quæſitam.



Nam ſi in conſtructionibus problematis ſuperioris accedat punctum *A* ad punctum *B*, lineæ *CA* & *CB* coincident, & linea *AB* in ultimo ſuo ſitu fiet tangens *BH*; atque ideo conſtructiones ibi poſitæ evadent eædem cum conſtructionibus hic deſcriptis. Delineabit igitur cruris *BH* concurſus cum radio ſectionem conicam per puncta *C*, *D*, *P* tranſeuntem, & rectam *BH* tangentem in puncto *B*. *Q. E. F.*

Caſ. 2. Dentur puncta quatuor *B*, *C*, *D*, *P* extra tangentem *HI* ſita. Junge bina lineis *BD*, *CP* concurrentibus in *G*, tangentique occurrentibus in *H* & *I*. Secetur tangens in *A*, ita ut ſit *HA* ad *IA*, ut eſt rectangulum ſub media proportionali inter *CG* & *GP* & media proportionali inter *BH* & *HD*, ad rectangulum ſub media proportionali inter *DG* & *GB* & media proportionali inter *PI* & *IC*; & erit *A* punctum contactus. Nam ſi rectæ *PI* parallela *HX* trajectoriam ſecet in punctis quibuſvis *X* & *Y*: erit (ex conicis) punctum *A* ita locandum, ut fuerit *HA quad.* ad *AI quad.* in ratione compoſita ex ratione rectanguli *XHY* ad rectangulum *BHD*, ſeu rectanguli *CGP* ad rectangulum *DGB*, & ex ratione rectanguli *BHD* ad rectangulum *PIC*. Invento autem contactus puncto *A*, deſcribetur trajectoria ut in caſu primo. *Q. E. F.*



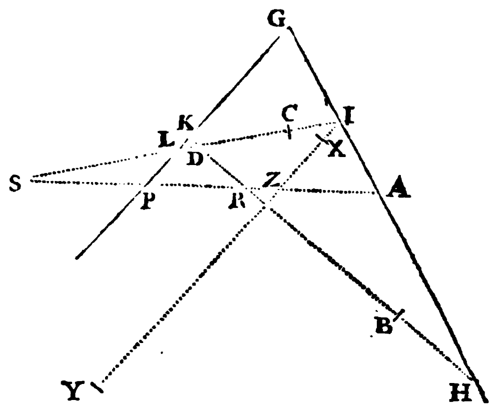
Capi autem poteſt punctum *A* vel inter puncta *H* & *I*, vel extra; & perinde trajectoria dupliciter deſcribi.

PROPO-

PROPOSITIO XXIV PROBLEMA XVI.

Trajectoriam deſcribere, quæ tranſibit per data tria puncta, & rectas duas poſitione datas continget.

Dentur tangentes *HI*, *KL* & puncta *B*, *C*, *D*. Per punctorum duo quævis *B*, *D* age rectam infinitam *BD* tangentibus occurrentem in punctis *H*, *K*. Deinde etiam per alia duo quævis *C*, *D* age infinitam *CD* tangentibus occurrentem in punctis *I*, *L*. Actas ita ſeca in *R* & *S*, ut ſit *HR* ad *KR* ut eſt media proportionalis inter *BH* & *HD* ad mediam proportionalem inter *BK* & *KD*; & *IS* ad *LS* ut eſt media proportionalis inter *CI* & *ID* ad mediam proportionalem inter *CL* & *LD*. Seca autem pro lubitu vel inter puncta *K* & *H*, *I* & *L*, vel extra eadem; dein age *RS* ſecantem tangentes in *A* & *P*, & erunt *A* & *P* puncta contactuum. Nam ſi *A* & *P* ſupponantur eſſe puncta contactuum alicubi in tangentibus ſita; & per punctorum *H*, *I*, *K*, *L* quodvis *I*, in tangente alterutra *HI* ſitum, agatur recta *IY* tangenti alteri *KL* parallela, quæ occurrat curvæ in *X* & *Y*, & in ea ſumatur *IZ* media proportionalis inter *IX* & *IY*: erit, ex conicis, rectangulum *XIY* ſeu *IZ quad.* ad *LP quad.* ut rectangulum *CID* ad rectangulum *CLD*, id eſt (per conſtructionem) ut *SI quad.* ad *SL quad.* atque ideo *IZ* ad *LP* ut *SI* ad *SL*. Jacent ergo puncta *S*, *P*, *Z* in una recta. Porro tangentibus concurrentibus in *G*, erit (ex conicis) rectangulum *XIY* ſeu *IZ quad.* ad *IA quad.* ut *GP quad.* ad *GA quad.* ideoque *IZ* ad *IA* ut *GP* ad *GA*. Jacent ergo puncta *P*, *Z* & *A* in una recta, ideoque puncta *S*, *P* & *A* ſunt in una recta. Et eodem argumento probabitur quod puncta *R*, *P* & *A* ſunt in una recta. Jacent igitur puncta contactuum *A* & *P* in recta *RS*. Hiſce autem inventis, trajectoria deſcribetur ut in caſu primo problematis ſuperioris. *Q. E. F.*



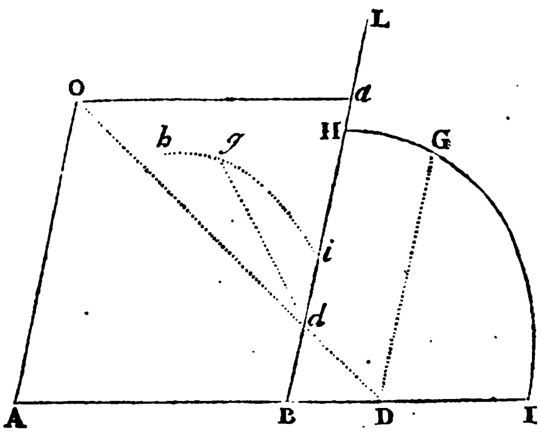
In

In hac propoſitione, & caſu ſecundo propoſitionis ſuperioris conſtructiones eædem ſunt, ſive recta *XY* trajectoriam ſecet in *X* & *Y*, ſive non ſecet; eæque non pendent ab hac ſectione. Sed demonſtratis conſtructionibus ubi recta illa trajectoriam ſecat, innoteſcunt conſtructiones, ubi non ſecat; iiſque ultra demonſtrandis brevitatis gratia non immoror.

LEMMA XXII.

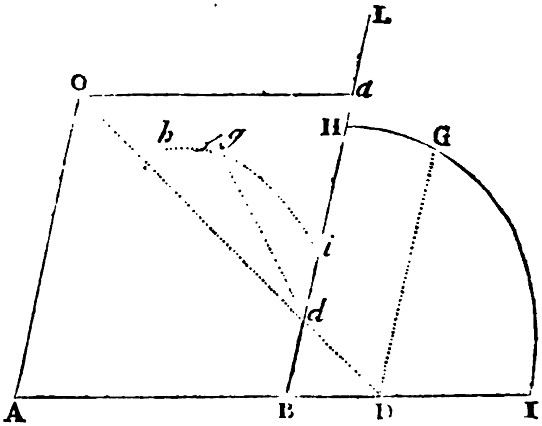
Figuras in alias ejuſdem generis figuras mutare.

Tranſmutanda ſit figura quævis *HGI*. Ducantur pro lubitu rectæ duæ parallelæ *AO*, *BL* tertiam quamvis poſitione datam *AB* ſecantes in *A* & *B*, & a figuræ puncto quovis *G*, ad rectam *AB* ducatur quævis *GD*, ipſi *OA* parallela. Deinde a puncto aliquo *O*, in linea *OA* dato, ad punctum *D* ducatur recta *OD*, ipſi *BL* occurrens in *d*, & a puncto occurſus erigatur recta *dg* datum quemvis angulum cum recta *BL* continens, atque eam habens rationem ad *Od* quam habet *DG* ad *OD*; & erit *g* punctum in figura nova *bgi* puncto *G* reſpondens. Eadem ratione puncta ſingula figuræ primæ dabunt puncta totidem figuræ novæ. Concipe igitur punctum *G* motu continuo percurrere puncta omnia figuræ primæ, & punctum *g* motu itidem continuo percurret puncta omnia figuræ novæ & eandem deſcribet. Diſtinctionis gratia nominemus *DG* ordinatam primam, *dg* ordinatam novam; *AD* abſciſſam primam, *ad* abſciſſam novam; *O* polum, *OD* radium abſcindentem, *OA* radium ordinatum primum, & *Oa* (quo parallelogrammum *OABa* completur) radium ordinatum novum.



Dico jam quod, ſi punctum *G* tangit rectam lineam poſitione datam, punctum *g* tanget etiam lineam rectam poſitione datam. Si punctum *G* tangit conicam ſectionem, punctum *g* tanget etiam conicam ſectionem. Conicis ſectionibus hic circulum annumero. Porro

ro ſi punctum *G* tangit lineam tertii ordinis analytici, punctum *g* tanget lineam tertii itidem ordinis; & ſic de curvis lineis ſuperiorum ordinum. Lineæ duæ erunt ejuſdem ſemper ordinis analytici quas puncta *G*, *g* tangunt. Etenim ut eſt *ad* ad *OA* ita ſunt *Od* ad *OD*, *dg* ad *DG*, & *AB* ad *AD*; ideoque *AD* æqualis eſt $\frac{OA \times AB}{ad}$, & *DG* æqualis eſt $\frac{OA \times dg}{ad}$. Jam ſi punctum *G* tangit rectam lineam, atque ideo in æquatione quavis, qua relatio inter abſciſſam *AD* & ordinatam *DG* habetur, indeterminatæ illæ *AD* & *DG* ad unicam tantum dimenſionem aſcendunt, ſcribendo in hac æquatione $\frac{OA \times AB}{ad}$ pro *AD*, & $\frac{OA \times dg}{ad}$ pro *DG*, producetur æquatio nova, in qua abſciſſa nova *ad* & ordinata nova *dg* ad unicam tantum dimenſionem aſcendent, atque ideo quæ deſignat lineam rectam. Sin *AD* & *DG*, vel earum alterutra, aſcendebant ad duas dimenſiones in æquatione prima, aſcendent itidem *ad* & *dg* ad duas in æquatione ſecunda. Et ſic de tribus vel pluribus dimenſionibus. Indeterminatæ *ad*, *dg* in æquatione ſecunda, & *AD*, *DG* in prima aſcendent ſemper ad eundem dimenſionum numerum, & propterea lineæ, quas puncta *G*, *g* tangunt, ſunt ejuſdem ordinis analytici.



Dico præterea, quod ſi recta aliqua tangat lineam curvam in figura prima; hæc recta eodem modo cum curva in figuram novam tranſlata tanget lineam illam curvam in figura nova; & contra. Nam ſi curvæ puncta quævis duo accedunt ad invicem & coeunt in figura prima, puncta eadem tranſlata accedent ad invicem & coibunt in figura nova; atque ideo rectæ, quibus hæc puncta junguntur, ſimul evadent curvarum tangentes in figura utraque.

Componi poſſent harum aſſertionum demonſtrationes more magis geometrico. Sed brevitati conſulo.

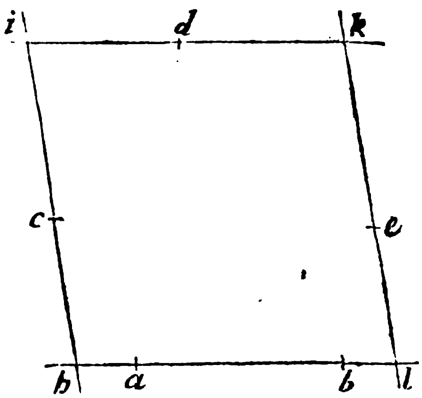
Igitur

Igitur ſi figura rectilinea in aliam tranſmutanda eſt, ſufficit rectarum, a quibus conflatur, interſectiones transferre, & per eaſdem in figura nova lineas rectas ducere. Sin curvilineam tranſmutare oportet, transferenda ſunt puncta, tangentes, & aliæ rectæ, quarum ope curva linea definitur. Inſervit autem hoc lemma ſolutioni difficiliorum problematum, tranſmutando figuras propoſitas in ſimpliciores. Nam rectæ quævis convergentes tranſmutantur in parallelas, adhibendo pro radio ordinato primo lineam quamvis rectam, quæ per concurſum convergentium tranſit; idque quia concurſus ille hoc pacto abit in infinitum; lineæ autem parallelæ ſunt, quæ nuſquam concurrunt. Poſtquam autem problema ſolvitur in figura nova; ſi per inverſas operationes tranſmutetur hæc figura in figuram primam, habebitur ſolutio quæſita.

Utile eſt etiam hoc lemma in ſolutione ſolidorum problematum. Nam quoties duæ ſectiones conicæ obvenerint, quarum interſectione problema ſolvi poteſt, tranſmutare licet earum alterutram, ſi hyperbola ſit vel parabola, in ellipſin: deinde ellipſis facile mutatur in circulum. Recta item & ſectio conica, in conſtructione planorum problematum, vertuntur in rectam & circulum.

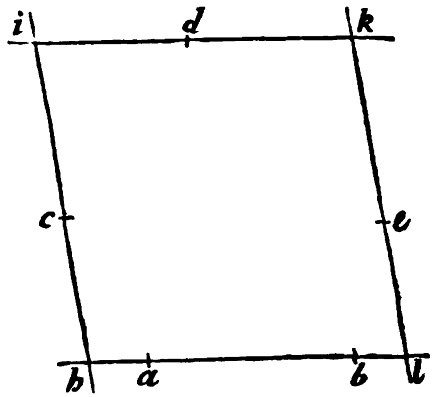
PROPOSITIO XXV. PROBLEMA XVII.

Trajectoriam deſcribere, quæ per data duo puncta tranſibit, & rectas tres continget poſitione datas.



Per concurſum tangentium quarumvis duarum cum ſe invicem, & concurſum tangentis tertiæ cum recta illa, quæ per puncta duo data tranſit, age rectam infinitam; eaque adhibita pro radio ordinato primo, tranſmutetur figura, per lemma ſuperius, in figuram novam. In hac figura tangentes illæ duæ evadent ſibi invicem parallelæ, & tangens tertia fiet parallela rectæ per puncta duo data tranſeunti. Sunto *h i*, *k l* tangentes illæ duæ parallelæ, *i k* tangens tertia, & *h l* recta huic

parallela tranſiens per puncta illa *a*, *b*, per quæ conica ſectio in hac figura nova tranſire debet, & parallelogrammum *h i k l* complens. Secentur rectæ *h i*, *i k*, *k l* in *c*, *d*, *e*, ita ut ſit *h c* ad latus quadratum rectanguli *a h b*, *i c* ad *i d*, & *k e* ad *k d* ut eſt ſumma rectarum *h i* & *k l* ad ſummam trium linearum, quarum prima eſt recta *i k*, & alteræ duæ ſunt latera quadrata rectangulorum *a h b* & *a l b*: & erunt *c*, *d*, *e* puncta contactuum. Etenim, ex conicis, ſunt *h c* quadratum ad rectangulum *a h b*, & *i c* quadratum ad *i d* quadratum, & *k e* quadratum ad *k d* quadratum, & *e l* quadratum ad rectangulum *a l b* in eadem ratione; & propterea *h c* ad latus quadratum ipſius *a h b*, *i c* ad *i d*, *k e* ad *k d*, & *e l* ad latus quadratum ipſius *a l b* ſunt in ſubduplicata illa ratione, & compoſite, in data ratione omnium antecedentium *h i* & *k l* ad omnes conſequentes, quæ ſunt latus quadratum rectanguli *a h b*, & recta *i k*, & latus quadratum rectanguli *a l b*. Habentur igitur ex data illa ratione puncta contactuum *c*, *d*, *e*, in figura nova. Per inverſas operationes lemmatis noviſſimi transferantur hæc puncta in figuram primam, & ibi (per prob. XIV.) deſcribetur trajectoria. *Q. E. F.* Cæterum perinde ut puncta *a*, *b* jacent vel inter puncta *h*, *l*, vel extra, debent puncta *c*, *d*, *e* vel inter puncta *h*, *i*, *k*, *l* capi, vel extra. Si punctorum *a*, *b* alterutrum cadit inter puncta *h*, *l*, & alterum extra, problema impoſſibile eſt.

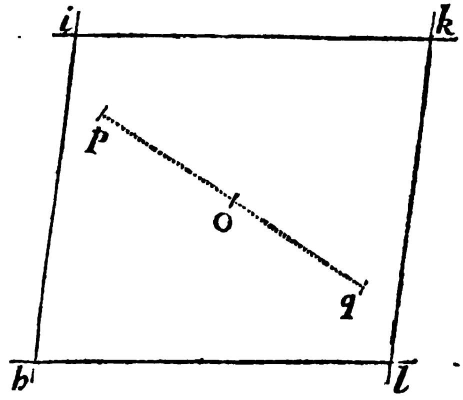


PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA XVIII.

Trajectoriam deſcribere, quæ tranſibit per punctum datum, & rectas quatuor poſitione datas continget.

Ab interſectione communi duarum quarumlibet tangentium ad interſectionem communem reliquarum duarum agatur recta infinita, & eadem pro radio ordinato primo adhibita, tranſmutetur figura (per lem. XXII.) in figuram novam, & tangentes binæ, quæ ad radium ordinatum primum concurrebant, jam evadent parallelæ. Sunto

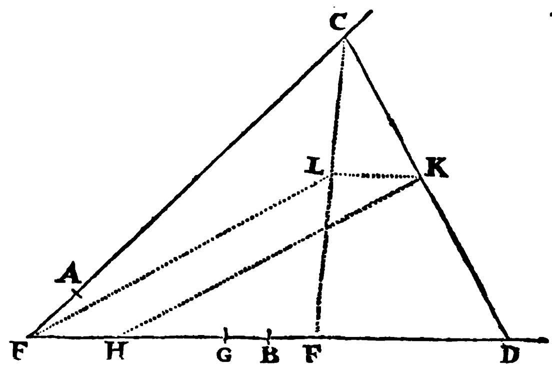
to illæ *b i* & *k l*, *i k* & *b l* continentes parallelogrammum *b i k l*. Sitque *p* punctum in hac nova figura puncto in figura prima dato reſpondens. Per figuræ centrum *O* agatur *p q*, & exiſtente *O q* æquali *O p*, erit *q* punctum alterum per quod ſectio conica in hac figura nova tranſire debet. Per lemmatis XXII. operationem inverſam transferatur hoc punctum in figuram primam, & ibi habebuntur puncta duo per quæ trajectoria deſcribenda eſt. Per eadem vero deſcribi poteſt trajectoria illa per problema XVII. *Q. E. F.*



LEMMA XXIII.

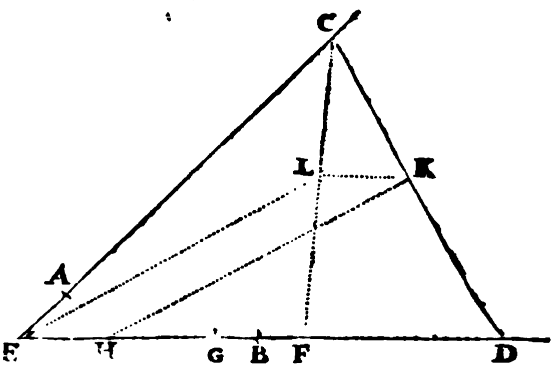
Si rectæ duæ poſitione datæ AC, BD *ad data puncta* A, B, *terminentur, datamque habeant rationem ad invicem, &* *recta* CD, *qua puncta indeterminata* C, D *junguntur, ſecetur in ratione data in* K: *dico quod punctum* K *locabitur in recta poſitione data.*

Concurrant enim rectæ *AC*, *BD* in *E*, & in *BE* capiatur *BG* ad *AE* ut eſt *BD* ad *AC*, ſitque *FD* ſemper æqualis datæ *EG*; & erit ex conſtructione *EC* ad *GD*, hoc eſt, ad *EF* ut *AC* ad *BD*, ideoque in ratione data, & propterea dabitur ſpecie triangulum *EFC*. Secetur *CF* in *L* ut ſit *CL* ad *CF* in ratione *CK* ad *CD*; & ob datam illam rationem, dabitur etiam ſpecie triangulum *EFL*; proindeque punctum *L* locabitur in recta *EL* poſitione data. Junge *LK*, & ſimilia erunt triangula *CLK*, *CFD*; & ob datam *FD* & datam rationem *LK* ad *FD*, dabitur *LK*. Huic



 æqualis

æqualis capiatur *EH*, & erit ſemper *ELKH* parallelogrammum. Locatur igitur punctum *K* in parallelogrammi illius latere poſitione dato *HK*. *Q.E.D.*

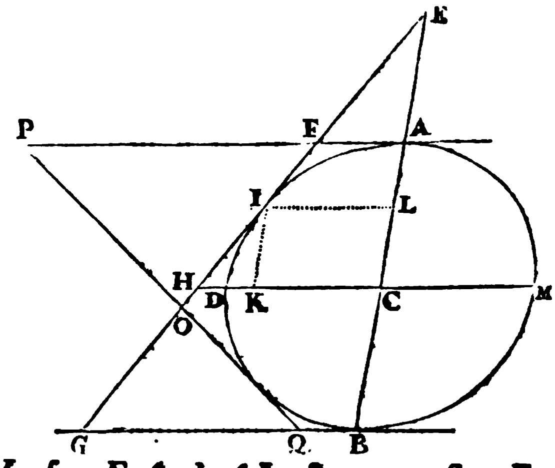


Corol. Ob datam ſpecie figuram *EFLC*, rectæ tres *EF*, *EL* & *EC*, id eſt, *GD*, *HK* & *EC*, datas habent rationes ad invicem.

LEMMA XXIV.

Si rectæ tres tangant quamcunque coni ſectionem, quarum duæ parallelæ ſint ac dentur poſitione; dico quod ſectionis ſemidiameter hiſce duabus parallela, ſit media proportionalis inter harum ſegmenta, punctis contactuum & tangenti tertiæ interjecta.

Sunto *AF*, *GB* parallelæ duæ coni ſectionem *ADB* tangentes in *A* & *B*; *EF* recta tertia coni ſectionem tangens in *I*, & occurrens prioribus tangentibus in *F* & *G*; ſitque *CD* ſemidiameter figuræ tangentibus parallela: dico quod *AF*, *CD*, *BG* ſunt continue proportionales.



Nam ſi diametri conjugatæ *AB*, *DM* tangenti *FG* occurrant in *E* & *H*, ſeque mutuo ſecent in *C*, & compleatur parallelogrammum *IKCL*; erit ex natura ſectionum conicarum ut *EC* ad *CA* ita *CA* ad *CL*, & ita diviſim *EC*—*CA* ad *CA*—*CL*, ſeu *EA* ad *AL*, & compoſite *EA* ad *EA*+*AL* ſeu *EL* ut *EC* ad *EC*+*CA* ſeu *EB*; ideoque, ob ſimilitudinem triangulorum *EAF*, *ELI*, *ECH*, *EBG*, *AF* ad

LI ut

L I ut *CH* ad *BG*. Eſt itidem, ex natura ſectionum conicarum, *L I* ſeu *CK* ad *CD* ut *CD* ad *CH*; atque ideo ex æquo perturbate *AF* ad *CD* ut *CD* ad *BG*. *Q. E. D.*

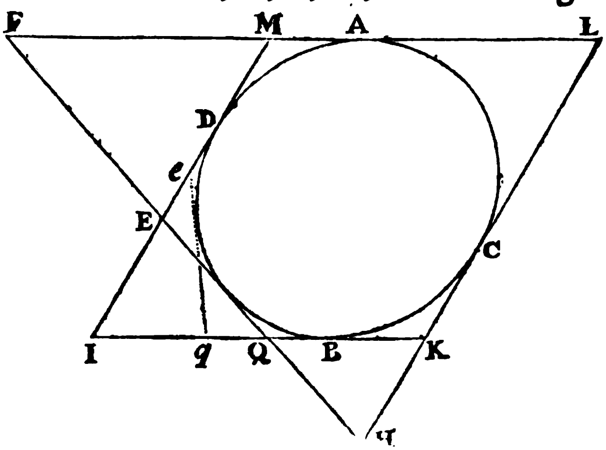
Corol. 1. Hinc ſi tangentes duæ *FG*, *PQ* tangentibus parallelis *AF*, *BG* occurrant in *F* & *G*, *P* & *Q*, ſeque mutuo ſecent in *O*; erit ex æquo perturbate *AF* ad *BQ* ut *AP* ad *BG*, & diviſim ut *FP* ad *GQ*, atque ideo ut *FO* ad *OG*.

Corol. 2. Unde etiam rectæ duæ *PG*, *FQ*, per puncta *P* & *G*, *F* & *Q* ductæ, concurrent ad rectam *ACB* per centrum figuræ & puncta contactuum *A*, *B* tranſeuntem.

LEMMA XXV.

Si parallelogrammi latera quatuor infinite producta tangant ſectionem quamcunque conicam, & abſcindantur ad tangentem quamvis quintam; ſumantur autem laterum quorumvis duorum conterminorum abſciſſæ terminatæ ad angulos oppoſitos parallelogrammi: dico quod abſciſſa alterutra ſit ad latus illud a quo eſt abſciſſa, ut pars lateris alterius contermini inter punctum contactus & latus tertium eſt ad abſciſſarum alteram.

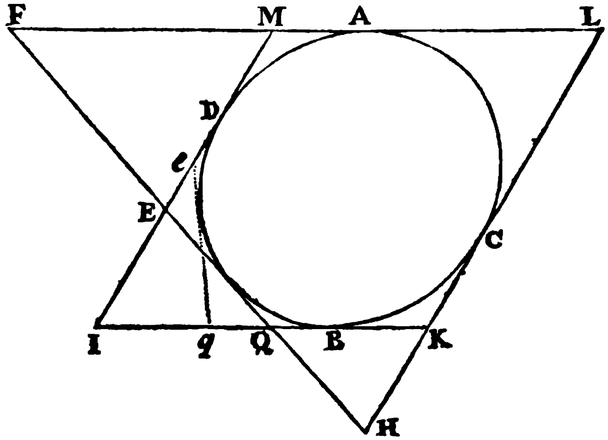
Tangant parallelogrammi *MLIK* latera quatuor *ML*, *IK*, *KL*, *MI* ſectionem conicam in *A*, *B*, *C*, *D*, & ſecet tangens quinta *FQ*



hæc latera in *F*, *Q*, *H* & *E*; ſumantur autem laterum *MI*, *KI* abſciſſæ

abſciſſæ *ME*, *KQ*, vel laterum *KL*, *ML* abſciſſæ *KH*, *MF*: dico quod ſit *ME* ad *MI* ut *BK* ad *KQ*; & *KH* ad *KL* ut *AM* ad *MF*. Nam per corollarium primum lemmatis ſuperioris eſt *ME* ad *EI* ut *AM* ſeu *BK* ad *BQ*, & componendo *ME* ad *MI* ut *BK* ad *KQ*. *Q. E. D.* Item *KH* ad *HL* ut *BK* ſeu *AM* ad *AF*, & dividendo *KH* ad *KL* ut *AM* ad *MF*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi datur parallelogrammum *IKLM*, circa datam ſectionem conicam deſcriptum, dabitur rectangulum *KQ*x*ME*, ut & huic æquale rectangulum *KH*x*MF*. Æquantur enim rectangula illa ob ſimilitudinem triangulorum *KQH*, *MFE*.



Corol. 2. Et ſi ſexta ducatur tangens *eq* tangentibus *KI*, *MI* occurrens in *q* & *e*; rectangulum *KQ*x*ME* æquabitur rectangulo *Kq*x*Me*; eritque *KQ* ad *Me* ut *Kq* ad *ME*, & diviſim ut *Qq* ad *Ee*.

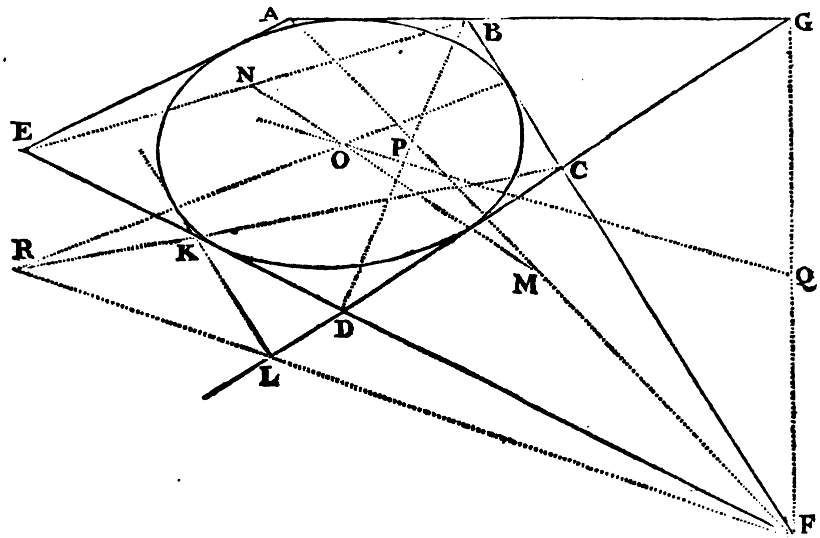
Corol. 3. Unde etiam ſi *Eq*, *eQ* jungantur & biſecentur, & recta per puncta biſectionum agatur, tranſibit hæc per centrum ſectionis conicæ. Nam cum ſit *Qq* ad *Ee* ut *KQ* ad *Me*, tranſibit eadem recta per medium omnium *Eq*, *eQ*, *MK* (per lem. XXIII.) & medium rectæ *MK* eſt centrum ſectionis.

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA XIX.

Trajectoriam deſcribere, quæ rectas quinque poſitione datas continget.

Dentur poſitione tangentes *ABG*, *BCF*, *GCD*, *FDE*, *EA*. Figuræ quadrilateræ ſub quatuor quibuſvis contentæ *ABFE* diagonales

gonales *AF*, *BE* biſeca in *M* & *N*, & (per corol. 3. lem. xxv.) recta *MN* per puncta biſectionum acta tranſibit per centrum trajectoriæ. Rurſus figuræ quadrilateræ *BGDF*, ſub aliis quibuſvis quatuor tangentibus contentæ, diagonales (ut ita dicam) *BD*, *GF* biſeca in *P* & *Q*: & recta *PQ* per puncta biſectionum acta tranſibit per centrum trajectoriæ. Dabitur ergo centrum in concurſu biſecantium. Sit illud *O*. Tangenti cuivis *BC* parallelam age *KL*, ad eam diſtantiam ut centrum *O* in medio inter parallelas locetur,



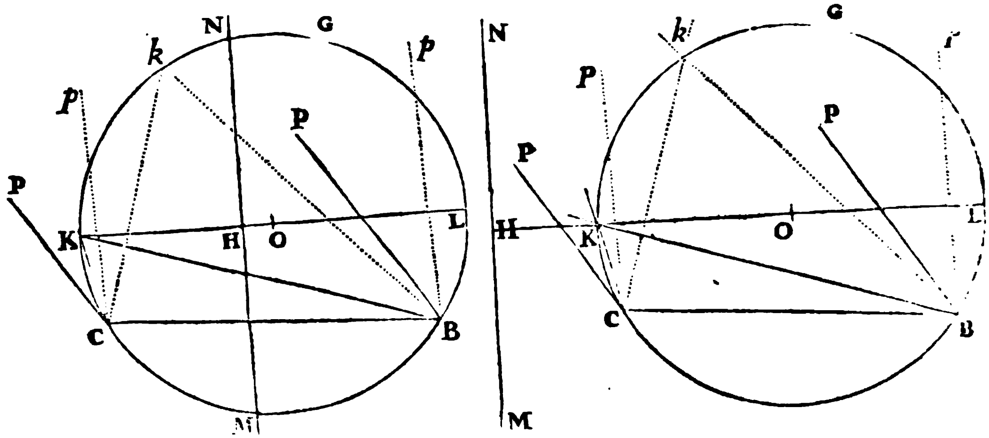
& acta *KL* tanget trajectoriam deſcribendam. Secet hæc tangentes alias quaſvis duas *GCD*, *FDE* in *L* & *K*. Per harum tangentium non parallelarum *CL*, *FK* cum parallelis *CF*, *KL* concurſus *C* & *K*, *F* & *L* age *CK*, *FL* concurrentes in *R*, & recta *OR* ducta & producta ſecabit tangentes parallelas *CF*, *KL* in punctis contactuum. Patet hoc per corol. 2. lem. xxiv. Eadem methodo invenire licet alia contactuum puncta, & tum demum per conſtruct. prob. xiv. trajectoriam deſcribere. *Q. E. F.*

Scholium.

Problemata, ubi dantur trajectoriarum vel centra vel aſymptoti, includuntur in præcedentibus. Nam datis punctis & tangentibus una cum centro, dantur alia totidem puncta aliæque tangentes a centro ex altera ejus parte æqualiter diſtantes. Aſymptotos autem pro tangente habenda eſt, & ejus terminus infinite diſtans (ſi ita loqui

De Motu Corporum qui fas ſit) pro puncto contactus. Concipe tangentis cujuſvis punctum contactus abire in infinitum, & tangens vertetur in Aſymptoton, atque conſtructiones problematum præcedentium vertentur in conſtructiones ubi Aſymptotos datur.

Poſtquam trajectoria deſcripta eſt, invenire licet axes & umbilicos ejus hac methodo. In conſtructione & figura lemmatis xxi. fac ut angulorum mobilium *PBN*, *PCN* crura *BP*, *CP*, quorum concurſu trajectoria deſcribebatur, ſint ſibi invicem parallela, eumque ſervantia ſitum revolvantur circa polos ſuos *B*, *C* in figura illa. Interea vero deſcribant altera angulorum illorum crura *CN*, *BN*, concurſu ſuo *K* vel *k*, circulum *BGKC*. Sit circuli hujus centrum



O. Ab hoc centro ad regulam *MN*, ad quam altera illa crura *CN*, *BN* interea concurrebant, dum trajectoria deſcribebatur, demitte normalem *OH* circulo occurrentem in *K* & *L*. Et ubi crura illa altera *CK*, *BK* concurrunt ad punctum illud *K* quod regulæ propius eſt, crura prima *CP*, *BP* parallela erunt axi majori, & perpendicularia minori; & contrarium eveniet, ſi crura eadem concurrunt ad punctum remotius *L*. Unde ſi detur trajectoriæ centrum, dabuntur axes. Hiſce autem datis, umbilici ſunt in promptu.

Axium vero quadrata ſunt ad invicem ut *KH* ad *LH*, & inde facile eſt trajectoriam ſpecie datam per data quatuor puncta deſcribere. Nam ſi duo ex punctis datis conſtituantur poli *C*, *B*, tertium dabit angulos mobiles, *PCK*, *PBK*; his autem datis deſcribi poteſt circulus *BGKC*. Tum ob datam ſpecie trajectoriam, dabitur ratio *OH* ad *OK*, ideoque ipſa *OH*. Centro *O* & intervallo *OH*

deſcribe

deſcribe alium circulum, & recta, quæ tangit hunc circulum, & tranſit per concurſum crurum CK, BK, ubi crura prima CP, BP concurrunt ad quartum datum punctum, erit regula illa MN cujus ope trajectoria deſcribetur. Unde etiam viciſſim trapezium ſpecie datum (ſi caſus quidam impoſſibiles excipiantur) in data quavis ſectione conica in ſcribi poteſt.

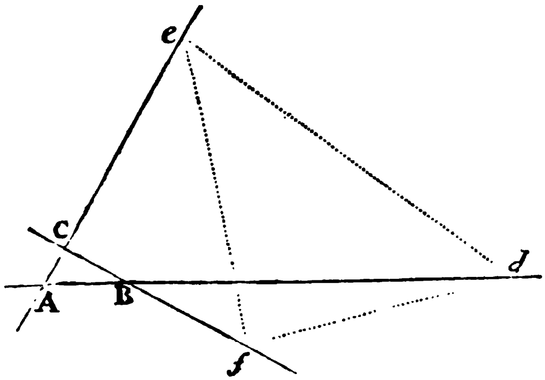
Sunt & alia lemmata quorum ope trajectoriæ ſpecie datæ, datis punctis & tangentibus, deſcribi poſſunt. Ejus generis eſt quod, ſi recta linea per punctum quodvis poſitione datum ducatur, quæ datam coni ſectionem in punctis duobus interſecet, & interſectionum intervallum biſecetur, punctum biſectionis tanget aliam coni ſectionem ejuſdem ſpeciei cum priore, atque axes habentem prioris axibus parallelos. Sed propero ad magis utilia.

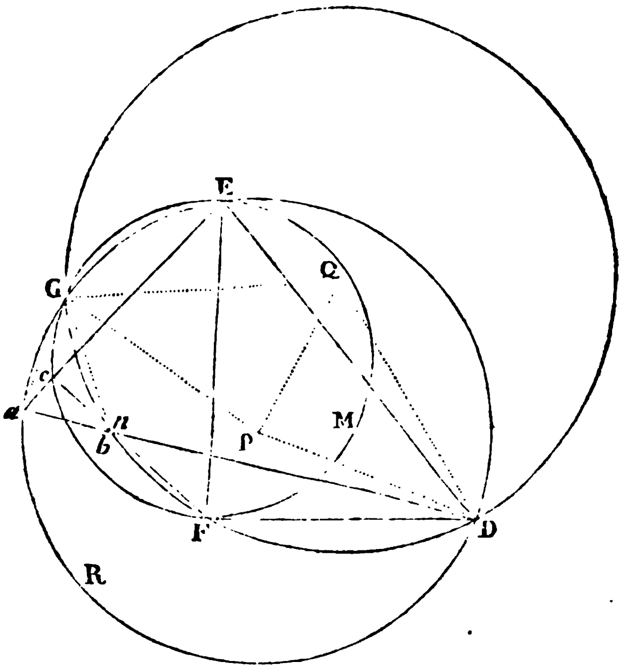
LEMMA XXVI.

Trianguli ſpecie & magnitudine dati tres angulos ad rectas totidem poſitione datas, quæ non ſunt omnes parallelæ, ſingulos ad ſingulas ponere.

Dantur poſitione tres rectæ infinitæ AB, AC, BC, & oportet triangulum DEF ita locare, ut angulus ejus D lineam AB, angulus E lineam AC, & angulus F lineam BC tangat. Super DE, DF & EF deſcribe tria circulorum ſegmenta DRE, DGF, EMF, quæ capiant angulos angulis BAC, ABC, ACB æquales reſpective. Deſcribantur autem hæc ſegmenta ad eas partes linearum DE, DF, EF, ut literæ $DRED$ eodem ordine cum literis $BACB$, literæ $DGFD$ eodem cum literis $ABCA$, & literæ $EMFE$ eodem cum literis $ACBA$ in orbem redeant; deinde compleantur hæc ſegmenta in circulos integros. Secent circuli duo priores ſe mutuo in G, ſintque centra eorum P & Q. Junctis GP, PQ, cape Ga ad AB ut eſt GP ad PQ, & centro G, intervallo Ga deſcribe circulum, qui ſecet circulum primum DGE in a. Jungatur tum aD ſecans circulum ſecundum DFG in b, tum aE ſecans circulum tertium EMF in c. Et jam licet figuram $ABCdef$ conſtituere ſimilem & æqualem figuræ $abcDEF$. Quo facto perficitur problema.

Agatur enim *Fc* ipſi *aD* occurrens in *n*, & jungantur *aG*, *bG*, *QG*, *QD*, *PD*. Ex conſtructione eſt angulus *EaD* æqualis angulo *CAB*, & angulus *acF* æqualis angulo *ACB*, ideoque triangulum *anc* triangulo *ABC* æquiangulum. Ergo angulus *anc* ſeu *FnD* angulo *ABC*, ideoque angulo *FbD* æqualis eſt; & prop-





terea punctum *n* incidit in punctum *b*. Porro angulus *GPQ*, qui dimidius eſt anguli ad centrum *GPD*, æqualis eſt angulo ad circumferentiam *GaD*; & angulus *GQP*, qui dimidius eſt anguli ad centrum *GQD*, æqualis eſt complemento ad duos rectos anguli ad circumferentiam *GbD*, ideoque æqualis angulo *Gba*; ſuntque ideo

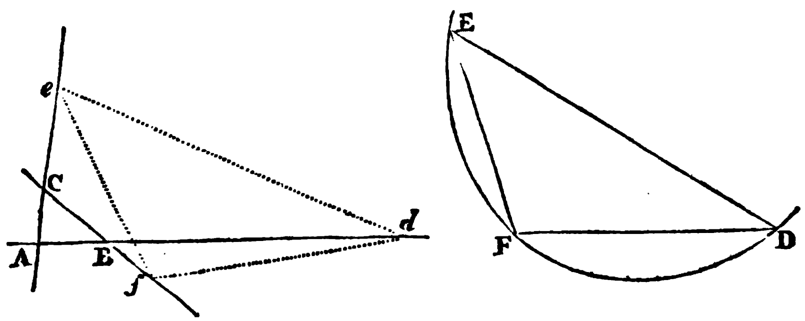
ideo triangula *G P Q*, *G a b* ſimilia; & *G a* eſt ad *a b* ut *G P* ad *P Q*; id eſt (ex conſtructione) ut *G a* ad *A B*. Æquantur itaque *a b* & *A B*; & propterea triangula *a b c*, *A B C*, quæ modo ſimilia eſſe probavimus, ſunt etiam æqualia. Unde, cum tangant inſuper trianguli *D E F* anguli *D*, *E*, *F* trianguli *a b c* latera *a b*, *a c*, *b c* reſpective, compleri poteſt figura *A B C d e f* figuræ *a b c D E F* ſimilis & æqualis, atque eam complendo ſolvetur problema. *Q. E. F.*

Corol. Hinc recta duci poteſt cujus partes longitudine datæ rectis tribus poſitione datis interjacebunt. Concipe triangulum *D E F*, puncto *D* ad latus *E F* accedente, & lateribus *D E*, *D F* in directum poſitis, mutari in lineam rectam, cujus pars data *D E* rectis poſitione datis *A B*, *A C*, & pars data *D F* rectis poſitione datis *A B*, *B C* interponi debet; & applicando conſtructionem præcedentem ad hunc caſum ſolvetur problema.

PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA XX.

Trajectoriam ſpecie & magnitudine datam deſcribere, cujus partes datæ rectis tribus poſitione datis interjacebunt.

Deſcribenda ſit trajectoria, quæ ſit ſimilis & æqualis lineæ curvæ *D E F*, quæque a rectis tribus *A B*, *A C*, *B C* poſitione datis, in



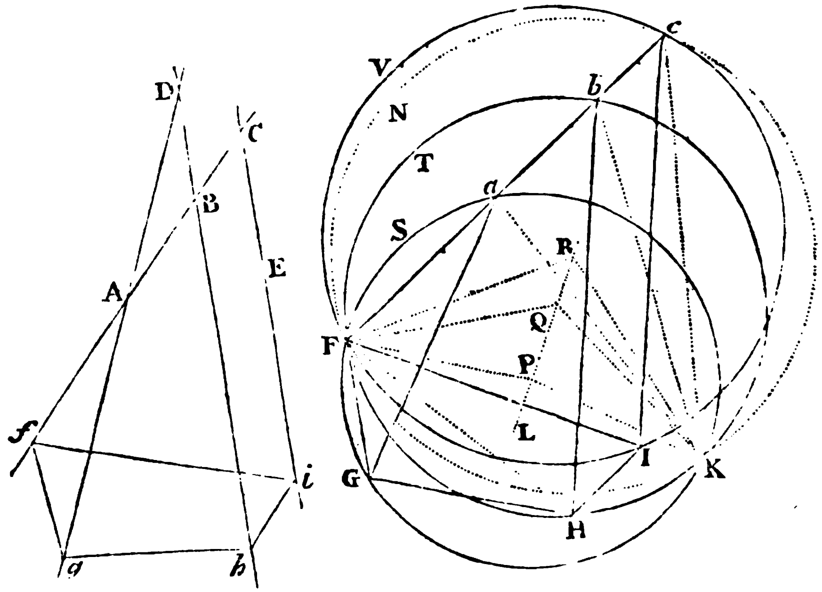
partes datis hujus partibus *D E* & *E F* ſimiles & æquales ſecabitur.

Age rectas *D E*, *E F*, *D F*, & trianguli hujus *D E F* pone angulos *D*, *E*, *F* ad rectas illas poſitione datas (per lem. xxvi) dein circa triangulum deſcribe trajectoriam curvæ *D E F* ſimilem & æqualem. *Q. E. F.*

LEMMA XXVII.

Trapezium ſpecie datum deſcribere, cujus anguli ad rectas quatuor poſitione datas, quæ neque omnes parallelæ ſunt, neque ad commune punctum convergunt, ſinguli ad ſingulas conſiſtent.

Dentur poſitione rectæ quatuor *ABC*, *AD*, *BD*, *CE*; quarum prima ſecet ſecundam in *A*, tertiam in *B*, & quartam in *C*: & deſcribendum ſit trapezium *fghi*, quod ſit trapezio *FGHI* ſimile; & cujus angulus *f*, angulo dato *F* æqualis, tangat rectam *ABC*; cæterique anguli *g*, *h*, *i*, cæteris angulis datis *G*, *H*, *I* æquales, tangant cæteras lineas *AD*, *BD*, *CE* reſpective. Jungatur *FH* & ſuper *FG*, *FH*, *FI* deſcribantur totidem circulorum ſegmenta



FSG, *FTH*, *FVI*; quorum primum *FSG* capiat angulum æqualem angulo *BAD*, ſecundum *FTH* capiat angulum æqualem angulo *CBD*, ac tertium *FVI* capiat angulum æqualem angulo *ACE*. Deſcribi autem debent ſegmenta ad eas partes linearum *FG*, *FH*, *FI*, ut literarum *FSGF* idem ſit ordo circularis qui literarum *BADB*, utque literæ *FTHF* eodem ordine cum literis *CBDC*, & literæ *FVIF* eodem cum literis *ACEA* in orbem redeant. Compleantur ſegmenta in circulos integros, ſitque

P cen-

P centrum circuli primi *FSG*, & *Q* centrum ſecundi *FTH*. Jungatur & utrinque producatur *PQ*, & in ea capiatur *QR* in ea ratione ad *PQ* quam habet *BC* ad *AB*. Capiatur autem *QR* ad eas partes puncti *Q* ut literarum *P*, *Q*, *R* idem ſit ordo atque literarum *A*, *B*, *C*: centroque *R* & intervallo *RF* deſcribatur circulus quartus *FNc* ſecans circulum tertium *FVI* in *c*. Jungatur *Fc* ſecans circulum primum in *a*, & ſecundum in *b*. Agantur *aG*, *bH*, *cI*, & figuræ *abcFGHI* ſimilis conſtitui poteſt figura *ABCfghi*. Quo facto erit trapezium *fghi* illud ipſum, quod conſtituere oportebat.

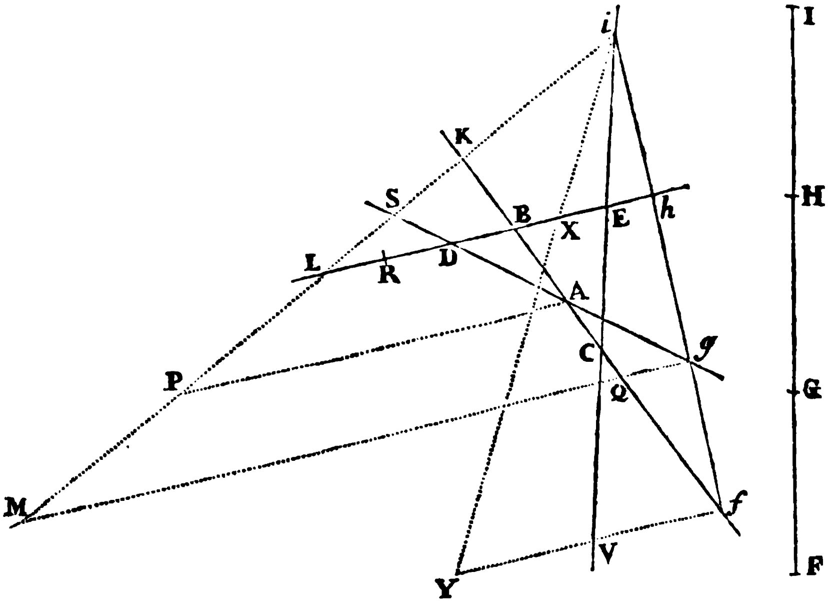
Secent enim circuli duo primi *FSG*, *FTH* ſe mutuo in *K*. Jungantur *PK*, *QK*, *RK*, *aK*, *bK*, *cK*, & producatur *QP* ad *L*. Anguli ad circumferentias *FaK*, *FbK*, *FcK* ſunt ſemiſſes angulorum *FPK*, *FQK*, *FRK* ad centra, ideoque angulorum illorum dimidiis *LPK*, *LQK*, *LRK* æquales. Eſt ergo figura *PQRK* figuræ *abcK* æquiangula & ſimilis, & propterea *ab* eſt ad *bc* ut *PQ* ad *QR*, id eſt, ut *AB* ad *BC*. Angulis inſuper *FaG*, *FbH* *FcI* æquantur *fAg*, *fBh*, *fCi* per conſtructionem. Ergo figuræ *abcFGHI* figura ſimilis *ABCfghi* compleri poteſt. Quo facto trapezium *fghi* conſtituetur ſimile trapezio *FGHI*, & angulis ſuis *f*, *g*, *h*, *i* tanget rectas *ABC*, *AD*, *BD*, *CE*. *Q.E.F.*

Corol. Hinc recta duci poteſt cujus partes, rectis quatuor poſitione datis dato ordine interjectæ, datam habebunt proportionem ad invicem. Augeantur anguli *FGH*, *GHI* uſque eo, ut rectæ *FG*, *GH*, *HI* in directum jaceant, & in hoc caſu conſtruendo problema ducetur recta *fghi*, cujus partes *fg*, *gh*, *hi*, rectis quatuor poſitione datis *AB* & *AD*, *AD* & *BD*, *BD* & *CE* interjectæ, erunt ad invicem ut lineæ *FG*, *GH*, *HI*, eundemque ſervabunt ordinem inter ſe. Idem vero ſic fit expeditius.

Producantur *AB* ad *K*, & *BD* ad *L*, ut ſit *BK* ad *AB* ut *HI* ad *GH*; & *DL* ad *BD* ut *GI* ad *FG*; & jungatur *KL* occurrens rectæ *CE* in *i*. Producatur *iL* ad *M*, ut ſit *LM* ad *iL* ut *GH* ad *HI*, & agatur tum *MQ* ipſi *LB* parallela, rectæque *AD* occurrens in *g*, tum *gi* ſecans *AB*, *BD* in *f*, *h*. Dico factum.

Secet enim *Mg* rectam *AB* in *Q*, & *AD* rectam *KL* in *S*, & agatur *AP* quæ ſit ipſi *BD* parallela & occurrat *iL* in *P*, & erunt *gM* ad *Lh* (*gi* ad *hi*, *Mi* ad *Li*, *GI* ad *HI*, *AK* ad *BK*) & *AP* ad

AP ad *BL* in eadem ratione. Secetur *DL* in *R* ut ſit *DL* ad *RL* in eadem illa ratione, & ob proportionales *gS* ad *gM*, *AS* ad *AP*, & *DS* ad *DL*; erit, ex æquo, ut *gS* ad *Lb* ita *AS* ad *BL* & *DS* ad *RL*; & mixtim, *BL*—*RL* ad *Lb*—*BL* ut *AS*—*DS* ad *gS*—*AS*. Id eſt *BR* ad *Bb* ut *AD* ad *Ag*, ideoque ut *BD* ad *gQ*. Et viciſſim *BR* ad *BD* ut *Bb* ad *gQ*, ſeu *fb* ad *fg*. Sed ex conſtructione linea *BL* eadem ratione ſecta fuit in *D* & *R* atque linea *FI* in G & *H*: ideoque eſt *BR* ad *BD* ut *FH* ad *FG*. Ergo



fb eſt ad *fg* ut *FH* ad *FG*. Cum igitur ſit etiam *gi* ad *bi* ut *Mi* ad *Li*, id eſt, ut *GI* ad *HI*, patet lineas *FI*, *fi* in *g* & *b*, *G* & *H* ſimiliter ſectas eſſe. *Q. E. F.*

In conſtructione corollarii hujus poſtquam ducitur *LK* ſecans *CE* in *i*, producere licet *iE* ad *V*, ut ſit *EV* ad *Ei* ut *FH* ad *HI*, & agere *Vf* parallelam ipſi *BD*. Eodem recidit ſi centro *i*, intervallo *IH*, deſcribatur circulus ſecans *BD* in *X*, & producatur *iX* ad *Y*, ut ſit *iY* æqualis *IF*, & agatur *Yf* ipſi *BD* parallela.

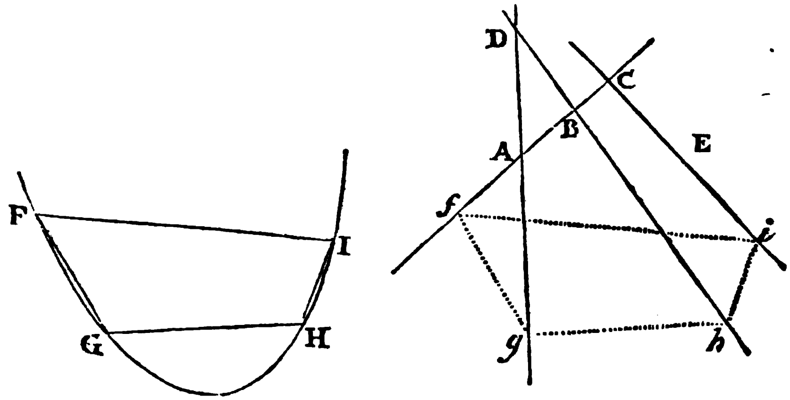
Problematis hujus ſolutiones alias *Wrennus* & *Walliſius* olim excogitarunt.

PROPO-

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA XXI.

Trajectoriam ſpecie datam deſcribere, quæ a rectis quatuor poſitione datis in partes ſecabitur, ordine, ſpecie & proportione datas.

Deſcribenda ſit trajectoria, quæ ſimilis ſit lineæ curvæ *FGHI*, & cujus partes, illius partibus *FG*, *GH*, *HI* ſimiles & proportionales, rectis *AB* & *AD*, *AD* & *BD*, *BD* & *CE* poſitione datis, prima primis, ſecunda ſecundis, tertia tertiis interjaceant. Actis rectis *FG*, *GH*, *HI*, *FI*, deſcribatur (per lem. XXVII.) Trape-



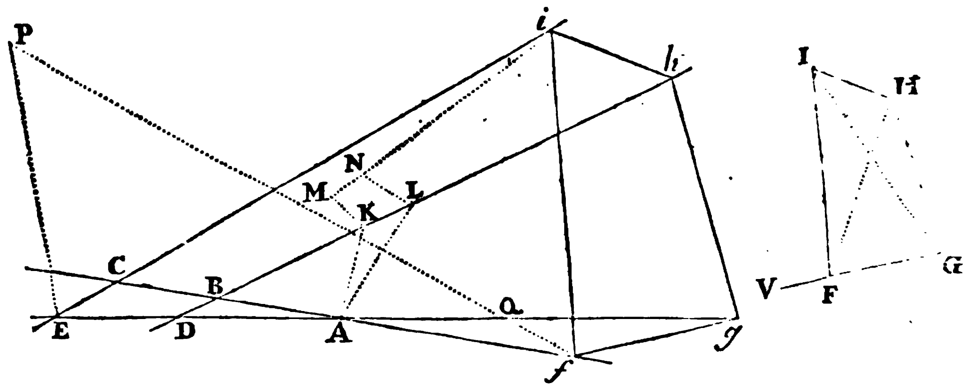
zium *fghi* quod ſit trapezio *FGHI* ſimile, & cujus anguli *f*, *g*, *h*, *i* tangant rectas illas poſitione datas *AB*, *AD*, *BD*, *CE*, ſinguli ſingulas dicto ordine. Dein circa hoc trapezium deſcribatur trajectoria curvæ lineæ *FGHI* conſimilis.

Scholium.

Conſtrui etiam poteſt hoc problema ut ſequitur. Junctis *FG*, *GH*, *HI*, *FI* produc *GF* ad *V*, jungeque *FH*, *IG*, & angulis *FGH*, *VFH* fac angulos *CAK*, *DAL* æquales. Concurrant *AK*, *AL* cum recta *BD* in *K* & *L*, & inde agantur *KM*, *LN*, quarum *KM* conſtituat angulum *AKM* æqualem angulo *GHI*, ſitque ad *AK* ut eſt *HI* ad *GH*; & *LN* conſtituat angulum *ALN* æqualem angulo *FHI*, ſitque ad *AL* ut *HI* ad *FH*. Ducantur autem *AK*,

KM

KM, *AL*, *LN* ad eas partes linearum *AD*, *AK*, *AL*, ut literæ *CAKMC*, *ALKA*, *DALND* eodem ordine cum literis *FGHIF* in orbem redeant; & acta *MN* occurrat rectæ *CE* in *i*. Fac angulum *iEP* æqualem angulo *IGF*, ſitque *PE* ad *Ei* ut *FG* ad *GI*; & per *P* agatur *PQf*, quæ cum recta *ADE* contineat angulum *PQE* æqualem angulo *FIG*, rectæque *AB* occurrat in *f*, &



jungatur *fi*. Agantur autem *PE* & *PQ* ad eas partes linearum *CE*, *PE*, ut literarum *PEiP* & *PEQP* idem ſit ordo circularis qui literarum *FGHIF*, & ſi ſuper linea *fi* eodem quoque literarum ordine conſtituatur trapezium *fghi* trapezio *FGHI* ſimile, & circumſcribatur trajectoria ſpecie data, ſolvetur problema.

Hactenus de orbibus inveniendis. Supereſt ut motus corporum in orbibus inventis determinemus.

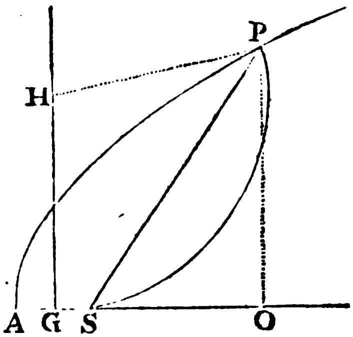
SECTIO VI.

De inventione motuum in orbibus datis.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XXII.

Corporis in data trajectoria parabolica moti invenire locum ad tempus aſſignatum.

Sit *S* umbilicus & *A* vertex principalis parabolæ, ſitque $4AS \times M$ æquale areæ parabolicæ abſcindendæ *APS*, quæ radio *SP*, vel poſt exceſſum corporis de vertice deſcripta fuit, vel ante appulſum ejus ad



ad verticem deſcribenda eſt. Innoteſcit quantitas areæ illius abſcindendæ ex tempore ipſi proportionali. Biſeca *AS* in *G*, erigeque perpendiculum *GH* æquale 3 M, & circulus centro *H*, intervallo *HS* deſcriptus ſecabit parabolam in loco quæſito *P*. Nam, demiſſa ad axem perpendiculari *PO* & ducta *PH*, eſt $AGq+GHq$ ($=HPq = \overline{AO-AG}$: *quad.* $+ \overline{PO-GH}$: *quad*) $= AOq+POq-2GAO-2GH\times PO+AGq+GHq$. Unde $2GH\times PO$ $(=AOq+POq-2GAO) = AOq+\frac{3}{4}POq$. Pro AOq ſcribe $AO\times\frac{POq}{4AS}$; & applicatis terminis omnibus ad $3PO$ ductiſque in $2AS$, fiet $\frac{4}{3}GH\times AS$ $(=\frac{1}{6}AO\times PO+\frac{1}{2}AS\times PO = \frac{AO+3AS}{6}\times PO = \frac{4AO-3SO}{6}\times PO =$ areæ $\overline{APO-SPO})$ $=$ areæ APS. Sed GH erat 3 M, & inde $\frac{4}{3}GH\times AS$ eſt $4AS\times$ M. Ergo area abſciſſa APS æqualis eſt abſcindendæ $4AS\times$ M. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc *GH* eſt ad *AS*, ut tempus quo corpus deſcripſit arcum *AP* ad tempus quo corpus deſcripſit arcum inter verticem *A* & perpendiculum ad axem ab umbilico *S* erectum.

Corol. 2. Et circulo *ASP* per corpus motum *P* perpetuo tranſeunte, velocitas puncti *H* eſt ad velocitatem quam corpus habuit in vertice *A* ut 3 ad 8; ideoque in ea etiam ratione eſt linea *GH* ad lineam rectam quam corpus tempore motus ſui ab *A* ad *P*, ea cum velocitate quam habuit in vertice *A*, deſcribere poſſet.

Corol. 3. Hinc etiam vice verſa inveniri poteſt tempus quo corpus deſcripſit arcum quemvis aſſignatum *AP*. Junge *AP* & ad medium ejus punctum erige perpendiculum rectæ *GH* occurrens in *H*.

LEMMA XXVIII.

Nulla extat figura ovalis cujus area, rectis pro lubitu abſciſſa, poſſit per æquationes numero terminorum ac dimenſionum finitas generaliter inveniri.

Intra ovalem detur punctum quodvis, circa quod ceu polum revolvatur perpetuo linea recta, uniformi cum motu, & interea in recta illa exeat punctum mobile de polo, pergatque ſemper ea cum velocitate, quæ ſit ut rectæ illius intra ovalem quadratum. Hoc motu punctum illud deſcribet ſpiralem gyris infinitis. Jam ſi areæ ovalis a recta illa abſciſſæ portio per finitam æquationem inveniri poteſt, invenietur etiam per eandem æquationem diſtantia puncti a polo, quæ huic areæ proportionalis eſt, ideoque omnia ſpiralis puncta per æquationem finitam inveniri poſſunt: & propterea rectæ cujuſvis poſitione datæ interſectio cum ſpirali inveniri etiam poteſt per æquationem finitam. Atqui recta omnis infinite producta ſpiralem ſecat in punctis numero infinitis, & æquatio, qua interſectio aliqua duarum linearum invenitur, exhibet earum interſectiones omnes radicibus totidem, ideoque aſcendit ad tot dimenſiones quot ſunt interſectiones. Quoniam circuli duo ſe mutuo ſecant in punctis duobus, interſectio una non invenietur niſi per æquationem duarum dimenſionum, qua interſectio altera etiam inveniatur. Quoniam duarum ſectionum conicarum quatuor eſſe poſſunt interſectiones, non poteſt aliqua earum generaliter inveniri niſi per æquationem quatuor dimenſionum, qua omnes ſimul inveniantur. Nam ſi interſectiones illæ ſeorſim quærantur, quoniam eadem eſt omnium lex & conditio, idem erit calculus in caſu unoquoque, & propterea eadem ſemper concluſio, quæ igitur debet omnes interſectiones ſimul complecti & indifferenter exhibere. Unde etiam interſectiones ſectionum conicarum & curvarum tertiæ poteſtatis, eo quod ſex eſſe poſſunt, ſimul prodeunt per æquationes ſex dimenſionum, & interſectiones duarum curvarum tertiæ poteſtatis, quia novem eſſe poſſunt, ſimul prodeunt per æquationes dimenſionum novem. Id niſi neceſſario fieret, reducere liceret problemata omnia ſolida ad plana, & pluſquam ſolida ad ſolida. Loquor hic de curvis poteſtate irre-

irreducibilibus. Nam ſi æquatio, per quam curva definitur, ad inferiorem poteſtatem reduci poſſit: curva non erit unica, ſed ex duabus vel pluribus compoſita, quarum interſectiones per calculos diverſos ſeorſim inveniri poſſunt. Ad eundem modum interſectiones binæ rectarum & ſectionum conicarum prodeunt ſemper per æquationes duarum dimenſionum, ternæ rectarum & curvarum irreducibilium tertiæ poteſtatis per æquationes trium, quaternæ rectarum & curvarum irreducibilium quartæ poteſtatis per æquationes dimenſionum quatuor, & ſic in infinitum. Ergo rectæ & ſpiralis interſectiones numero infinitæ, cum curva hæc ſit ſimplex & in curvas plures irreducibilis, requirunt æquationes numero dimenſionum & radicum infinitas, quibus interſectiones omnes poſſunt ſimul exhiberi. Eſt enim eadem omnium lex & idem calculus. Nam ſi a polo in rectam illam ſecantem demittatur perpendiculum, & perpendiculum illud una cum ſecante revolvatur circa polum, interſectiones ſpiralis tranſibunt in ſe mutuo, quæque prima erat ſeu proxima, poſt unam revolutionem ſecunda erit, poſt duas tertia, & ſic deinceps: nec interea mutabitur æquatio niſi pro mutata magnitudine quantitatum per quas poſitio ſecantis determinatur. Unde cum quantitates illæ poſt ſingulas revolutiones redeunt ad magnitudines primas, æquatio redibit ad formam primam, ideoque una eademque exhibebit interſectiones omnes, & propterea radices habebit numero infinitas, quibus omnes exhiberi poſſunt. Nequit ergo interſectio rectæ & ſpiralis per æquationem finitam generaliter inveniri, & idcirco nulla extat ovalis cujus area, rectis imperatis abſciſſa, poſſit per talem æquationem generaliter exhiberi.

Eodem argumento, ſi intervallum poli & puncti, quo ſpiralis deſcribitur, capiatur Ovalis perimetro abſciſſæ proportionale, probari poteſt quod longitudo perimetri nequit per finitam æquationem generaliter exhiberi. De ovalibus autem hic loquor quæ non tanguntur a figuris conjugatis in infinitum pergentibus.

Corollarium.

Hinc area ellipſeos, quæ radio ab umbilico ad corpus mobile ducto deſcribitur, non prodit ex dato tempore, per æquationem finitam; & propterea per deſcriptionem curvarum geometrice rationalium determinari nequit. Curvas geometrice rationales appello qua-

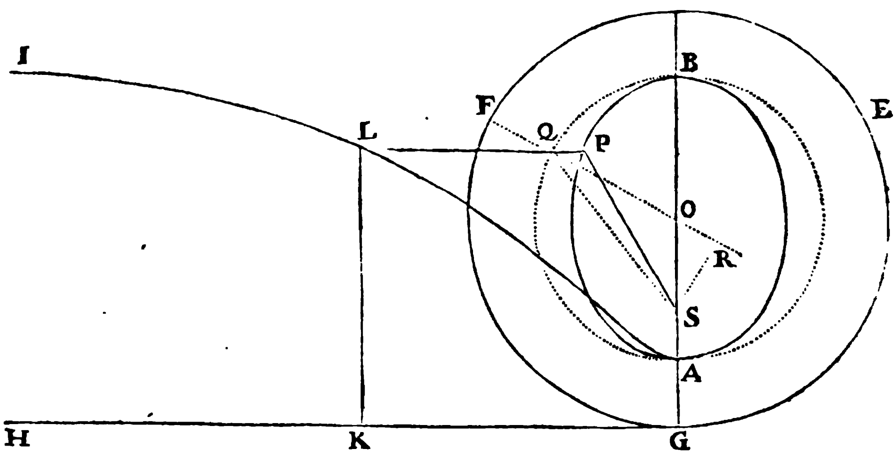
P 2 rum

rum puncta omnia per longitudines æquationibus definitas, id eſt, per longitudinum rationes complicatas, determinari poſſunt; cæteraſque (ut ſpirales, quadratrices, trochoides) geometrice irrationales. Nam longitudines quæ ſunt vel non ſunt ut numerus ad numerum (quemadmodum in decimo elementorum) ſunt arithmetice rationales vel irrationales. Aream igitur ellipſeos tempori proportionalem abſcindo per curvam geometrice irrationalem ut ſequitur.

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XXIII.

Corporis in data trajectoria elliptica moti invenire locum ad tempus aſſignatum.

Ellipſeos *APB* ſit *A* vertex principalis, *S* umbilicus, & *O* centrum, ſitque *P* corporis locus inveniendus. Produc *OA* ad *G*, ut ſit *OG* ad *OA* ut *OA* ad *OS*. Erige perpendiculum *GH*, centroque *O* & intervallo *OG* deſcribe circulum *GEF*, & ſuper regula *GH*, ceu fundo, progrediatur rota *GEF* revolvendo circa axem ſuum, & interea puncto ſuo *A* deſcribendo trochoidem *ALI*. Quo facto, cape *GK* in ratione ad rotæ perimetrum *GEFG*, ut



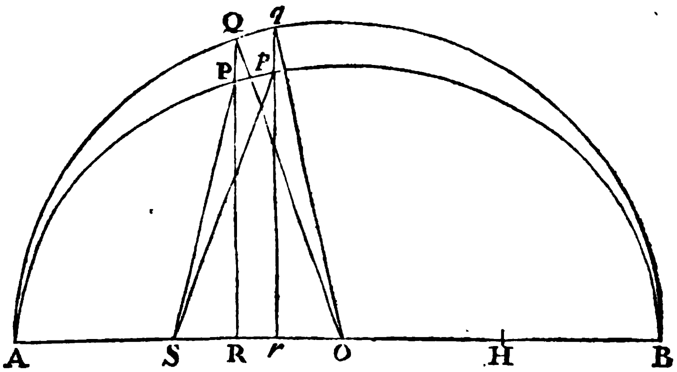
eſt tempus, quo corpus progrediendo ab *A* deſcripſit arcum *AP*, ad tempus revolutionis unius in ellipſi. Erigatur perpendiculum *KL* occurrens trochoidi in *L*, & acta *LP* ipſi *KG* parallela occurret ellipſi in corporis loco quæſito *P*.

Nam

Nam centro O, intervallo OA deſcribatur ſemicirculus AQB, & arcui AQ occurrat LP ſi opus eſt producta in Q, junganturque SQ, OQ. Arcui EFG occurrat OQ in F, & in eandem OQ demittatur perpendiculum SR. Area APS eſt ut area AQS, id eſt, ut differentia inter ſectorem OQA & triangulum OQS, ſive ut differentia rectangulorum $\frac{1}{2}OQ \times AQ$ & $\frac{1}{2}OQ \times SR$, hoc eſt, ob datam $\frac{1}{2}OQ$, ut differentia inter arcum AQ & rectam SR, ideoque (cum eædem ſint datæ rationes SR ad ſinum arcus AQ, OS ad OA, OA ad OG, AQ ad GF, & diviſim $AQ - SR$ ad $GF -$ ſinu arcus AQ) ut GK differentia inter arcum GF & ſinum arcus AQ. *Q. E. D.*

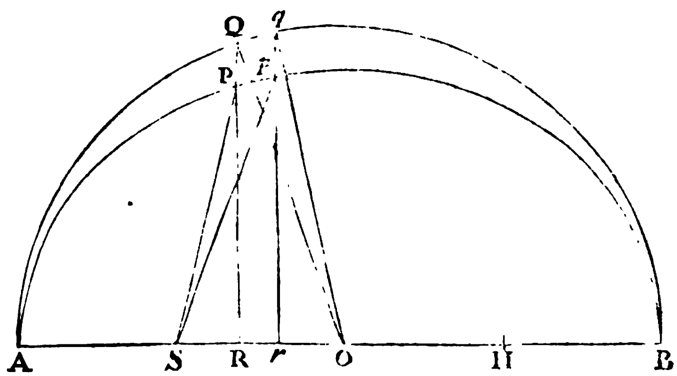
Scholium.

Cæterum, cum difficilis ſit hujus curvæ deſcriptio, præſtat ſolutionem vero proximam adhibere. Inveniatur tum angulus quidam B, qui ſit ad angulum graduum 57.29578, quem arcus radio æqualis ſubtendit, ut eſt umbilicorum diſtantia SH ad ellipſeos diametrum AB; tum etiam longitudo quædam L, quæ ſit ad radium in eadem



ratione inverſe. Quibus ſemel inventis, problema deinceps confit per ſequentem analyſin. Per conſtructionem quamvis, vel utcunque conjecturam faciendo, cognoſcatur corporis locus P proximus vero ejus loco p. Demiſſaque ad axem ellipſeos ordinatim applicata PR, ex proportione diametrorum ellipſeos, dabitur circuli circumſcripti AQB ordinatim applicata RQ, quæ ſinus eſt anguli AOQ exiſtente AO radio, quæque ellipſin ſecat in P. Sufficit angulum illum rudi calculo in numeris proximis invenire. Cognoſcatur etiam angulus tempori proportionalis, id eſt, qui ſit ad quatuor rectos, ut eſt tempus,

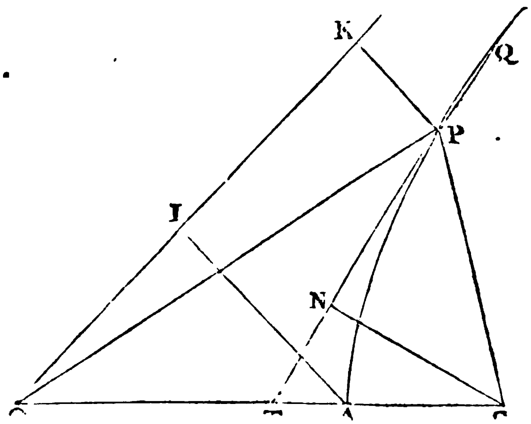
DE MOTU CORPORUM tempus, quo corpus deſcripſit arcum *Ap*, ad tempus revolutionis unius in ellipſi. Sit angulus iſte N. Tum capiatur & angulus D ad angulum B, ut eſt ſinus iſte anguli *AOQ* ad radium, & angulus E ad angulum N—*AOQ*+D, ut eſt longitudo L ad longitudinem eandem L coſinu anguli *AOQ* diminutam, ubi angulus iſte recto minor eſt, auctam ubi major. Poſtea capiatur tum angulus F ad angulum B, ut eſt ſinus anguli *AOQ*+E ad radium, tum angulus G ad angulum N—*AOQ*—E+F ut eſt longitudo L ad longitudinem eandem coſinu anguli *AOQ*+E diminutam ubi angulus iſte recto minor eſt, auctam ubi major. Tertia vice capiatur angulus H ad angulum B, ut eſt ſinus anguli *AOQ*+E+G ad radium; & angulus I ad angulum N—*AOQ*—E—G+H, ut eſt longitudo L ad eandem longitudinem coſinu anguli *AOQ*+E+G diminutam, ubi an-



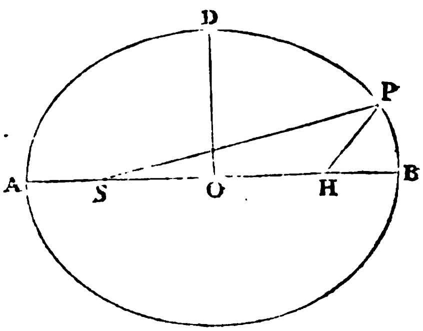
gulus iſte recto minor eſt, auctam ubi major. Et ſic pergere licet in infinitum. Denique capiatur angulus *AOq* æqualis angulo *AOQ*+E+G+I+ &c. Et ex coſinu ejus *Or* & ordinata *pr*, quæ eſt ad ſinum ejus *qr* ut ellipſeos axis minor ad axem majorem, habebitur corporis locus correctus *p*. Si quando angulus N—*AOQ*+D negativus eſt, debet ſignum + ipſius E ubique mutari in —, & ſignum — in +. Idem intelligendum eſt de ſignis ipſorum G & I, ubi anguli N—*AOQ*—E+F, & N—*AOQ*—E—G+H negativi prodeunt. Convergit autem ſeries infinita *AOQ*+E+G+I+ &c. quam celerrime, adeo ut vix unquam opus fuerit ultra progredi quam ad terminum ſecundum E. Et fundatur calculus in hoc theoremate, quod area *APS* ſit ut differentia inter arcum *AQ* & rectam ab umbilico *S* in radium *OQ* perpendiculariter demiſſam.

Non

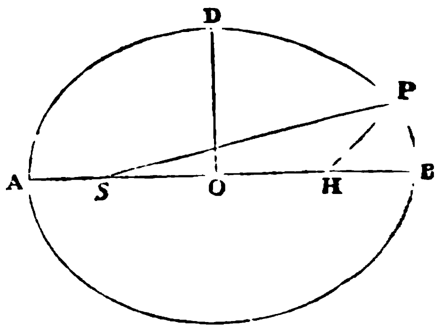
Non diſſimili calculo conficitur problema in hyperbola. Sit ejus centrum *O*, vertex *A*, umbilicus *S* & aſymptotos *OK*. Cognoſcatur quantitas areæ abſcindendæ tempori proportionalis. Sit ea A, & fiat conjectura de poſitione rectæ *SP*, quæ aream *APS* abſcindat veræ proximam. Jungatur *OP*, & ab *A* & *P* ad aſymptoton agantur *AI*, *PK* aſymptoto alteri parallelæ, & per tabulam logarithmorum dabitur area *AIKP*, eique æqualis area *OPA*, quæ ſubducta de triangulo *OPS* relinquet aream abſciſſam *APS*. Applicando areæ abſcindendæ A & abſciſſæ *APS* differentiam duplam 2*APS*—2A vel 2A—2*APS* ad lineam *SN*, quæ ab umbilico *S* in tangentem *TP* perpendicularis eſt, orietur longitudo chordæ *PQ*. Inſcribatur autem chorda illa *PQ* inter *A* & *P*, ſi area abſciſſa *APS* major ſit area abſcindenda A, ſecus ad puncti *P* contrarias partes: & punctum *Q* erit locus corporis accuratior. Et computatione repetita invenietur idem accuratior in perpetuum.



Atque his calculis problema generaliter confit analytice. Verum uſibus aſtronomicis accommodatior eſt calculus particularis qui ſequitur. Exiſtentibus *AO*, *OB*, *OD* ſemiaxibus ellipſeos, & L ipſius latere recto, ac D differentia inter ſemiaxem minorem *OD* & lateris recti ſemiſſem $\frac{1}{2}$ L; quære tum angulum Y, cujus ſinus ſit ad radium ut eſt rectangulum ſub differentia illa D, & ſemiſumma axium *AO*+*OD* ad quadratum axis majoris *AB*; tum angulum Z, cujus ſinus ſit ad radium ut eſt duplum rectangulum ſub umbilicorum diſtantia *SH* & differentia illa D ad triplum quadratum ſemiaxis majoris *AO*. His angulis ſemel inventis; locus corporis ſic deinceps determinabitur. Sume angulum T proportionalem tempori quo arcus *BP* deſcriptus eſt, ſeu motui medio (ut loquuntur) æqualem; & angulum V, primam



primam medii motus æquationem, ad angulum Y, æquationem maximam primam, ut eſt ſinus dupli anguli T ad radium; atque angulum X, æquationem ſecundam, ad angulum Z, æquationem maximam ſecundam, ut eſt cubus ſinus anguli T ad cubum radii. Angulorum T, V, X vel ſummæ T+X+V, ſi angulus T recto minor eſt, vel differentiæ T+X—V, ſi is recto major eſt rectiſque duobus minor, æqualem cape angulum *BHP*, motum medium æquatum; & ſi *HP* occurrat ellipſi in *P*, acta *SP* abſcindet aream *BSP* tempori proportionalem quamproxime. Hæc praxis ſatis expedita videtur, propterea quod angulorum perexiguorum V & X, in minutis ſecundis, ſi placet, poſitorum, figuras duas treſve primas invenire ſufficit. Sed & ſatis accurata eſt ad theoriam planetarum. Nam in orbe vel Martis ipſius, cujus æquatio centri maxima eſt graduum decem, error vix ſuperabit minutum unum ſecundum. Invento autem angulo motus medii æquati *BHP*, angulus veri motus *BSP* & diſtantia *SP* in promptu ſunt per methodum notiſſimam.



Hactenus de motu corporum in lineis curvis. Fieri autem poteſt ut mobile recta deſcendat vel recta aſcendat, & quæ ad iſtiuſmodi motus ſpectant, pergo jam exponere.

SECTIO VII.

De corporum aſcenſu & deſcenſu rectilineo.

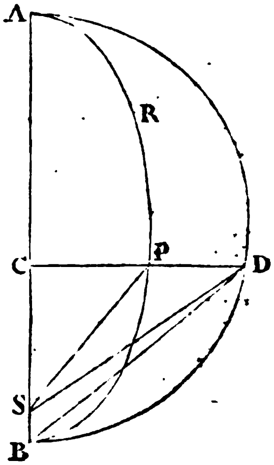
PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XXIV.

Poſito quod vis centripeta ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ locorum a centro, ſpatia definire quæ corpus recta cadendo datis temporibus deſcribit.

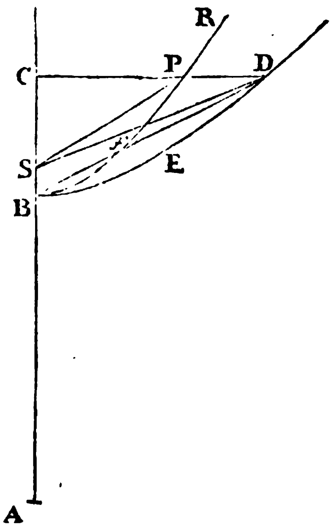
Caſ. 1. Si corpus non cadit perpendiculariter, deſcribet id (per corol. 1. prop. XIII.) ſectionem aliquam conicam cujus umbilicus congruit cum centro virium. Sit ſectio illa conica *ARPB* & um-

bilicus

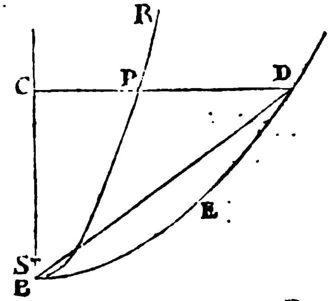
bilicus ejus *S*. Et primo ſi figura ellipſis eſt; ſuper hujus axe majore *AB* deſcribatur ſemicirculus *ADB*, & per corpus decidens tranſeat recta *DPC* perpendicularis ad axem; actiſque *DS*, *PS* erit area *ASD* areæ *ASP*, atque ideo etiam tempori proportionalis. Manente axe *AB* minuatur perpetuo latitudo ellipſeos, & ſemper manebit area *ASD* tempori proportionalis. Minuatur latitudo illa in infinitum: & orbe *APB* jam coincidente cum axe *AB* & umbilico *S* cum axis termino *B*, deſcendet corpus in recta *AC*, & area *ABD* evadet tempori proportionalis. Dabitur itaque ſpatium *AC*, quod corpus de loco *A* perpendiculariter cadendo tempore dato deſcribit, ſi modo tempori proportionalis capiatur area *ABD*, & a puncto *D* ad rectam *AB* demittatur perpendicularis *DC*. *Q. E. I.*



Caſ. 2. Si figura illa *RPB* hyperbola eſt, deſcribatur ad eandem diametrum principalem *AB* hyperbola rectangula *BED*: & quoniam areæ *CSP*, *CBfP*, *SPfB* ſunt ad areas *CSD*, *CBED*, *SDEB*, ſingulæ ad ſingulas, in data ratione altitudinum *CP*, *CD*; & area *SPfB* proportionalis eſt tempori quo corpus *P* movebitur per arcum *PfB*; erit etiam area *SDEB* eidem tempori proportionalis. Minuatur latus rectum hyperbolæ *RPB* in infinitum manente latere tranſverſo, & coibit arcus *PB* cum recta *CB* & umbilicus *S* cum vertice *B* & recta *SD* cum recta *BD*. Proinde area *BDEB* proportionalis erit tempori quo corpus *C* recto deſcenſu deſcribit lineam *CB*. *Q. E. I.*



Caſ. 3. Et ſimili argumento ſi figura *RPB* parabola eſt, & eodem vertice principali *B* deſcribatur alia parabola *BED*, quæ ſemper maneat data, interea dum parabola prior, in cujus perimetro corpus *P* movetur, diminuto & in nihilum redacto ejus latere recto, conveniat cum linea *CB*; fiet ſegmentum parabolicum *BDEB* proportionale tempori quo corpus illud *P* vel *C* deſcendet ad centrum *S* vel *B*. *Q. E. I.*



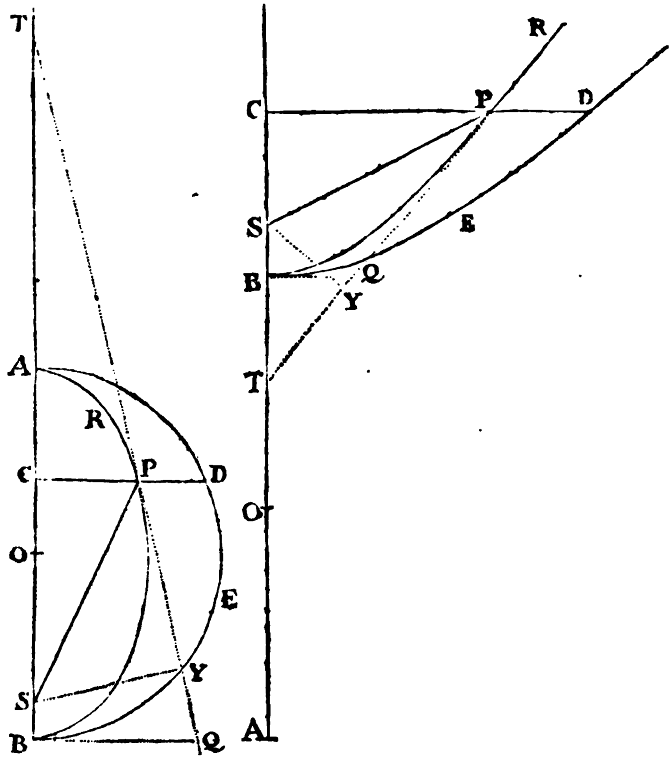
primam ma... mo...

PHILOSOPHIÆ
124
De Motu Corporum

PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA IX.

Poſitis jam inventis, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis C *eſt ad velocitatem corporis centro* B *intervallo* BC *circulum deſcribentis, in ſubduplicata ratione quam* AC, *diſtantia corporis a circuli vel hyperbolæ rectangulæ vertice ulteriore* A, *habet ad figuræ ſemidiametrum principalem* ½AB.

Biſecetur *AB*, communis utriuſque figuræ *RPB*, *DEB* diameter, in *O*; & agatur recta *PT*, quæ tangat figuram *RPB* in *P*, atque etiam ſecet communem illam diametrum *AB* (ſi opus eſt pro-



ductam) in *T*; ſitque *SY* ad hanc rectam, & *BQ* ad hanc diametrum perpendicularis, atque figuræ *RPB* latus rectum ponatur L. Conſtat per corol. IX. prop. XVI. quod corporis in linea *RPB* circa centrum *S* moventis velocitas in loco quovis *P* ſit ad velocitatem corporis

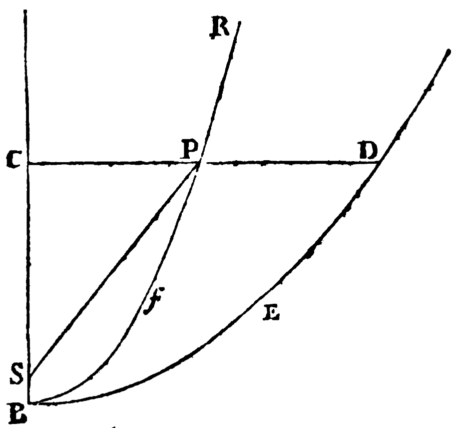
corporis intervallo *SP* circa idem centrum circulum deſcribentis in ſubduplicata ratione rectanguli $\frac{1}{2}L \times SP$ ad *ST* quadratum. Eſt autem ex conicis *ACB* ad *CPq* ut 2 *AO* ad L, ideoque $\frac{2CPq \times AO}{ACB}$ æquale L. Ergo velocitates illæ ſunt ad invicem in ſubduplicata ratione $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ ad *ST quad.* Porro ex conicis eſt *CO* ad *BO* ut *BO* ad *TO*, & compoſite vel diviſim ut *CB* ad *BT*. Unde vel dividendo vel componendo fit *BO*—vel+*CO* ad *BO* ut *CT* ad *BT*, id eſt, *AC* ad *AO* ut *CP* ad *BQ*; indeque $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ æquale eſt $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$. Minuatur jam in infinitum figuræ *RPB* latitudo *CP*, ſic ut punctum *P* coeat cum puncto *C*, punctumque *S* cum puncto *B*, & linea *SP* cum linea *BC*, lineaque *ST* cum linea *BQ*; & corporis jam recta deſcendentis in linea *CB* velocitas fiet ad velocitatem corporis centro *B* intervallo *BC* circulum deſcribentis, in ſubduplicata ratione ipſius $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$ ad *STq*, hoc eſt (neglectis æqualitatis rationibus *SP* ad *BC* & *BQq* ad *STq*) in ſubduplicata ratione *AC* ad *AO* ſive $\frac{1}{2}$*AB*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Punctis *B* & *S* coeuntibus, fit *TC* ad *TS* ut *AC* ad *AO*.

Corol. 2. Corpus ad datam a centro diſtantiam in circulo quovis revolvens, motu ſuo ſurſum verſo aſcendet ad duplam ſuam a centro diſtantiam.

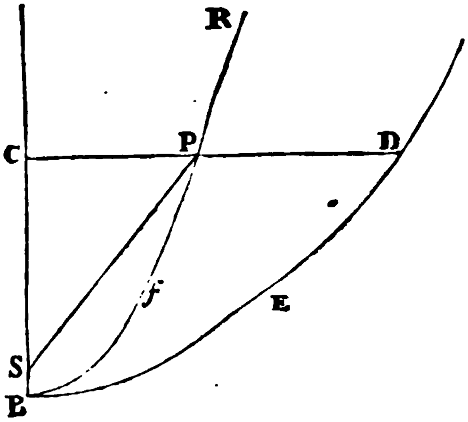
PROPOSITIO XXIV. THEOREMA X.

Si figura BED *parabola eſt, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis* C *æqualis eſt velocitati qua corpus centro* B *dimidio intervalli ſui* BC *circulum uniformiter deſcribere poteſt.*



Nam corporis parabolam *RPB* circa centrum *S* deſcribentis velocitas in loco quovis *P* (per corol. VII. prop.

prop. xvi.) æqualis eſt velocitati corporis dimidio intervalli *SP* circulum circa idem centrum *S* uniformiter deſcribentis. Minuatur parabolæ latitudo *CP* in infinitum eo, ut arcus parabolicus *PfB* cum recta *CB*, centrum *S* cum vertice *B*, & intervallum *SP* cum intervallo *BC* coincidat, & conſtabit propoſitio. *Q. E. D.*



PROPOSITIO XXXV. THEOREMA XI.

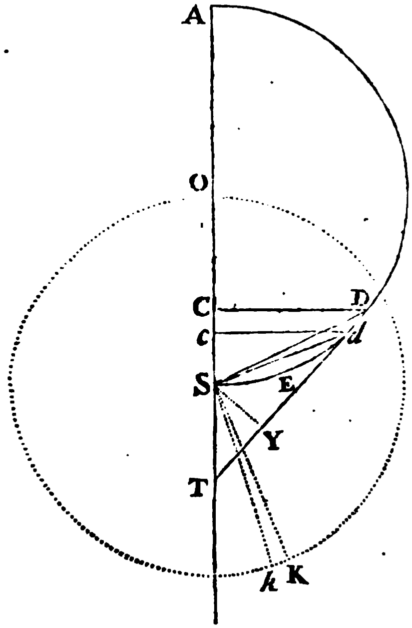
Iiſdem poſitis, dico quod area figuræ DES, *radio indefinito* SD *deſcripta, æqualis ſit areæ quam corpus, radio dimidium lateris recti figuræ* DES *æquante, circa centrum* S *uniformiter gyrando, eodem tempore deſcribere poteſt.*

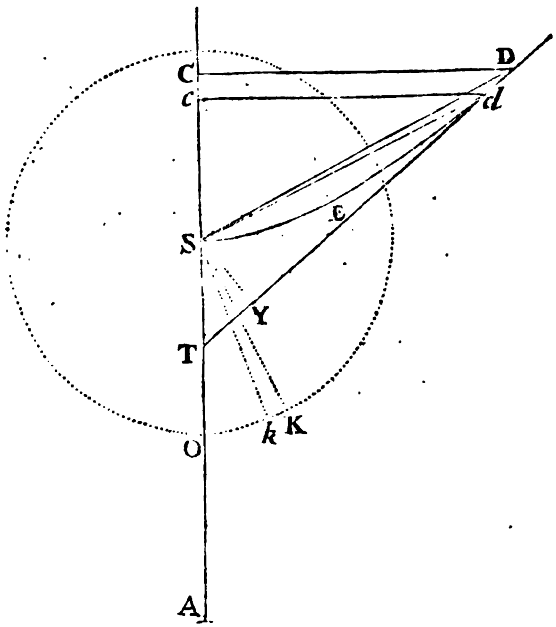
Nam concipe corpus *C* quam minima temporis particula lineolam *Cc* cadendo deſcribere, & interea corpus aliud *K*, uniformiter in circulo *OKk* circa centrum *S* gyrando, arcum *Kk* deſcribere. Erigantur perpendicula *CD*, *cd* occurrentia figuræ *DES* in *D*, *d*. Jungantur *SD*, *Sd*, *SK*, *Sk* & ducatur *Dd* axi *AS* occurrens in *T*, & ad eam demittatur perpendiculum *ST*.

Caſ. 1. Jam ſi figura *DES* circulus eſt vel hyperbola rectangula, biſecetur ejus tranſverſa diameter *AS* in *O*, & erit *SO* dimidium lateris recti. Et quoniam eſt *TC* ad *TD* ut *Cc* ad *Dd*, & *TD* ad *TS* ut *CD* ad *ST*, erit ex æquo *TC* ad *TS* ut $CD \times Cc$ ad $ST \times Dd$. Sed (per corol 1. prop. xxxiii.) eſt *TC* ad *TS* ut *AC* ad *AO*, puta ſi in coitu punctorum *D*, *d* capiantur linearum rationes ultimæ. Ergo *AC* eſt ad *AO* ſeu *SK* ut $CD \times Cc$ ad $ST \times Dd$. Porro corporis deſcendentis velocitas in *C* eſt ad velocitatem corporis circulum intervallo *SC* circa centrum *S* deſcribentis in ſubduplicata ratione *AC* ad *AO* vel *SK* (per prop. xxxiii.) Et hæc velocitas ad velocitatem corporis deſcribentis circulum *OKk* in ſubduplicata ratione *SK* ad *SC* (per corol. vi. prop. iv.) & ex æquo velocitas prima ad ultimam, hoc eſt lineola *Cc* ad arcum *Kk* in ſubduplicata

ratione

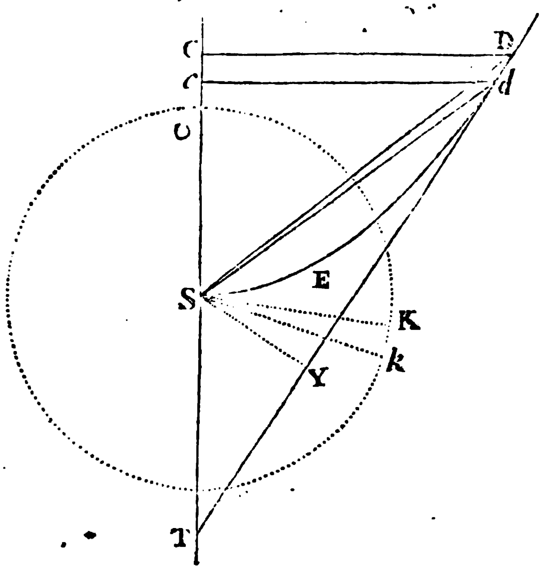
ratione AC ad SC, id eſt in ratione AC ad CD. Quare eſt $CD \times Cc$ æquale $AC \times Kk$, & propterea AC ad SK ut $AC \times Kk$ ad $SY \times Dd$, indeque $SK \times Kk$ æquale $SY \times Dd$, & $\frac{1}{2} SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{2} SY \times Dd$, id eſt area KSk æqualis areæ SDd. Singulis igitur temporis





particulis generantur arearum duarum particulæ KSk, & SDd, quæ, ſi magnitudo earum minuatur & numerus augeatur in infinitum, rationem obtinent æqualitatis, & propterea (per corollarium lemmatis IV.) areæ totæ ſimul genitæ ſunt ſemper æquales. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Quod ſi figura DES parabola ſit, invenietur eſſe ut ſupra $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$ ut TC ad TS, hoc eſt ut 2 ad 1, ideoque $\frac{1}{4} CD \times Cc$ æquale eſſe $\frac{1}{2} SY \times Dd$. Sed corporis cadentis velocitas in C æqualis eſt velocitati qua circulus intervallo $\frac{1}{2} SC$ uniformiter deſcribi poſſit (per prop. XXXIV.) Et hæc velocitas ad velocitatem qua circulus radio SK deſcribi poſſit, hoc eſt, lineola Cc ad arcum Kk (per corol. VI.

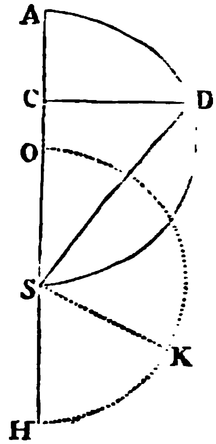


prop.

prop. iv.) eſt in ſubduplicata ratione SK ad $\frac{1}{2}SC$, id eſt, in ratione SK ad $\frac{1}{2}C\mathcal{D}$. Quare eſt $\frac{1}{2}SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{2}C\mathcal{D} \times Cc$, ideoque æquale $\frac{1}{2}ST \times \mathcal{D}d$, hoc eſt, area KSk æqualis areæ $S\mathcal{D}d$, ut ſupra. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XXV.

Corporis de loco dato A *cadentis determinare tempora deſcenſus.*

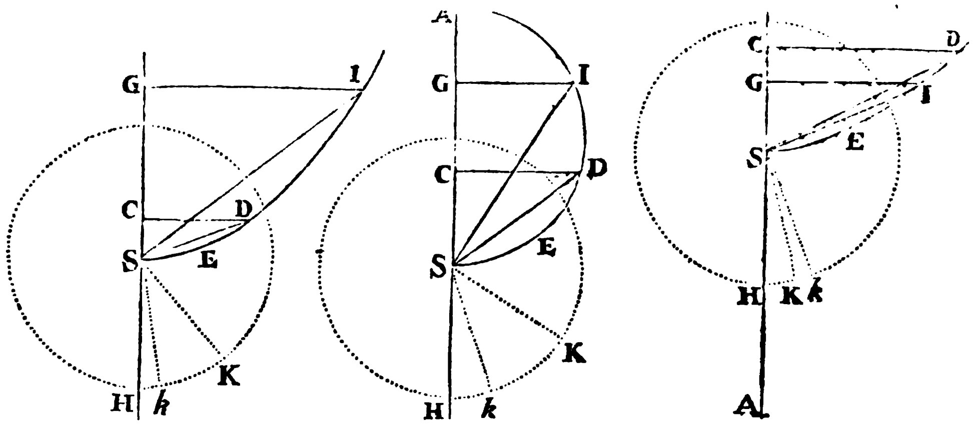


Super diametro AS, diſtantia corporis a centro ſub initio, deſcribe ſemicirculum $A\mathcal{D}S$, ut & huic æqualem ſemicirculum OKH circa centrum S. De corporis loco quovis C erige ordinatim applicatam $C\mathcal{D}$. Junge $S\mathcal{D}$, & areæ $AS\mathcal{D}$ æqualem conſtitue ſectorem OSK. Patet per prop. xxxv. quod corpus cadendo deſcribet ſpatium AC eodem tempore quo corpus aliud, uniformiter circa centrum S gyrando, deſcribere poteſt arcum OK. *Q. E. F.*

PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XXVI.

Corporis de loco dato ſurſum vel deorſum projecti definire tempora aſcenſus vel deſcenſus.

Exeat corpus de loco dato G ſecundum lineam GS cum velocitate

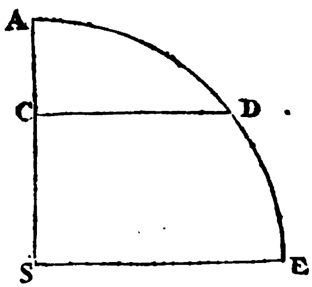


quacunque. In duplicata ratione hujus velocitatis ad uniformem in circulo

circulo velocitatem, qua corpus ad intervallum datum *SG* circa centrum *S* revolvi poſſet, cape *GA* ad $\frac{1}{4}$ *AS*. Si ratio illa eſt numeri binarii ad unitatem, punctum *A* infinite diſtat, quo caſu parabola vertice *S*, axe *SG*, latere quovis recto deſcribenda eſt. Patet hoc per prop. XXXIV. Sin ratio illa minor vel major eſt quam 2 ad 1, priore caſu circulus, poſteriore hyperbola rectangula ſuper diametro *SA* deſcribi debet. Patet per prop. XXXIII. Tum centro *S*, intervallo æquante dimidium lateris recti, deſcribatur circulus *HkK*, & ad corporis deſcendentis vel aſcendentis locum *G*, & locum alium quemvis *C*, erigantur perpendicula *GI*, *CD* occurrentia conicæ ſectioni vel circulo in *I* ac *D*. Dein junctis *SI*, *SD*, fiant ſegmentis *SEIS*, *SEDS* ſectores *HSK*, *HSk* æquales, & per prop. XXXV. corpus *G* deſcribet ſpatium *GC* eodem tempore quo corpus *K* deſcribere poteſt arcum *Kk*. *Q.E.F.*

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XII.

Poſito quod vis centripeta proportionalis ſit altitudini ſeu diſtantiæ locorum a centro, dico quod cadentium tempora, velocitates & ſpatia deſcripta ſunt arcubus, arcuumque ſinibus rectis & ſinibus verſis reſpective proportionalia.



Cadat corpus de loco quovis *A* ſecundum rectam *AS*; & centro virium *S*, intervallo *AS*, deſcribatur circuli quadrans *AE*, ſitque *CD* ſinus rectus arcus cujuſvis *AD*; & corpus *A*, tempore *AD*, cadendo deſcribit ſpatium *AC*, inque loco *C* acquiret velocitatem *CD*.

Demonſtratur eodem modo ex propoſitione X, quo propoſitio XXXII, ex propoſitione XI demonſtrata fuit.

Corol. 1. Hinc æqualia ſunt tempora, quibus corpus unum de loco *A* cadendo pervenit ad centrum *S*, & corpus aliud revolvendo deſcribit arcum quadrantalem *ADE*.

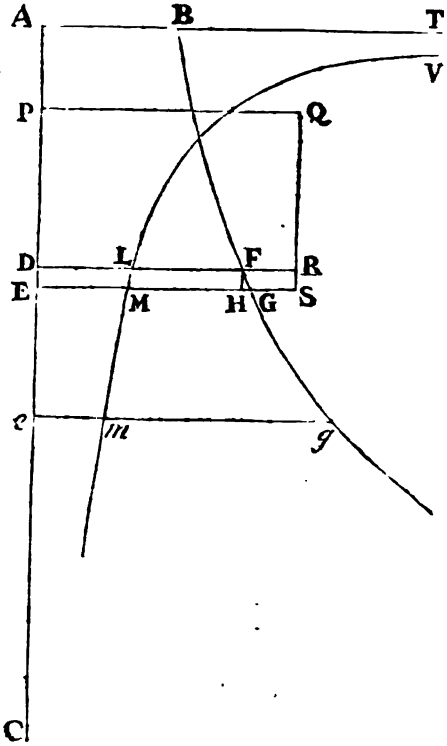
Corol. 2. Proinde æqualia ſunt tempora omnia quibus corpora de locis quibuſvis ad uſque centrum cadunt. Nam revolventium tempora omnia periodica (per corol. III. prop. IV.) æquantur.

PROPO-

PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XXVII.

Poſita cujuſcunque generis vi centripeta, & conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis recta aſcendentis vel deſcendentis tum velocitas in locis ſingulis, tum tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: Et contra.

De loco quovis *A* in recta *ADEC* cadat corpus *E*, deque loco ejus *E* erigatur ſemper perpendicularis *EG*, vi centripetæ in loco illo ad centrum *C* tendenti proportionalis: Sitque *BFG* linea curva quam punctum *G* perpetuo tangit. Coincidat autem *EG* ipſo motus initio cum perpendiculari *AB*, & erit corporis velocitas in loco quovis *E* ut recta, quæ poteſt aream curvilineam *ABGE*. *Q. E. I.*



In *EG* capiatur *EM* rectæ, quæ poteſt aream *ABGE*, reciproce proportionalis, & ſit *VLM* linea curva, quam punctum *M* perpetuo tangit, & cujus aſymptotos eſt recta *AB* producta; & erit tempus, quo corpus cadendo deſcribit lineam *AE*, ut area curvilinea *ABTVME*. *Q. E. I.*

Etenim in recta *AE* capiatur linea quam minima *DE* datæ longitudinis, ſitque *DLF* locus lineæ *EMG*, ubi corpus verſabatur in *D*; & ſi ea ſit vis centripeta, ut recta, quæ poteſt aream *ABGE*, ſit ut deſcendentis velocitas: erit area ipſa in duplicata ratione velocitatis, id eſt, ſi pro velocitatibus in *D* & *E*, ſcribantur V & V + I, erit area *ABFD* ut VV, & area *ABGE* ut VV + 2VI + II, & diviſim area *DFGE* ut 2VI + II, ideoque $\frac{DFGE}{DE}$

ut

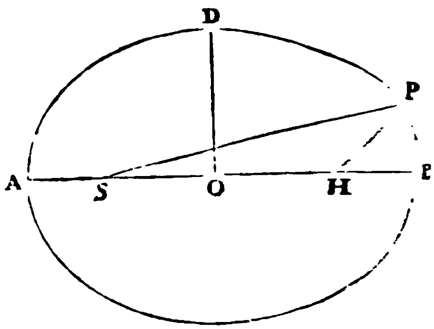
ut $\frac{2\,VI + II}{DE}$, id eſt, ſi primæ quantitatum naſcentium rationes ſumantur, longitudo *DF* ut quantitas $\frac{2\,VI}{DE}$, ideoque etiam ut quantitatis hujus dimidium $\frac{I \times V}{DE}$. Eſt autem tempus, quo corpus cadendo deſcribit lineolam *DE*, ut lineola illa directe & velocitas V inverſe, eſtque vis ut velocitatis incrementum I directe & tempus inverſe, ideoque ſi primæ naſcentium rationes ſumantur, ut $\frac{I \times V}{DE}$, hoc eſt, ut longitudo *DF*. Ergo vis ipſi *DF* vel *EG* proportionalis facit ut corpus ea cum velocitate deſcendat, quæ ſit ut recta quæ poteſt aream *ABGE*. *Q. E. D.*

Porro cum tempus, quo quælibet longitudinis datæ lineola *DE* deſcribatur, ſit ut velocitas inverſe, ideoque inverſe ut linea recta quæ poteſt aream *ABFD*; ſitque *DL*, atque ideo area naſcens *DLME*, ut eadem linea recta inverſe: erit tempus ut area *DLME*, & ſumma omnium temporum ut ſumma omnium arearum, hoc eſt (per corol. lem. IV.) tempus totum quo linea *AE* deſcribitur ut area tota *ATVME*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Si *P* ſit locus, de quo corpus cadere debet, ut urgente aliqua uniformi vi centripeta nota (qualis vulgo ſupponitur gravitas) velocitatem acquirat in loco *D* æqualem velocitati, quam corpus aliud vi quacunque cadens acquiſivit eodem loco *D*, & in perpendiculari *DF* capiatur *DR*, quæ ſit ad *DF* ut vis illa uniformis ad vim alteram in loco *D*, & compleatur rectangulum *PDRQ*, eique æqualis abſcindatur area *ABFD*; erit *A* locus de quo corpus alterum cecidit. Namque completo rectangulo *DRSE*, cum ſit area *ABFD* ad aream *DFGE* ut VV ad 2 V I, ideoque ut $\frac{1}{2}$ V ad I, id eſt, ut ſemiſſis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis vi inæquabili cadentis; & ſimiliter area *PQRD* ad aream *DRSE* ut ſemiſſis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis; ſintque incrementa illa (ob æqualitatem temporum naſcentium) ut vires generatrices, id eſt, ut ordinatim applicatæ *DF*, *DR*, ideoque ut areæ naſcentes *DFGE*, *DRSE*; erunt ex æquo areæ totæ *ABFD*, *PQRD* ad invicem ut ſemiſſes totarum velocitatum, & propterea, ob æqualitatem velocitatum, æquantur.

 Corol.

primam medii motus æquationem, ad angulum Y, æquationem maximam primam, ut eſt ſinus dupli anguli T ad radium; atque angulum X, æquationem ſecundam, ad angulum Z, æquationem maximam ſecundam, ut eſt cubus ſinus anguli T ad cubum radii. Angulorum T, V, X vel ſummæ T+X+V, ſi angulus T recto minor eſt, vel differentiæ T+X—V, ſi is recto major eſt rectiſque duobus minor, æqualem cape angulum *BHP*, motum medium æquatum; & ſi *HP* occurrat ellipſi in *P*, acta *SP* abſcindet aream *BSP* tempori proportionalem quamproxime. Hæc praxis ſatis expedita videtur, propterea quod angulorum perexiguorum V & X, in minutis ſecundis, ſi placet, poſitorum, figuras duas treſve primas invenire ſufficit. Sed & ſatis accurata eſt ad theoriam planetarum. Nam in orbe vel Martis ipſius, cujus æquatio centri maxima eſt graduum decem, error vix ſuperabit minutum unum ſecundum. Invento autem angulo motus medii æquati *BHP*, angulus veri motus *BSP* & diſtantia *SP* in promptu ſunt per methodum notiſſimam.



Hactenus de motu corporum in lineis curvis. Fieri autem poteſt ut mobile recta deſcendat vel recta aſcendat, & quæ ad iſtiuſmodi motus ſpectant, pergo jam exponere.

SECTIO VII.

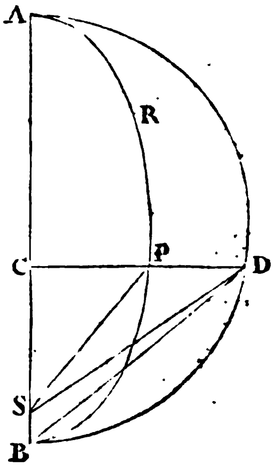
De corporum aſcenſu & deſcenſu rectilineo.

PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XXIV.

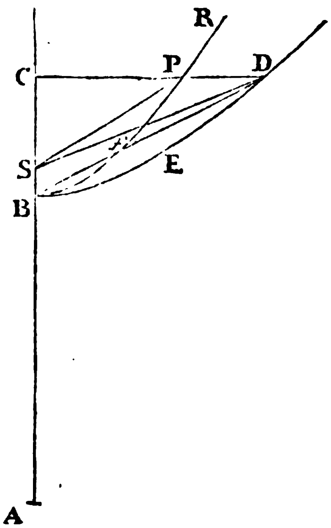
Poſito quod vis centripeta ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ locorum a centro, ſpatia definire quæ corpus recta cadendo datis temporibus deſcribit.

Caſ. 1. Si corpus non cadit perpendiculariter, deſcribet id (per corol. 1. prop. XIII.) ſectionem aliquam conicam cujus umbilicus congruit cum centro virium. Sit ſectio illa conica *ARPB* & umbilicus

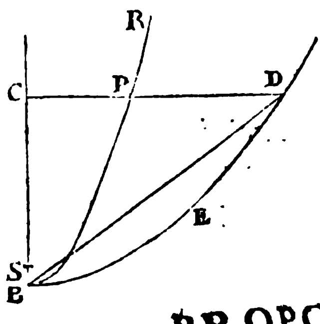
bilicus ejus *S*. Et primo ſi figura ellipſis eſt; ſuper hujus axe majore *AB* deſcribatur ſemicirculus *ADB*, & per corpus decidens tranſeat recta *DPC* perpendicularis ad axem; actiſque *DS*, *PS* erit area *ASD* areæ *ASP*, atque ideo etiam tempori proportionalis. Manente axe *AB* minuatur perpetuo latitudo ellipſeos, & ſemper manebit area *ASD* tempori proportionalis. Minuatur latitudo illa in infinitum: & orbe *APB* jam coincidente cum axe *AB* & umbilico *S* cum axis termino *B*, deſcendet corpus in recta *AC*, & area *ABD* evadet tempori proportionalis. Dabitur itaque ſpatium *AC*, quod corpus de loco *A* perpendiculariter cadendo tempore dato deſcribit, ſi modo tempori proportionalis capiatur area *ABD*, & a puncto *D* ad rectam *AB* demittatur perpendicularis *DC*. *Q. E. I.*



Caſ. 2. Si figura illa *RPB* hyperbola eſt, deſcribatur ad eandem diametrum principalem *AB* hyperbola rectangula *BED*: & quoniam areæ *CSP*, *CBfP*, *SPfB* ſunt ad areas *CSD*, *CBED*, *SDEB*, ſingulæ ad ſingulas, in data ratione altitudinum *CP*, *CD*; & area *SPfB* proportionalis eſt tempori quo corpus *P* movebitur per arcum *PfB*; erit etiam area *SDEB* eidem tempori proportionalis. Minuatur latus rectum hyperbolæ *RPB* in infinitum manente latere tranſverſo, & coibit arcus *PB* cum recta *CB* & umbilicus *S* cum vertice *B* & recta *SD* cum recta *BD*. Proinde area *BDEB* proportionalis erit tempori quo corpus *C* recto deſcenſu deſcribit lineam *CB*. *Q. E. I.*



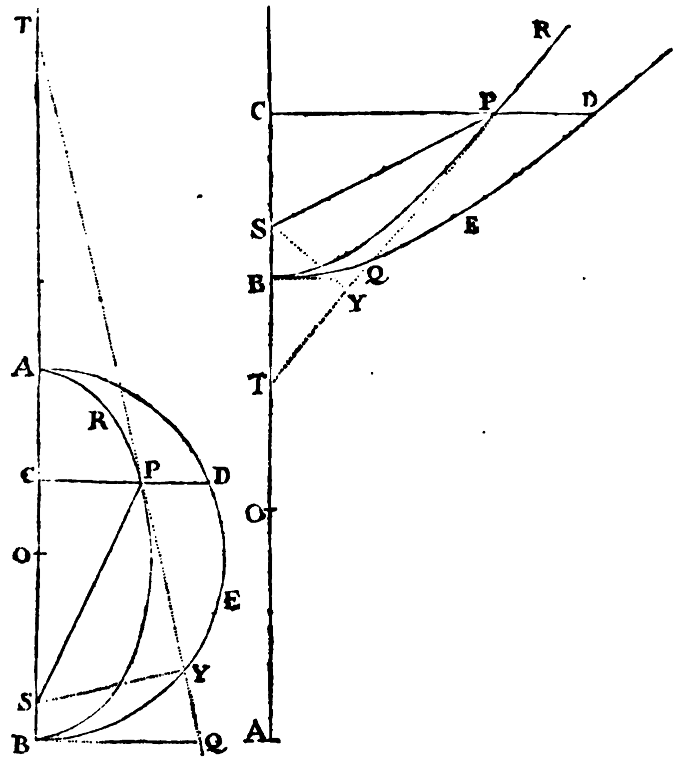
Caſ. 3. Et ſimili argumento ſi figura *RPB* parabola eſt, & eodem vertice principali *B* deſcribatur alia parabola *BED*, quæ ſemper maneat data, interea dum parabola prior, in cujus perimetro corpus *P* movetur, diminuto & in nihilum redacto ejus latere recto, conveniat cum linea *CB*; fiet ſegmentum parabolicum *BDEB* proportionale tempori quo corpus illud *P* vel *C* deſcendet ad centrum *S* vel *B*. *Q. E. I.*



PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA IX.

Poſitis jam inventis, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis C *eſt ad velocitatem corporis centro* B *intervallo* BC *circulum deſcribentis, in ſubduplicata ratione quam* AC, *diſtantia corporis a circuli vel hyperbolæ rectangulæ vertice ulteriore* A, *habet ad figuræ ſemidiametrum principalem* $\frac{1}{2}$AB.

Biſecetur *AB*, communis utriuſque figuræ *RPB*, *DEB* diameter, in *O*; & agatur recta *PT*, quæ tangat figuram *RPB* in *P*, atque etiam ſecet communem illam diametrum *AB* (ſi opus eſt pro-



ductam) in *T*; ſitque *SY* ad hanc rectam, & *BQ* ad hanc diametrum perpendicularis, atque figuræ *RPB* latus rectum ponatur L. Conſtat per corol. IX. prop. XVI. quod corporis in linea *RPB* circa centrum *S* moventis velocitas in loco quovis *P* ſit ad velocitatem

corporis

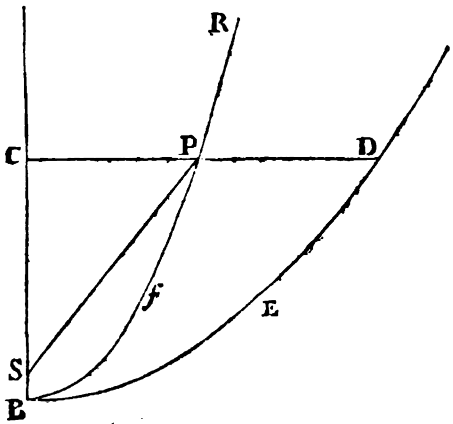
corporis intervallo SP circa idem centrum circulum deſcribentis in ſubduplicata ratione rectanguli $\frac{1}{2}L \times SP$ ad ST quadratum. Eſt autem ex conicis ACB ad CPq ut $2\,AO$ ad L, ideoque $\frac{2CPq \times AO}{ACB}$ æquale L. Ergo velocitates illæ ſunt ad invicem in ſubduplicata ratione $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ ad ST *quad.* Porro ex conicis eſt CO ad BO ut BO ad TO, & compoſite vel diviſim ut CB ad BT. Unde vel dividendo vel componendo fit $BO -$ vel $+ CO$ ad BO ut CT ad BT, id eſt, AC ad AO ut CP ad BQ; indeque $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ æquale eſt $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$. Minuatur jam in infinitum figuræ RPB latitudo CP, ſic ut punctum P coeat cum puncto C, punctumque S cum puncto B, & linea SP cum linea BC, lineaque ST cum linea BQ; & corporis jam recta deſcendentis in linea CB velocitas fiet ad velocitatem corporis centro B intervallo BC circulum deſcribentis, in ſubduplicata ratione ipſius $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$ ad STq, hoc eſt (neglectis æqualitatis rationibus SP ad BC & BQq ad STq) in ſubduplicata ratione AC ad AO ſive $\frac{1}{2}AB$. *Q. E. D.*

Corol. 1. Punctis B & S coeuntibus, fit TC ad TS ut AC ad AO.

Corol. 2. Corpus ad datam a centro diſtantiam in circulo quovis revolvens, motu ſuo ſurſum verſo aſcendet ad duplam ſuam a centro diſtantiam.

PROPOSITIO XXIV. THEOREMA X.

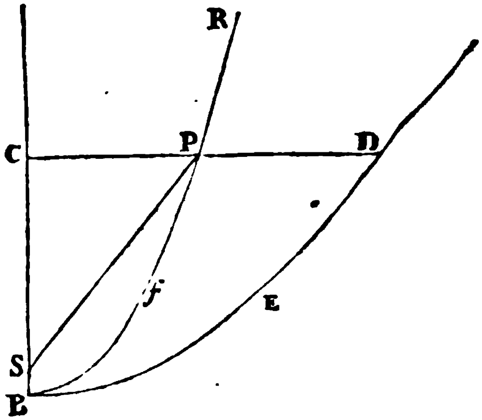
Si figura BED *parabola eſt, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis* C *æqualis eſt velocitati qua corpus centro* B *dimidio intervalli ſui* BC *circulum uniformiter deſcribere poteſt.*



Nam corporis parabolam RPB circa centrum S deſcribentis velocitas in loco quovis P (per corol. VII. prop.

De Motu Corporum

prop. xvi.) æqualis eſt velocitati corporis dimidio intervalli *SP* circulum circa idem centrum *S* uniformiter deſcribentis. Minuatur parabolæ latitudo *CP* in infinitum eo, ut arcus parabolicus *PfB* cum recta *CB*, centrum *S* cum vertice *B*, & intervallum *SP* cum intervallo *BC* coincidat, & conſtabit propoſitio. *Q. E. D.*



PROPOSITIO XXXV. THEOREMA XI.

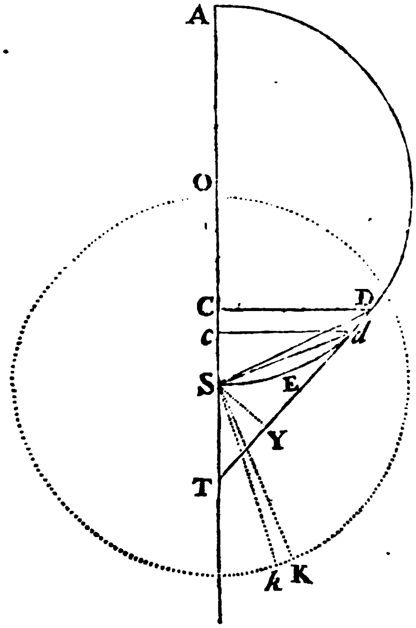
Iiſdem poſitis, dico quod area figuræ DES, *radio indefinito* SD *deſcripta, æqualis ſit areæ quam corpus, radio dimidium lateris recti figuræ* DES *æquante, circa centrum* S *uniformiter gyrando, eodem tempore deſcribere poteſt.*

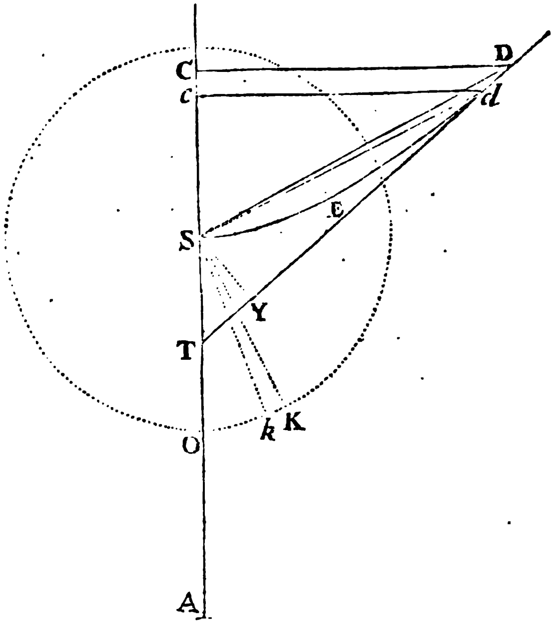
Nam concipe corpus *C* quam minima temporis particula lineolam *Cc* cadendo deſcribere, & interea corpus aliud *K*, uniformiter in circulo *OKk* circa centrum *S* gyrando, arcum *Kk* deſcribere. Erigantur perpendicula *CD*, *cd* occurrentia figuræ *DES* in *D*, *d*. Jungantur *SD*, *Sd*, *SK*, *Sk* & ducatur *Dd* axi *AS* occurrens in *T*, & ad eam demittatur perpendiculum *ST*.

Caſ. 1. Jam ſi figura *DES* circulus eſt vel hyperbola rectangula, biſecetur ejus tranſverſa diameter *AS* in *O*, & erit *SO* dimidium lateris recti. Et quoniam eſt *TC* ad *TD* ut *Cc* ad *Dd*, & *TD* ad *TS* ut *CD* ad *ST*, erit ex æquo *TC* ad *TS* ut *CD*x*Cc* ad *ST*x*Dd*. Sed (per corol 1. prop. xxxiii.) eſt *TC* ad *TS* ut *AC* ad *AO*, puta ſi in coitu punctorum *D*, *d* capiantur linearum rationes ultimæ. Ergo *AC* eſt ad *AO* ſeu *SK* ut *CD*x*Cc* ad *ST*x*Dd*. Porro corporis deſcendentis velocitas in *C* eſt ad velocitatem corporis circulum intervallo *SC* circa centrum *S* deſcribentis in ſubduplicata ratione *AC* ad *AO* vel *SK* (per prop. xxxiii.) Et hæc velocitas ad velocitatem corporis deſcribentis circulum *OKk* in ſubduplicata ratione *SK* ad *SC* (per corol. vi. prop. iv.) & ex æquo velocitas prima ad ultimam, hoc eſt lineola *Cc* ad arcum *Kk* in ſubduplicata

ratione

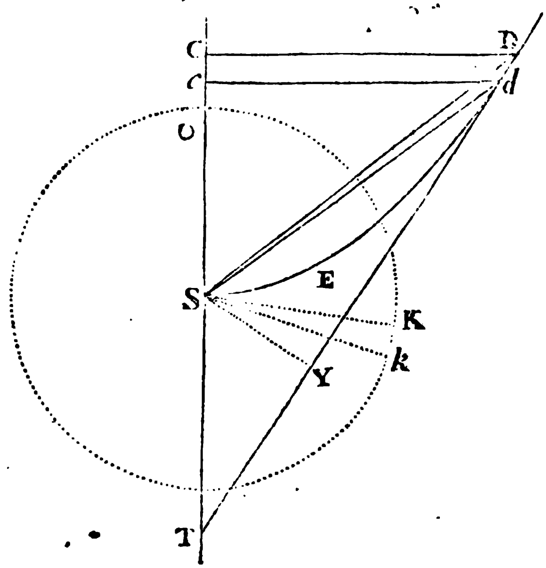
ratione AC ad SC, id eſt in ratione AC ad CD. Quare eſt $CD \times Cc$ æquale $AC \times Kk$, & propterea AC ad SK ut $AC \times Kk$ ad $SY \times Dd$, indeque $SK \times Kk$ æquale $SY \times Dd$, & $\frac{1}{2} SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{2} SY \times Dd$, id eſt area KSk æqualis areæ SDd. Singulis igitur temporis





particulis generantur arearum duarum particulæ KSk, & SDd, quæ, ſi magnitudo earum minuatur & numerus augeatur in infinitum, rationem obtinent æqualitatis, & propterea (per corollarium lemmatis IV.) areæ totæ ſimul genitæ ſunt ſemper æquales. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Quod ſi figura DES parabola ſit, invenietur eſſe ut ſupra $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$ ut TC ad TS, hoc eſt ut 2 ad 1, ideoque $\frac{1}{4} CD \times Cc$ æquale eſſe $\frac{1}{2} SY \times Dd$. Sed corporis cadentis velocitas in C æqualis eſt velocitati qua circulus intervallo $\frac{1}{2} SC$ uniformiter deſcribi poſſit (per prop. XXXIV.) Et hæc velocitas ad velocitatem qua circulus radio SK deſcribi poſſit, hoc eſt, lineola Cc ad arcum Kk (per corol. VI.



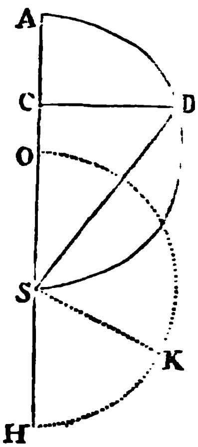
prop.

De Motu Corporum

prop. iv.) eſt in ſubduplicata ratione SK ad $\frac{1}{2}SC$, id eſt, in ratione SK ad $\frac{1}{2}C\mathcal{D}$. Quare eſt $\frac{1}{2}SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{2}C\mathcal{D} \times Cc$, ideoque æquale $\frac{1}{2}ST \times \mathcal{D}d$, hoc eſt, area KSk æqualis areæ $S\mathcal{D}d$, ut ſupra. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XXV.

Corporis de loco dato A *cadentis determinare tempora deſcenſus.*

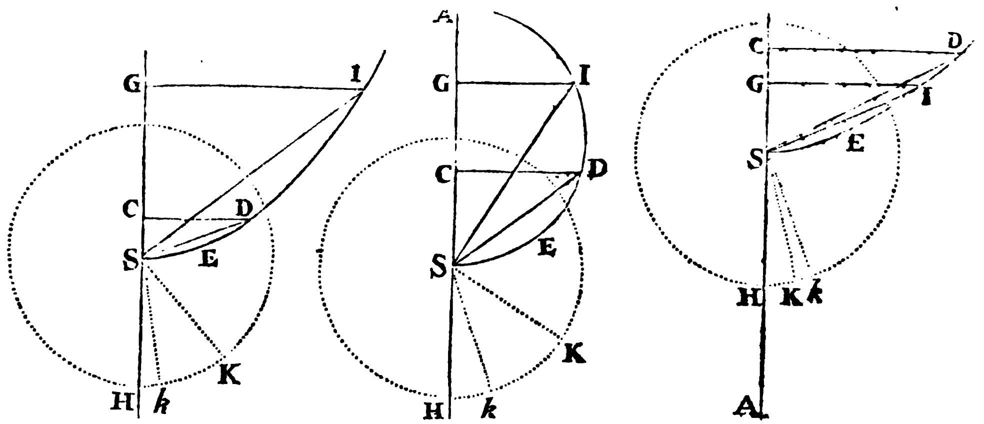


Super diametro AS, diſtantia corporis a centro ſub initio, deſcribe ſemicirculum $A\mathcal{D}S$, ut & huic æqualem ſemicirculum OKH circa centrum S. De corporis loco quovis C erige ordinatim applicatam $C\mathcal{D}$. Junge $S\mathcal{D}$, & areæ $AS\mathcal{D}$ æqualem conſtitue ſectorem OSK. Patet per prop. xxxv. quod corpus cadendo deſcribet ſpatium AC eodem tempore quo corpus aliud, uniformiter circa centrum S gyrando, deſcribere poteſt arcum OK. *Q. E. F.*

PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XXVI.

Corporis de loco dato ſurſum vel deorſum projecti definire tempora aſcenſus vel deſcenſus.

Exeat corpus de loco dato G ſecundum lineam GS cum velocitate

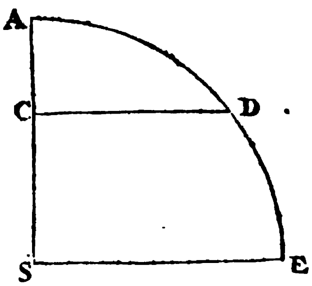


quacunque. In duplicata ratione hujus velocitatis ad uniformem in circulo

circulo velocitatem, qua corpus ad intervallum datum *SG* circa centrum *S* revolvi poſſet, cape *GA* ad ½ *AS*. Si ratio illa eſt numeri binarii ad unitatem, punctum *A* infinite diſtat, quo caſu parabola vertice *S*, axe *SG*, latere quovis recto deſcribenda eſt. Patet hoc per prop. XXXIV. Sin ratio illa minor vel major eſt quam 2 ad 1, priore caſu circulus, poſteriore hyperbola rectangula ſuper diametro *SA* deſcribi debet. Patet per prop. XXXIII. Tum centro *S*, intervallo æquante dimidium lateris recti, deſcribatur circulus *HkK*, & ad corporis deſcendentis vel aſcendentis locum *G*, & locum alium quemvis *C*, erigantur perpendicula *GI*, *CD* occurrentia conicæ ſectioni vel circulo in *I* ac *D*. Dein junctis *SI*, *SD*, fiant ſegmentis *SEIS*, *SEDS* ſectores *HSK*, *HSk* æquales, & per prop. XXXV. corpus *G* deſcribet ſpatium *GC* eodem tempore quo corpus *K* deſcribere poteſt arcum *Kk*. *Q.E.F.*

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XII.

Poſito quod vis centripeta proportionalis ſit altitudini ſeu diſtantiæ locorum a centro, dico quod cadentium tempora, velocitates & ſpatia deſcripta ſunt arcubus, arcuumque ſinibus rectis & ſinibus verſis reſpective proportionalia.



Cadat corpus de loco quovis *A* ſecundum rectam *AS*; & centro virium *S*, intervallo *AS*, deſcribatur circuli quadrans *AE*, ſitque *CD* ſinus rectus arcus cujuſvis *AD*; & corpus *A*, tempore *AD*, cadendo deſcribit ſpatium *AC*, inque loco *C* acquiret velocitatem *CD*.

Demonſtratur eodem modo ex propoſitione X, quo propoſitio XXXII, ex propoſitione XI demonſtrata fuit.

Corol. 1. Hinc æqualia ſunt tempora, quibus corpus unum de loco *A* cadendo pervenit ad centrum *S*, & corpus aliud revolvendo deſcribit arcum quadrantalem *ADE*.

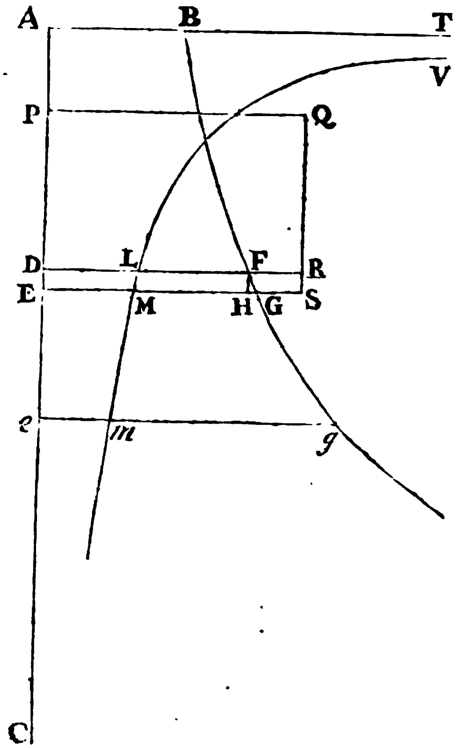
Corol. 2. Proinde æqualia ſunt tempora omnia quibus corpora de locis quibuſvis ad uſque centrum cadunt. Nam revolventium tempora omnia periodica (per corol. III. prop. IV.) æquantur.

PROPO-

PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XXVII.

Poſita cujuſcunque generis vi centripeta, & conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis recta aſcendentis vel deſcendentis tum velocitas in locis ſingulis, tum tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: Et contra.

De loco quovis *A* in recta *ADEC* cadat corpus *E*, deque loco ejus *E* erigatur ſemper perpendicularis *EG*, vi centripetæ in loco illo ad centrum *C* tendenti proportionalis: Sitque *BFG* linea curva quam punctum *G* perpetuo tangit. Coincidat autem *EG* ipſo motus initio cum perpendiculari *AB*, & erit corporis velocitas in loco quovis *E* ut recta, quæ poteſt aream curvilineam *ABGE*. *Q.E.I.*



In *EG* capiatur *EM* rectæ, quæ poteſt aream *ABGE*, reciproce proportionalis, & ſit *VLM* linea curva, quam punctum *M* perpetuo tangit, & cujus aſymptotos eſt recta *AB* producta; & erit tempus, quo corpus cadendo deſcribit lineam *AE*, ut area curvilinea *ABTVME*. *Q.E.I.*

Etenim in recta *AE* capiatur linea quam minima *DE* datæ longitudinis, ſitque *DLF* locus lineæ *EMG*, ubi corpus verſabatur in *D*; & ſi ea ſit vis centripeta, ut recta, quæ poteſt aream *ABGE*, ſit ut deſcendentis velocitas: erit area ipſa in duplicata ratione velocitatis, id eſt, ſi pro velocitatibus in *D* & *E*, ſcribantur V & V + I, erit area *ABFD* ut VV, & area *ABGE* ut VV + 2VI + II, & diviſim area *DFGE* ut 2 VI + II, ideoque $\frac{DFGE}{DE}$ ut

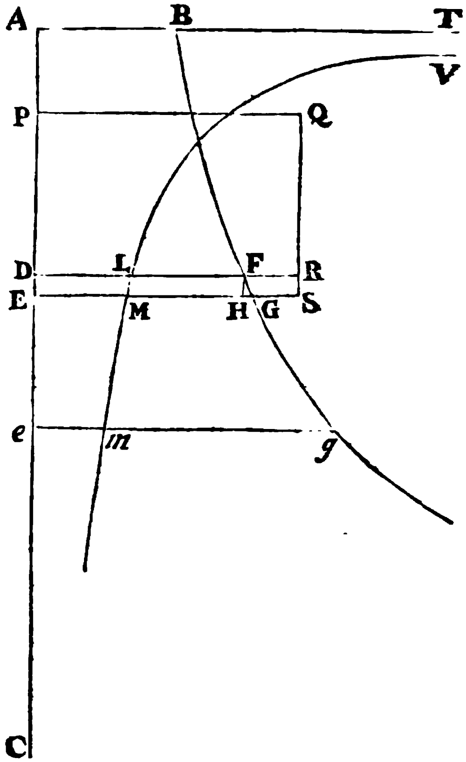
ut $\frac{2\,\mathrm{VI}+\mathrm{II}}{DE}$, id eſt, ſi primæ quantitatum naſcentium rationes ſumantur, longitudo *DF* ut quantitas $\frac{2\,\mathrm{VI}}{DE}$, ideoque etiam ut quantitatis hujus dimidium $\frac{\mathrm{I}\times\mathrm{V}}{DE}$. Eſt autem tempus, quo corpus cadendo deſcribit lineolam *DE*, ut lineola illa directe & velocitas V inverſe, eſtque vis ut velocitatis incrementum I directe & tempus inverſe, ideoque ſi primæ naſcentium rationes ſumantur, ut $\frac{\mathrm{I}\times\mathrm{V}}{DE}$, hoc eſt, ut longitudo *DF*. Ergo vis ipſi *DF* vel *EG* proportionalis facit ut corpus ea cum velocitate deſcendat, quæ ſit ut recta quæ poteſt aream *ABGE*. *Q. E. D.*

Porro cum tempus, quo quælibet longitudinis datæ lineola *DE* deſcribatur, ſit ut velocitas inverſe, ideoque inverſe ut linea recta quæ poteſt aream *ABFD*; ſitque *DL*, atque ideo area naſcens *DLME*, ut eadem linea recta inverſe: erit tempus ut area *DLME*, & ſumma omnium temporum ut ſumma omnium arearum, hoc eſt (per corol. lem. IV.) tempus totum quo linea *AE* deſcribitur ut area tota *ATVME*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Si *P* ſit locus, de quo corpus cadere debet, ut urgente aliqua uniformi vi centripeta nota (qualis vulgo ſupponitur gravitas) velocitatem acquirat in loco *D* æqualem velocitati, quam corpus aliud vi quacunque cadens acquiſivit eodem loco *D*, & in perpendiculari *DF* capiatur *DR*, quæ ſit ad *DF* ut vis illa uniformis ad vim alteram in loco *D*, & compleatur rectangulum *PDRQ*, eique æqualis abſcindatur area *ABFD*; erit *A* locus de quo corpus alterum cecidit. Namque completo rectangulo *DRSE*, cum ſit area *ABFD* ad aream *DFGE* ut VV ad 2 V I, ideoque ut $\frac{1}{2}$ V ad I, id eſt, ut ſemiſſis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis vi inæquabili cadentis; & ſimiliter area *PQRD* ad aream *DRSE* ut ſemiſſis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis; ſintque incrementa illa (ob æqualitatem temporum naſcentium) ut vires generatrices, id eſt, ut ordinatim applicatæ *DF*, *DR*, ideoque ut areæ naſcentes *DFGE*, *DRSE*; erunt ex æquo areæ totæ *ABFD*, *PQRD* ad invicem ut ſemiſſes totarum velocitatum, & propterea, ob æqualitatem velocitatum, æquantur.

R Corol.

Corol. 2. Unde ſi corpus quodlibet de loco quocunque *D* data cum velocitate vel ſurſum vel deorſum projiciatur, & detur lex vis centripetæ, invenietur velocitas ejus in alio quovis loco *e*, erigendo ordinatam *eg*, & capiendo velocitatem illam ad velocitatem in loco *D* ut eſt recta, quæ poteſt rectangulum *PQRD* area curvilinea *DFge* vel auctum, ſi locus *e* eſt loco *D* inferior, vel diminutum, ſi is ſuperior eſt, ad rectam quæ poteſt rectangulum ſolum *PQRD*.



Corol. 3. Tempus quoque innoteſcet erigendo ordinatam *em* reciproce proportionalem lateri quadrato ex *PQRD* + vel — *DFge*, & capiendo tempus quo corpus deſcripſit lineam *De* ad tempus quo corpus alterum vi uniformi cecidit a *P* & cadendo pervenit ad *D*, ut area curvilinea *DLme* ad rectangulum 2*PD* x *DL*. Namque tempus quo corpus vi uniformi deſcendens deſcripſit lineam *PD* eſt ad tempus quo corpus idem deſcripſit lineam *PE* in ſubduplicata ratione *PD* ad *PE*, id eſt (lineola *DE* jamjam naſcente) in ratione *PD* ad *PD* + $\frac{1}{2}$ *DE* ſeu 2*PD* ad 2*PD* + *DE*, & diviſim, ad tempus quo corpus idem deſcripſit lineolam *DE* ut 2*PD* ad *DE*, ideoque ut rectangulum 2*PD* x *DL* ad aream *DLME*; eſtque tempus quo corpus utrumque deſcripſit lineolam *DE* ad tempus quo corpus alterum inæquabili motu deſcripſit lineam *De*, ut area *DLME* ad aream *DLme*, & ex æquo tempus primum ad tempus ultimum ut rectangulum 2*PD* x *DL* ad aream *DLme*.

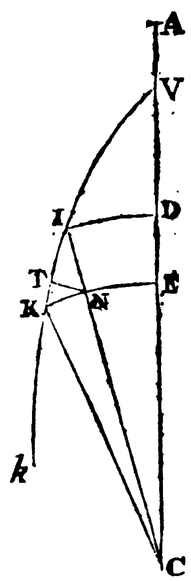
SECTIO VIII.

De inventione orbium in quibus corpora viribus quibuſcunque centripetis agitata revolvuntur.

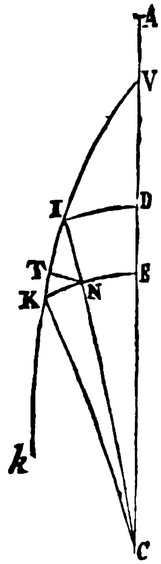
PROPOSITIO XL. THEOREMA. XIII.

Si corpus, cogente vi quacunque centripeta, moveatur utcunque, & corpus aliud recta aſcendat vel deſcendat, ſintque eorum velocitates in aliquo æqualium altitudinum caſu æquales, velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.

Deſcendat corpus aliquod ab *A* per *D*, *E*, ad centrum *C*, & moveatur corpus aliud a *V* in linea curva *VIKk*. Centro *C* intervallis quibuſvis deſcribantur circuli concentrici *DI*, *EK* rectæ *AC* in *D* & *E*, curvæque *VIK* in *I* & *K* occurrentes. Jungatur *IC* occurrens ipſi *KE* in *N*; & in *IK* demittatur perpendiculum *NT*; ſitque circumferentiarum circulorum intervallum *DE* vel *IN* quam minimum, & habeant corpora in *D* & *I* velocitates æquales. Quoniam diſtantiæ *CD*, *CI* æquantur, erunt vires centripetæ in *D* & *I* æquales. Exponantur hæ vires per æquales lineolas *DE*, *IN*; & ſi vis una *IN* (per legum corol. 2.) reſolvatur in duas *NT* & *IT*, vis *NT*, agendo ſecundum lineam *NT* corporis curſui *ITK* perpendicularem, nil mutabit velocitatem corporis in curſu illo, ſed retrahet ſolummodo corpus a curſu rectilineo, facietque ipſum de orbis tangente perpetuo deflectere, inque via curvilinea *ITKk* progredi. In hoc effectu producendo vis illa tota conſumetur: vis autem altera *IT*, ſecundum corporis curſum agendo, tota accelerabit illud, ac dato tempore quam minimo accelerationem generabit ſibi ipſi proportionalem. Proinde corporum in *D* & *I* accelerationes æqualibus temporibus factæ (ſi



ſumantur linearum naſcentium *DE*, *IN*, *IK*, *IT*, *NT* rationes primæ) ſunt ut lineæ *DE*, *IT*: temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ & tempora conjunctim. Tempora autem quibus *DE* & *IK* deſcribuntur, ob æqualitatem velocitatum ſunt ut viæ deſcriptæ *DE* & *IK*, ideoque accelerationes, in curſu corporum per lineas *DE* & *IK*, ſunt ut *DE* & *IT*, *DE* & *IK* conjunctim, id eſt ut *DE quad.* & $IT \times IK$ *rectangulum*. Sed *rectangulum* $IT \times IK$ æquale eſt *IN quadrato*, hoc eſt, æquale *DE quad.* & propterea accelerationes in tranſitu corporum a *D* & *I* ad *E* & *K* æquales generantur. Æquales igitur ſunt corporum velocitates in *E* & *K*: & eodem argumento ſemper reperientur æquales in ſubſequentibus æqualibus diſtantiis. *Q. E. D.*



Sed & eodem argumento corpora æquivelocia & æqualiter a centro diſtantia, in aſcenſu ad æquales diſtantias æqualiter retardabuntur. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi corpus vel oſcilletur pendens a filo, vel impedimento quovis politiſſimo & perfecte lubrico cogatur in linea curva moveri, & corpus aliud recta aſcendat vel deſcendat, ſintque velocitates eorum in eadem quacunque altitudine æquales: erunt velocitates eorum in aliis quibuſcunque æqualibus altitudinibus æquales. Namque corporis penduli filo vel impedimento vaſis abſolute lubrici idem præſtatur quod vi tranſverſa *NT*. Corpus eo non retardatur, non acceleratur, ſed tantum cogitur de curſu rectilineo diſcedere.

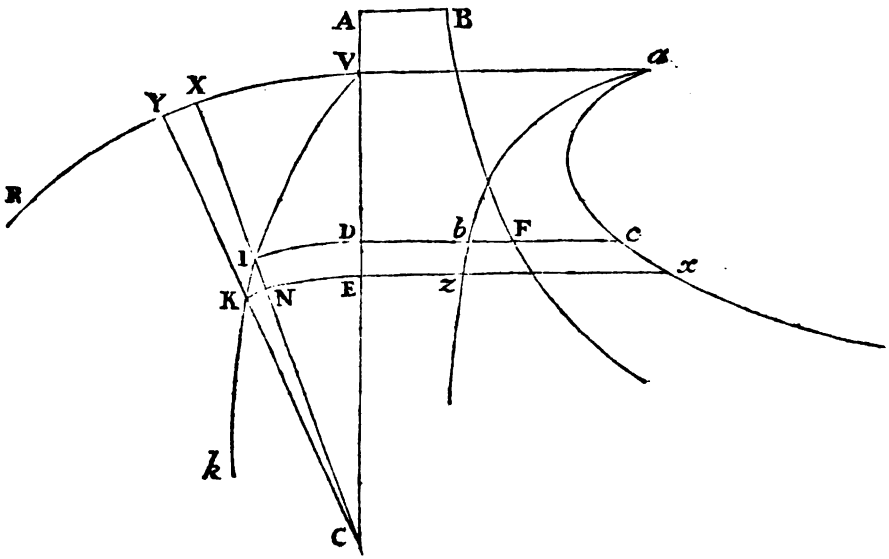
Corol. 2. Hinc etiam ſi quantitas P ſit maxima a centro diſtantia, ad quam corpus vel oſcillans vel in trajectoria quacunque revolvens, deque quovis trajectoriæ puncto, ea quam ibi habet velocitate ſurſum projectum aſcendere poſſit; ſitque quantitas A diſtantia corporis a centro in alio quovis orbitæ puncto, & vis centripeta ſemper ſit ut ipſius A dignitas quælibet A^{n-1}, cujus index $n-1$ eſt numerus quilibet n unitate diminutus; velocitas corporis in omni altitudine A erit ut $\sqrt{P^n - A^n}$, atque ideo datur. Namque velocitas recta aſcendentis ac deſcendentis (per prop. xxxix.) eſt in hac ipſa ratione.

PROPO-

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXVIII.

Poſita cujuſcunque generis vi centripeta & conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum trajectoriæ in quibus corpora movebuntur, tum tempora motuum in trajectoriis inventis.

Tendat vis quælibet ad centrum *C* & invenienda ſit trajectoria *VIKk*. Detur circulus *VR* centro *C* intervallo quovis *CV* deſcriptus, centroque eodem deſcribantur alii quivis circuli *ID*, *KE* trajectoriam ſecantes in *I* & *K* rectamque *CV* in *D* & *E*. Age tum rectam *CNIX* ſecantem circulos *KE*, *VR* in *N* & *X*, tum rectam *CKY* occurrentem circulo *VR* in *Y*. Sint autem puncta *I* & *K* ſibi invicem viciniſſima, & pergat corpus ab *V* per *I* & *K*

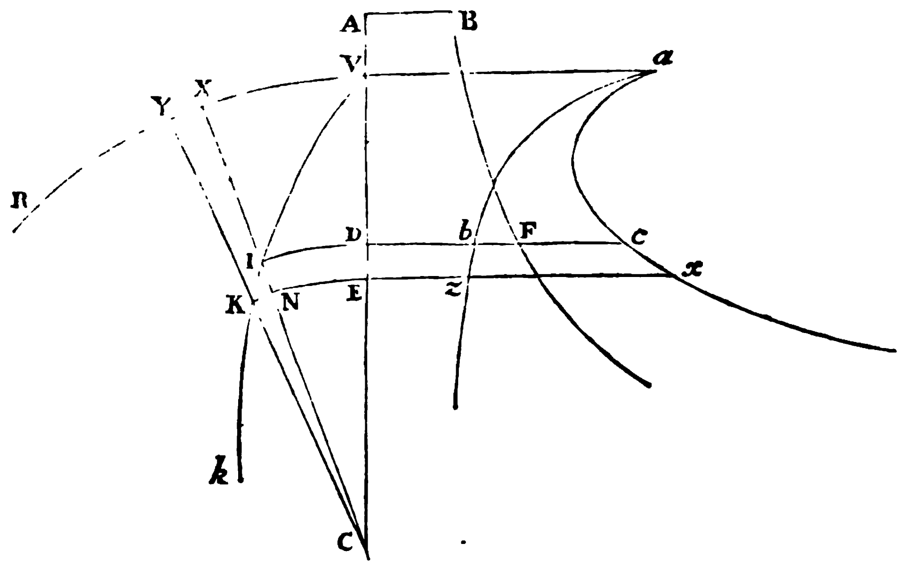


ad *k*; ſitque punctum *A* locus ille de quo corpus aliud cadere debet, ut in loco *D* velocitatem acquirat æqualem velocitati corporis prioris in *I*. Et ſtantibus quæ in propoſitione XXXIX, lineola *IK*, dato tempore quam minimo deſcripta, erit ut velocitas, atque ideo ut recta quæ poteſt aream *ABFD*, & triangulum *ICK* tempori proportionale dabitur, ideoque *KN* erit reciproce ut altitudo *IC*,

id.

De Motu Corporum

id eſt, ſi detur quantitas aliqua Q, & altitudo *IC* nominetur A, ut $\frac{Q}{A}$. Hanc quantitatem $\frac{Q}{A}$ nominemus Z, & ponamus eam eſſe magnitudinem ipſius Q ut ſit in aliquo caſu $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut eſt *IK* ad *KN*, & erit in omni caſu $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut *IK* ad *KN*, &



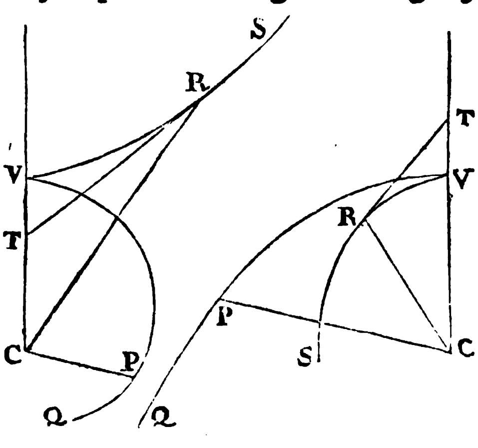
ABFD ad ZZ ut *IKq* ad *KNq*, & diviſim *ABFD*—ZZ ad ZZ ut *IN quad.* ad *KN quad.* ideoque $\sqrt{ABFD - ZZ}$ ad Z ſeu $\frac{Q}{A}$ ut *IN* ad *KN*, & propterea $A \times KN$ æquale $\frac{Q \times IN}{\sqrt{ABFD - ZZ}}$. Unde cum $YX \times XC$ ſit ad $A \times KN$ ut *CXq* ad AA, erit rectangulum $XY \times XC$ æquale $\frac{Q \times IN \times CX\ quad.}{AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$. Igitur ſi in perpendiculo *DF* capiantur ſemper *Db*, *Dc* ipſis $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD - ZZ}}$, $\frac{Q \times CX\ quad.}{2AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$ æquales reſpective, & deſcribantur curvæ lineæ *ab*, *ac*, quas puncta *b*, *c* perpetuo tangunt; deque puncto *V* ad lineam *AC* erigatur perpendiculum *Va* abſcindens areas curvilineas *VDba*, *VDca*, & erigantur etiam ordinatæ *Ez*, *Ex*: quoniam rectangulum $Db \times IN$ ſeu *DbzE* æquale eſt dimidio rectanguli

guli A×KN ſeu triangulo ICK; & rectangulum 𝔇c×IN ſeu 𝔇c×E æquale eſt dimidio rectanguli YX×XC ſeu triangulo XCY; hoc eſt, quoniam arearum V𝔇ba, VIC æquales ſemper ſunt naſcentes particulæ 𝔇bzE, ICK, & arearum V𝔇ca, VCX æquales ſemper ſunt naſcentes particulæ 𝔇cxE, XCY, erit area genita V𝔇ba æqualis areæ genitæ VIC, ideoque tempori proportionalis, & area genita V𝔇ca æqualis ſectori genito VCX. Dato igitur tempore quovis ex quo corpus diſceſſit de loco V, dabitur area ipſi proportionalis V𝔇ba, & inde dabitur corporis altitudo C𝔇 vel CI; & area V𝔇ca, eique æqualis ſector VCX una cum ejus angulo VCI. Datis autem angulo VCI & altitudine CI datur locus I, in quo corpus completo illo tempore reperietur. Q. E. I.

Corol. 1. Hinc maximæ minimæque corporum altitudines, id eſt, apſides trajectoriarum expedite inveniri poſſunt. Sunt enim apſides puncta illa in quibus recta IC per centrum ducta incidit perpendiculariter in trajectoriam VIK: id quod fit ubi rectæ IK & NK æquantur, ideoque ubi area ABF𝔇 æqualis eſt ZZ.

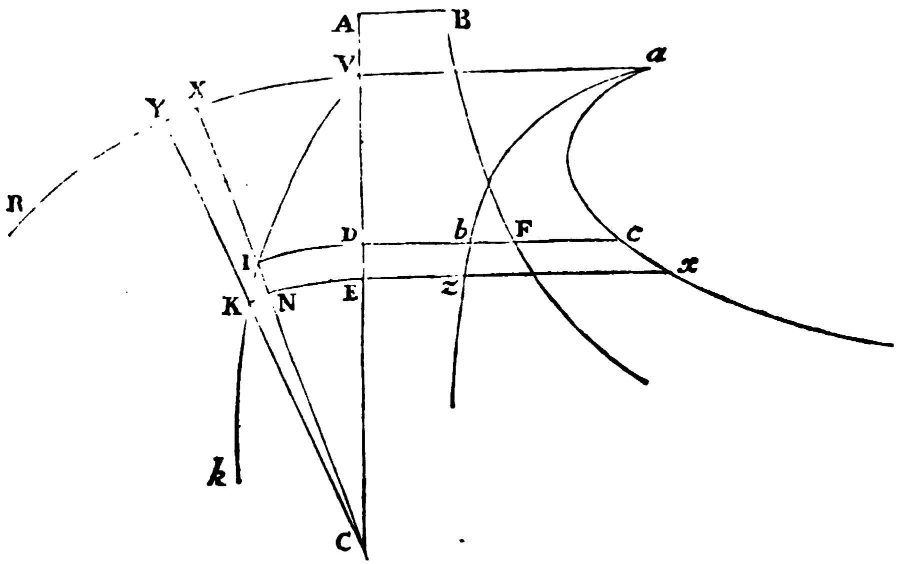
Corol. 2. Sed & angulus KIN, in quo trajectoria alicubi ſecat lineam illam IC, ex data corporis altitudine IC expedite invenitur; nimirum capiendo ſinum ejus ad radium ut KN ad IK, id eſt, ut Z ad latus quadratum areæ ABF𝔇.

Corol. 3. Si centro C & vertice principali V deſcribatur ſectio quælibet conica VRS, & a quovis ejus puncto R agatur tangens RT occurrens axi infinitæ producto CV in puncto T; dein juncta CR ducatur recta CP, quæ æqualis ſit abſciſſæ CT, angulumque VCP ſectori VCR proportionalem conſtituat; tendat autem ad centrum C vis centripeta cubo diſtantiæ locorum a centro reciproce proportionalis, & exeat corpus de loco V juſta cum velocitate ſecundum lineam rectæ CV perpendicularem: pro-



gredietur corpus illud in trajectoria VPQ quam punctum P perpetuo tangit; ideoque ſi conica ſectio VRS hyperbola ſit, deſcendet idem ad centrum: Sin ea ellipſis ſit, aſcendet illud perpetuo & abibit

id eſt, ſi detur quantitas aliqua Q, & altitudo *IC* nominetur A, ut $\frac{Q}{A}$. Hanc quantitatem $\frac{Q}{A}$ nominemus Z, & ponamus eam eſſe magnitudinem ipſius Q ut ſit in aliquo caſu $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut eſt *IK* ad *KN*, & erit in omni caſu $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut *IK* ad *KN*, &



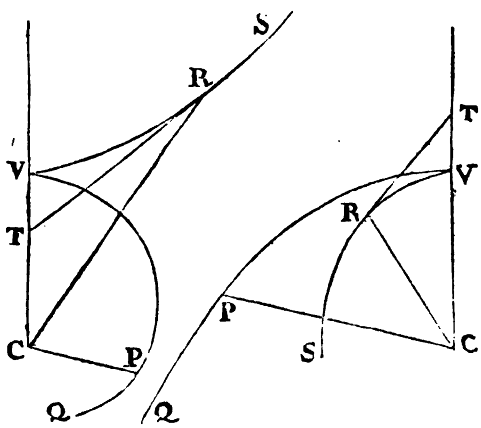
ABFD ad ZZ ut *IKq* ad *KNq*, & diviſim *ABFD*—ZZ ad ZZ ut *IN quad.* ad *KN quad.* ideoque $\sqrt{ABFD - ZZ}$ ad Z ſeu $\frac{Q}{A}$ ut *IN* ad *KN*, & propterea A×*KN* æquale $\frac{Q \times IN}{\sqrt{ABFD - ZZ}}$. Unde cum *YX*×*XC* ſit ad A×*KN* ut *CXq* ad AA, erit rectangulum *XY*×*XC* æquale $\frac{Q \times IN \times CX\ quad.}{AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$. Igitur ſi in perpendiculo *DF* capiantur ſemper *Db*, *Dc* ipſis $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD - ZZ}}$, $\frac{Q \times CX\ quad.}{2AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$ æquales reſpective, & deſcribantur curvæ lineæ *ab*, *ac*, quas puncta *b*, *c* perpetuo tangunt; deque puncto *V* ad lineam *AC* erigatur perpendiculum *Va* abſcindens areas curvilineas *VDba*, *VDca*, & erigantur etiam ordinatæ *Ez*, *Ex*: quoniam rectangulum *Db*×*IN* ſeu *DbzE* æquale eſt dimidio rectanguli

guli $A \times KN$ ſeu triangulo *ICK*; & rectangulum $\mathcal{D}c \times IN$ ſeu $\mathcal{D}c\,xE$ æquale eſt dimidio rectanguli $YX \times XC$ ſeu triangulo *XCY*; hoc eſt, quoniam arearum *V𝒟ba*, *VIC* æquales ſemper ſunt naſcentes particulæ *𝒟bzE*, *ICK*, & arearum *V𝒟ca*, *VCX* æquales ſemper ſunt naſcentes particulæ *𝒟cxE*, *XCY*, erit area genita *V𝒟ba* æqualis areæ genitæ *VIC*, ideoque tempori proportionalis, & area genita *V𝒟ca* æqualis ſectori genito *VCX*. Dato igitur tempore quovis ex quo corpus diſceſſit de loco *V*, dabitur area ipſi proportionalis *V𝒟ba*, & inde dabitur corporis altitudo *C𝒟* vel *CI*; & area *V𝒟ca*, eique æqualis ſector *VCX* una cum ejus angulo *VCI*. Datis autem angulo *VCI* & altitudine *CI* datur locus *I*, in quo corpus completo illo tempore reperietur. *Q.E.I.*

Corol. 1. Hinc maximæ minimæque corporum altitudines, id eſt, apſides trajectoriarum expedite inveniri poſſunt. Sunt enim apſides puncta illa in quibus recta *IC* per centrum ducta incidit perpendiculariter in trajectoriam *VIK*: id quod fit ubi rectæ *IK* & *NK* æquantur, ideoque ubi area *ABF𝒟* æqualis eſt *ZZ*.

Corol. 2. Sed & angulus *KIN*, in quo trajectoria alicubi ſecat lineam illam *IC*, ex data corporis altitudine *IC* expedite invenitur; nimirum capiendo ſinum ejus ad radium ut *KN* ad *IK*, id eſt, ut *Z* ad latus quadratum areæ *ABF𝒟*.

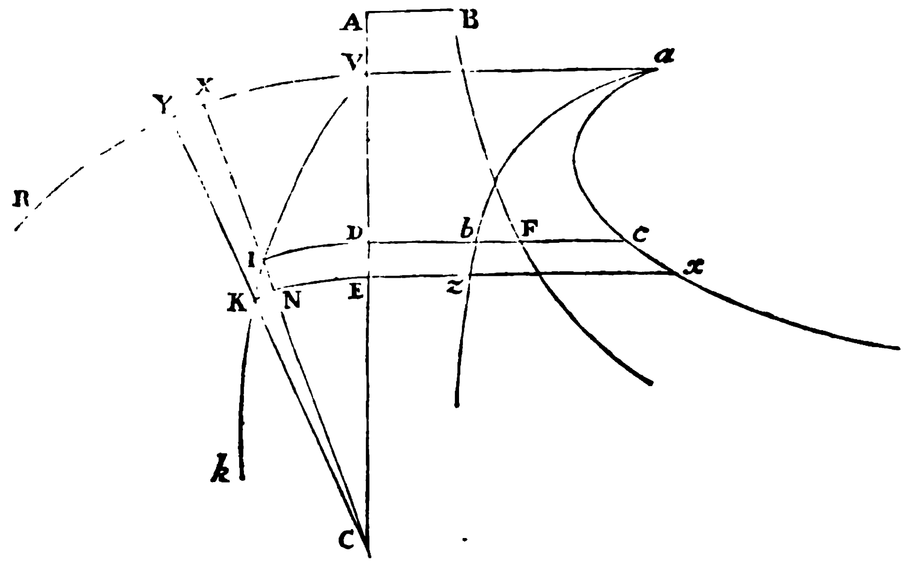
Corol. 3. Si centro *C* & vertice principali *V* deſcribatur ſectio quælibet conica *VRS*, & a quovis ejus puncto *R* agatur tangens *RT* occurrens axi infinitæ producto *CV* in puncto *T*; dein juncta *CR* ducatur recta *C𝒫*, quæ æqualis ſit abſciſſæ *CT*, angulumque *VC𝒫* ſectori *VCR* proportionalem conſtituat; tendat autem ad centrum *C* vis centripeta cubo diſtantiæ locorum a centro reciproce proportionalis, & exeat corpus de loco *V* juſta cum velocitate ſecundum lineam rectæ *CV* perpendicularem: progredietur corpus illud in trajectoria *V𝒫𝒬* quam punctum *𝒫* perpetuo tangit; ideoque ſi conica ſectio *VRS* hyperbola ſit, deſcendet idem ad centrum: Sin ea ellipſis ſit, aſcendet illud perpetuo &



abibit

DE MOTU CORPORUM

id eſt, ſi detur quantitas aliqua Q, & altitudo IC nominetur A, ut $\frac{\text{Q}}{\text{A}}$. Hanc quantitatem $\frac{\text{Q}}{\text{A}}$ nominemus Z, & ponamus eam eſſe magnitudinem ipſius Q ut ſit in aliquo caſu $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut eſt IK ad KN, & erit in omni caſu $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut IK ad KN, &



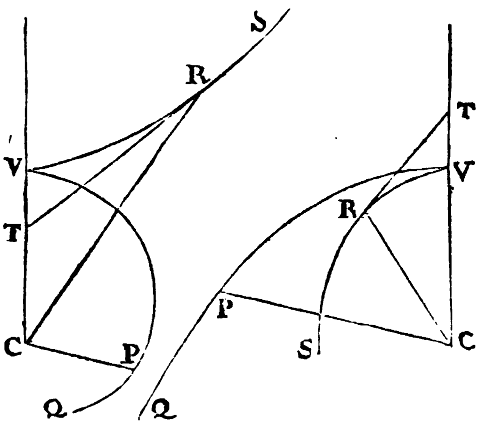
$ABFD$ ad ZZ ut IKq ad KNq, & diviſim $ABFD-ZZ$ ad ZZ ut IN *quad.* ad KN *quad.* ideoque $\sqrt{ABFD-ZZ}$ ad Z ſeu $\frac{\text{Q}}{\text{A}}$ ut IN ad KN, & propterea $\text{A}\times KN$ æquale $\frac{\text{Q}\times IN}{\sqrt{ABFD-ZZ}}$. Unde cum $YX\times XC$ ſit ad $\text{A}\times KN$ ut CXq ad AA, erit rectangulum $XY\times XC$ æquale $\frac{\text{Q}\times IN\times CX\ quad.}{\text{AA}\sqrt{ABFD-ZZ}}$. Igitur ſi in perpendiculo DF capiantur ſemper Db, Dc ipſis $\frac{\text{Q}}{2\sqrt{ABFD-ZZ}}$, $\frac{\text{Q}\times CX\ quad.}{2\text{AA}\sqrt{ABFD-ZZ}}$ æquales reſpective, & deſcribantur curvæ lineæ ab, ac, quas puncta b, c perpetuo tangunt; deque puncto V ad lineam AC erigatur perpendiculum Va abſcindens areas curvilineas $VDba$, $VDca$, & erigantur etiam ordinatæ Ez, Ex: quoniam rectangulum $Db\times IN$ ſeu $DbzE$ æquale eſt dimidio rectanguli

guli $A \times KN$ ſeu triangulo ICK; & rectangulum $Dc \times IN$ ſeu $DcxE$ æquale eſt dimidio rectanguli $YX \times XC$ ſeu triangulo XCY; hoc eſt, quoniam arearum $VDba$, VIC æquales ſemper ſunt naſcentes particulæ $DbzE$, ICK, & arearum $VDca$, VCX æquales ſemper ſunt naſcentes particulæ $DcxE$, XCY, erit area genita $VDba$ æqualis areæ genitæ VIC, ideoque tempori proportionalis, & area genita $VDca$ æqualis ſectori genito VCX. Dato igitur tempore quovis ex quo corpus diſceſſit de loco V, dabitur area ipſi proportionalis $VDba$, & inde dabitur corporis altitudo CD vel CI; & area $VDca$, eique æqualis ſector VCX una cum ejus angulo VCI. Datis autem angulo VCI & altitudine CI datur locus I, in quo corpus completo illo tempore reperietur. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc maximæ minimæque corporum altitudines, id eſt, apſides trajectoriarum expedite inveniri poſſunt. Sunt enim apſides puncta illa in quibus recta IC per centrum ducta incidit perpendiculariter in trajectoriam VIK: id quod fit ubi rectæ IK & NK æquantur, ideoque ubi area $ABFD$ æqualis eſt ZZ.

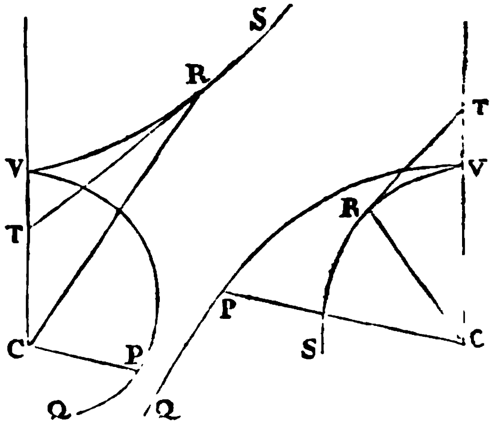
Corol. 2. Sed & angulus KIN, in quo trajectoria alicubi ſecat lineam illam IC, ex data corporis altitudine IC expedite invenitur; nimirum capiendo ſinum ejus ad radium ut KN ad IK, id eſt, ut Z ad latus quadratum areæ $ABFD$.

Corol. 3. Si centro C & vertice principali V deſcribatur ſectio quælibet conica VRS, & a quovis ejus puncto R agatur tangens RT occurrens axi infinitæ producto CV in puncto T; dein juncta CR ducatur recta CP, quæ æqualis ſit abſciſſæ CT, angulumque VCP ſectori VCR proportionalem conſtituat; tendat autem ad centrum C vis centripeta cubo diſtantiæ locorum a centro reciproce proportionalis, & exeat corpus de loco V juſta cum velocitate ſecundum lineam rectæ CV perpendicularem: progredietur corpus illud in trajectoria VPQ quam punctum P perpetuo tangit; ideoque ſi conica ſectio VRS hyperbola ſit, deſcendet idem ad centrum: Sin ea ellipſis ſit, aſcendet illud perpetuo &



abibit

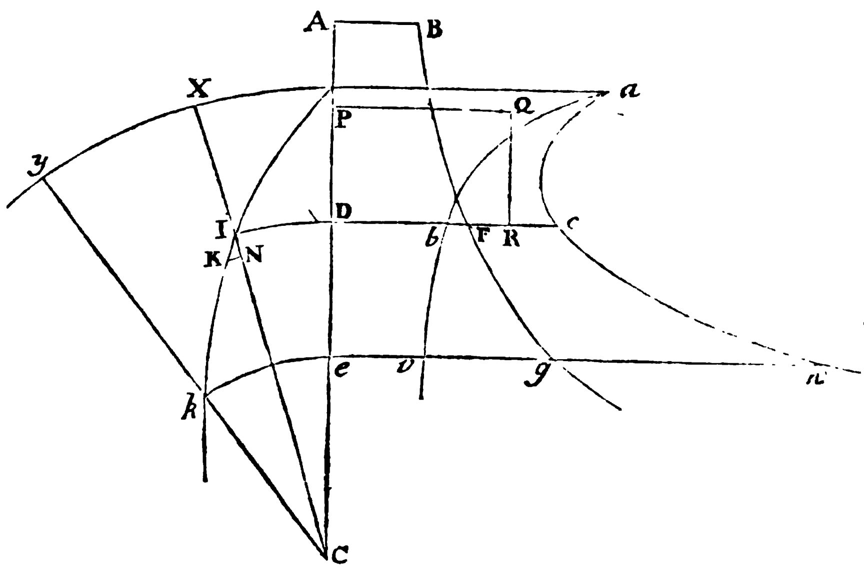
abibit in infinitum. Et contra, ſi corpus quacunque cum velocitate exeat de loco *V*, & perinde ut incœperit vel oblique deſcendere ad centrum, vel ab eo oblique aſcendere, figura *VRS* vel hyperbola ſit vel ellipſis, inveniri poteſt trajectoria augendo vel minuendo angulum *VCP* in data aliqua ratione. Sed &, vi centripeta in centrifugam verſa, aſcendet corpus oblique in trajectoria *VPQ*, quæ invenitur capiendo angulum *VCP* ſectori elliptico *VRC* proportionalem, & longitudinem *CP* longitudini *CT* æqualem ut ſupra. Conſequuntur hæc omnia ex propoſitione præcedente, per curvæ cujuſdam quadraturam, cujus inventionem, ut ſatis facilem, brevitatis gratia miſſam facio.



PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXIX.

Data lege vis centripetæ, requiritur motus corporis de loco dato, data cum velocitate, ſecundum datam rectam egreſſi.

Stantibus quæ in tribus propoſitionibus præcedentibus: exeat



corpus de loco *I* ſecundum lineolam *IK*, ea cum velocitate quam

corpus aliud, vi aliqua uniformi centripeta, de loco *P* cadendo acquirere poſſet in *D*: ſitque hæc vis uniformis ad vim, qua corpus primum urgetur in *I*, ut *DR* ad *DF*. Pergat autem corpus verſus *k*; centroque *C* & intervallo *Ck* deſcribatur circulus *ke* occurrens rectæ *PD* in *e*, & erigantur curvarum *BFg*, *abv*, *acw* ordinatim applicatæ *eg*, *ev*, *ew*. Ex dato rectangulo *PDRQ*, dataque lege vis centripetæ qua corpus primum agitatur, datur curva linea *BFg*, per conſtructionem problematis XXVII, & ejus corol. I. Deinde ex dato angulo *CIK* datur proportio naſcentium *IK*, *KN*, & inde, per conſtructionem prob. XXVIII. datur quantitas Q, una cum curvis lineis *abv*, *acw*: ideoque, completo tempore quovis *Dbve*, datur tum corporis altitudo *Ce* vel *Ck*, tum area *Dcwe*, eique æqualis ſector *XCy*, angulusque *ICk*, & locus *k* in quo corpus tunc verſabitur. *Q. E. I.*

Supponimus autem in his propoſitionibus vim centripetam in receſſu quidem a centro variari ſecundum legem quamcunque, quam quis imaginari poteſt, in æqualibus autem a centro diſtantiis eſſe undique eandem. Atque hactenus motum corporum in orbibus immobilibus conſideravimus. Supereſt ut de motu eorum in orbibus, qui circa centrum virium revolvuntur, adjiciamus pauca.

SECTIO IX.

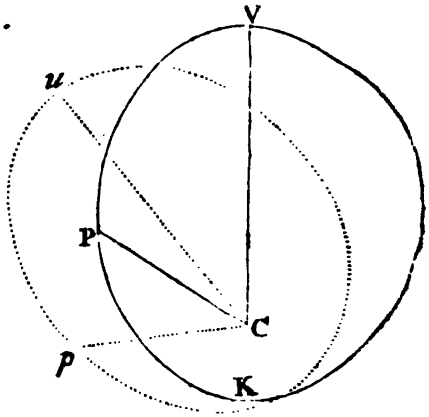
De motu corporum in orbibus mobilibus, deque motu apſidum.

PROPOSITIO XLIII. PROBLEMA XXX.

Efficiendum eſt ut corpus in trajectoria quacunque circa centrum virium revolvente perinde moveri poſſit, atque corpus aliud in eadem trajectoria quieſcente.

In orbe *VPK* poſitione dato revolvatur corpus *P* pergendo a *V* verſus *K*. A centro *C* agatur ſemper *Cp*, quæ ſit ipſi *CP* æqualis, angulumque *VCp* angulo *VCP* proportionalem conſtituat; & area, quam linea *Cp* deſcribit, erit ad aream *VCP*, quam linea *CP* ſimul deſcribit, ut velocitas lineæ deſcribentis *Cp* ad velocitatem lineæ deſcribentis *CP*; hoc eſt, ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*,

ideoque in data ratione, & propterea tempori proportionalis. Cum area tempori proportionalis ſit quam linea *Cp* in plano immobili deſcribit, manifeſtum eſt quod corpus, cogente juſtæ quantitatis vi centripeta, revolvi poſſit una cum puncto *p* in curva illa linea quam punctum idem *p* ratione jam expoſita deſcribit in plano immobili. Fiat angulus *VCu* angulo *PCp*, & linea *Cu* lineæ *CV*, atque figura *uCp* figuræ *VCP* æqualis, & corpus in *p* ſemper exiſtens movebitur in perimetro figuræ revolventis *uCp*, eodemque tempore deſcribet arcum ejus *up* quo corpus aliud *P* arcum ipſi ſimilem & æqualem *VP* in figura quieſcente *VPK* deſcribere poteſt. Quæratur igitur, per corollarium quintum propoſitionis VI, vis centripeta qua corpus revolvi poſſit in curva illa linea quam punctum *p* deſcribit in plano immobili, & ſolvetur problema. *Q. E. F.*



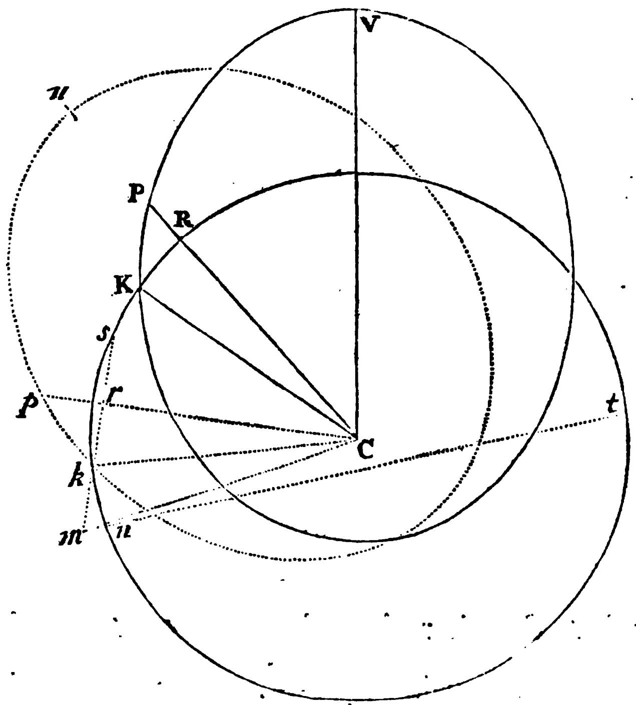
PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XIV.

Differentia virium, quibus corpus in orbe quieſcente, & corpus aliud in eodem orbe revolvente æqualiter moveri poſſunt, eſt in triplicata ratione communis altitudinis inverſe.

Partibus orbis quieſcentis *VP*, *PK* ſunto ſimiles & æquales orbis revolventis partes *up*, *pk*; & punctorum *P*, *K* diſtantia intelligatur eſſe quam minima. A puncto *k* in rectam *pC* demitte perpendiculum *kr*, idemque produc ad *m*, ut ſit *mr* ad *kr* ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*. Quoniam corporum altitudines *PC* & *pC*, *KC*, & *kC* ſemper æquantur, manifeſtum eſt quod linearum *PC* & *pC* incrementa vel decrementa ſemper ſint æqualia, ideoque ſi corporum in locis *P* & *p* exiſtentium diſtinguantur motus ſinguli (per legum corol. 2.) in binos, quorum hi verſus centrum, ſive ſecundum lineas *PC*, *pC* determinentur, & alteri prioribus tranſverſi ſint, & ſecundum lineas ipſis *PC*, *pC* perpendiculares directionem habeant; motus verſus centrum erunt æquales, & motus tranſverſus

corporis

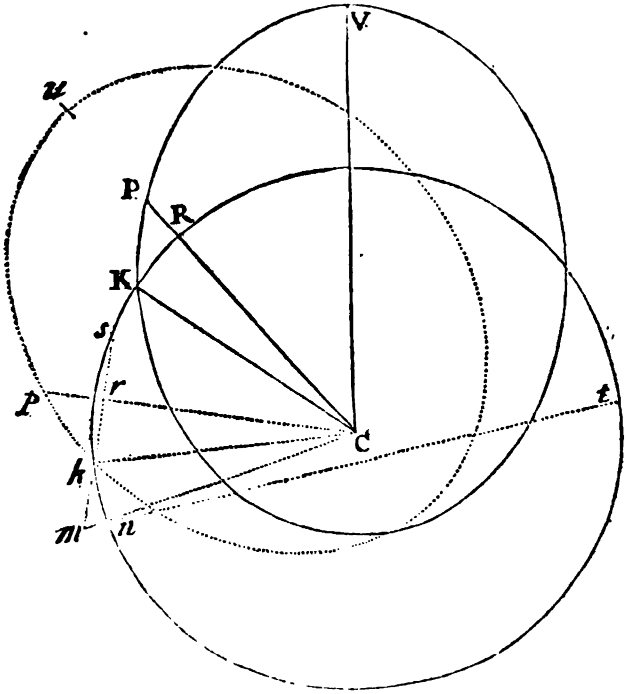
corporis *p* erit ad motum tranſverſum corporis *P*, ut motus angularis lineæ *pC* ad motum angularem lineæ *PC*, id eſt, ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*. Igitur eodem tempore quo corpus *P* motu ſuo utroque pervenit ad punctum *K*, corpus *p* æquali in centrum motu æqualiter movebitur a *p* verſus *C*, ideoque completo illo tempore reperietur alicubi in linea *mkr*, quæ per punctum *k* in lineam *pC* perpendicularis eſt; & motu tranſverſo acquiret diſtantiam a linea *pC*, quæ ſit ad diſtantiam quam corpus alterum *P* acquirit a linea *PC*, ut eſt motus tranſverſus corporis *p* ad motum tranſverſum corporis alterius *P*. Quare cum *kr* æqualis ſit diſtantiæ quam corpus *P* acquirit a linea *PC*, ſitque *mr* ad *kr* ut angulus *VCp* ad angulum



VCP, hoc eſt, ut motus tranſverſus corporis *p* ad motum tranſverſum corporis *P*, manifeſtum eſt quod corpus *p* completo illo tempore reperietur in loco *m*. Hæc ita ſe habebunt ubi corpora *p* & *P* æqualiter ſecundum lineas *pC* & *PC* moventur, ideoque æqualibus viribus ſecundum lineas illas urgentur. Capiatur autem angulus *pCn* ad angulum *pCk* ut eſt angulus *VCp* ad angulum *VCP*, ſitque *nC* æqualis *kC*, & corpus *p* completo illo tempore revera re-

 perietur

perietur in *n*; ideoque vi majore urgetur quam corpus *P*, ſi modo angulus *nCp* angulo *kCp* major eſt, id eſt ſi orbis *upk* vel movetur in conſequentia, vel movetur in antecedentia majore celeritate quam ſit dupla ejus qua linea *CP* in conſequentia fertur; & vi minore ſi orbis tardius movetur in antecedentia. Eſtque virium differentia ut locorum intervallum *mn*, per quod corpus illud *p* ipſius actione, dato illo temporis ſpatio, transferri debet. Centro *C* intervallo *Cn* vel *Ck* deſcribi intelligatur circulus ſecans lineas *mr*, *mn*



productas in *s* & *t*, & erit rectangulum $mn \times mt$ æquale rectangulo $mk \times ms$, ideoque *mn* æquale $\frac{mk \times ms}{mt}$. Cum autem triangula *pCk*, *pCn* dato tempore dentur magnitudine, ſunt *kr* & *mr*, earumque differentia *mk* & ſumma *ms* reciproce ut altitudo *pC*, ideoque rectangulum $mk \times ms$ eſt reciproce ut quadratum altitudinis *pC*. Eſt & *mt* directe ut $\frac{1}{2}mt$, id eſt, ut altitudo *pC*. Hæ ſunt primæ rationes linearum naſcentium; & hinc fit $\frac{mk \times ms}{mt}$, id eſt lineola naſcens *mn*, eique proportionalis virium differentia reciproce ut cubus altitudinis *pC*. *Q.E.D.*

Carol.

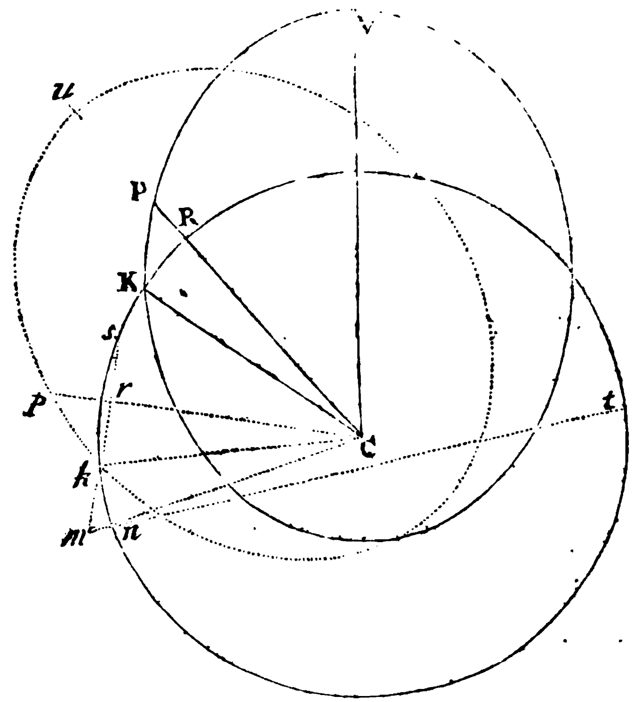
Corol. 1. Hinc differentia virium in locis P & p, vel K & k, eſt ad vim qua corpus motu circulari revolvi poſſit ab R ad K eodem tempore quo corpus P in orbe immobili deſcribit arcum PK, ut lineola naſcens mn ad ſinum verſum arcus naſcentis RK, id eſt ut $\frac{mk \times ms}{mt}$ ad $\frac{rkq}{2kC}$, vel ut $mk \times ms$ ad rk quadratum; hoc eſt, ſi capiantur datæ quantitates F, G in ea ratione ad invicem quam habet angulus VCP ad angulum VCp, ut GG—FF ad FF. Et propterea, ſi centro C intervallo quovis CP vel Cp deſcribatur ſector circularis æqualis areæ toti VPC, quam corpus P tempore quovis in orbe immobili revolvens radio ad centrum ducto deſcripſit: differentia virium, quibus corpus P in orbe immobili & corpus p in orbe mobili revolvuntur, erit ad vim centripetam, qua corpus aliquod, radio ad centrum ducto, ſectorem illum eodem tempore, quo deſcripta ſit area VPC, uniformiter deſcribere potuiſſet, ut GG—FF ad FF. Namque ſector ille & area pCk ſunt ad invicem ut tempora quibus deſcribuntur.

Corol. 2. Si orbis VPK ellipſis ſit umbilicum habens C & apſidem ſummam V; eique ſimilis & æqualis ponatur ellipſis upk, ita ut ſit ſemper pC æqualis PC, & angulus VCp ſit ad angulum VCP in data ratione G ad F; pro altitudine autem PC vel pC ſcribatur A, & pro ellipſeos latere recto ponatur 2 R: erit vis, qua corpus in ellipſi mobili revolvi poteſt, ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$ & contra. Exponatur enim vis qua corpus revolvatur in immota ellipſi per quantitatem $\frac{FF}{AA}$, & vis in V erit $\frac{FF}{CV\ quad.}$ Vis autem qua corpus in circulo ad diſtantiam CV ea cum velocitate revolvi poſſet quam corpus in ellipſi revolvens habet in V, eſt ad vim qua corpus in ellipſi revolvens urgetur in apſide V, ut dimidium lateris recti ellipſeos ad circuli ſemidiametrum CV, ideoque valet $\frac{RFF}{CV\ cub.}$: & vis, quæ ſit ad hanc ut GG—FF ad FF, valet $\frac{RGG - RFF}{CV\ cub.}$: eſtque hæc vis (per hujus corol. 1.) differentia virium in V quibus corpus P in ellipſi immota VPK, & corpus p in ellipſi mobili upk revolvuntur. Unde cum (per hanc prop.) differentia illa in alia quavis altitudine A

ſit

ſit ad ſeipſam in altitudine *CV* ut $\frac{1}{A\,cub.}$ ad $\frac{1}{CV\,cub.}$, eadem differentia in omni altitudine A valebit $\frac{RGG-RFF}{A\,cub.}$. Igitur ad vim $\frac{FF}{AA}$, qua corpus revolvi poteſt in ellipſi immobili *VPK*, addatur exceſſus $\frac{RGG-RFF}{A\,cub.}$; & componetur vis tota $\frac{FF}{AA}+\frac{RGG-RFF}{A\,cub.}$ qua corpus in ellipſi mobili *upk* iiſdem temporibus revolvi poſſit.

Corol. 3. Ad eundem modum colligetur quod, ſi orbis immobilis

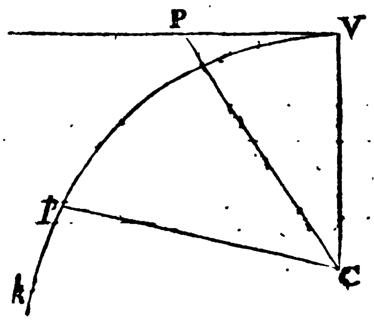


VPK ellipſis ſit centrum habens in virium centro *C*; eique ſimilis, æqualis & concentrica ponatur ellipſis mobilis *upk*; ſitque 2 R ellipſeos hujus latus rectum principale, & 2 T latus tranſverſum ſive axis major, atque angulus *VCp* ſemper ſit ad angulum *VCP* ut G ad F; vires, quibus corpora in ellipſi immobili & mobili temporibus æqualibus revolvi poſſunt, erunt ut $\frac{FFA}{T\,cub.}$ & $\frac{FFA}{T\,cub.}+\frac{RGG-RFF}{A\,cub.}$ reſpective.

Corol.

Corol. 4. Et univerſaliter, ſi corporis altitudo maxima *CV* nominetur T, & radius curvaturæ quam orbis *VPK* habet in *V*, id eſt radius circuli æqualiter curvi, nominetur R, & vis centripeta, qua corpus in trajectoria quacunque immobili *VPK* revolvi poteſt in loco *V*, dicatur $\frac{\mathrm{VFF}}{\mathrm{TT}}$, atque aliis in locis *P* indefinite dicatur X, altitudine *CP* nominata A, & capiatur G ad F in data ratione anguli *VCp* ad angulum *VCP*: erit vis centripeta, qua corpus idem eoſdem motus in eadem trajectoria *upk* circulariter mota temporibus iiſdem peragere poteſt, ut ſumma virium $\mathrm{X} + \frac{\mathrm{VRGG} - \mathrm{VRFF}}{\mathrm{A}\ cub.}$.

Corol. 5. Dato igitur motu corporis in orbe quocunque immobili, augeri vel minui poteſt ejus motus angularis circa centrum virium in ratione data, & inde inveniri novi orbes immobiles in quibus corpora novis viribus centripetis gyrentur.



Corol. 6. Igitur ſi ad rectam *CV* poſitione datam erigatur perpendiculum *VP* longitudinis indeterminatæ, jungaturque *CP*, & ipſi æqualis agatur *Cp*, conſtituens angulum *VCp*, qui ſit ad angulum *VCP* in data ratione; vis qua corpus gyrari poteſt in curva illa *Vpk* quam punctum *p* perpetuo tangit, erit reciproce ut cubus altitudinis *Cp*. Nam corpus *P* per vim inertiæ, nulla alia vi urgente, uniformiter progredi poteſt in recta *VP*. Addatur vis in centrum *C*, cubo altitudinis *CP* vel *Cp* reciproce proportionalis, & (per jam demonſtrata) detorquebitur motus ille rectilineus in lineam curvam *Vpk*. Eſt autem hæc curva *Vpk* eadem cum curva illa *VPQ* in corol. 3. prop. xli. inventa, in qua ibi diximus corpora hujuſmodi viribus attracta oblique aſcendere.

PROPO-

PROPOSITIO XLV. PROBLEMA XXXI.

Orbium qui ſunt circulis maxime finitimi requiruntur motus apſidum.

Problema ſolvitur arithmetice faciendo ut orbis, quem corpus in ellipſi mobili (ut in propoſitionis ſuperioris corol. 2. vel 3.) revolvens deſcribit in plano immobili, accedat ad formam orbis cujus apſides requiruntur, & quærendo apſides orbis quem corpus illud in plano immobili deſcribit. Orbes autem eandem acquirent formam, ſi vires centripetæ quibus deſcribuntur, inter ſe collatæ, in æqualibus altitudinibus reddantur proportionales. Sit punctum *V* apſis ſumma, & ſcribantur T pro altitudine maxima *CV*, A pro altitudine quavis alia *CP* vel *Cp*, & X pro altitudinum differentia *CV*—*CP*; & vis, qua corpus in ellipſi circa umbilicum ſuum *C* (ut in corol. 2.) revolvente movetur, quæque in corol. 2. erat ut $\frac{FF}{AA}+\frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$, id eſt ut $\frac{FFA+RGG-RFF}{A\ cub.}$, ſubſtituendo T—X pro A, erit ut $\frac{RGG-RFF+TFF-FFX}{A\ cub.}$. Reducenda ſimiliter eſt vis alia quævis centripeta ad fractionem cujus denominator ſit A *cub.* & numeratores, facta homologorum terminorum collatione, ſtatuendi ſunt analogi. Res exemplis patebit.

Exempl. 1. Ponamus vim centripetam uniformem eſſe, ideoque ut $\frac{A\ cub.}{A\ cub.}$, ſive (ſcribendo T—X pro A in numeratore) ut $\frac{T\ cub.-3TTX+3TXX-X\ cub.}{A\ cub.}$; & collatis numeratorum terminis correſpondentibus, nimirum datis cum datis & non datis cum non datis, fiet RGG—RFF+TFF ad T *cub.* ut —FFX ad —3TTX+3TXX —X *cub.* ſive ut —FF ad —3TT+3TX—XX. Jam cum orbis ponatur circulo quam maxime finitimus, coeat orbis cum circulo; & ob factas R, T æquales, atque X in infinitum diminutam, rationes ultimæ erunt RGG ad T *cub.* ut —FF ad—3TT, ſeu GG ad TT ut FF ad 3TT, & viciſſim GG ad FF ut TT ad 3TT, id eſt,

ut

ut 1 ad 3; ideoque G ad F, hoc eſt angulus VCp ad angulum VCP, ut 1 ad $\sqrt{3}$. Ergo cum corpus in ellipſi immobili, ab apſide ſumma ad apſidem imam deſcendendo conficiat angulum VCP (ut ita dicam) graduum 180; corpus aliud in ellipſi mobili, atque ideo in orbe immobili de quo agimus, ab apſide ſumma ad apſidem imam deſcendendo conficiet angulum VCp graduum $\frac{180}{\sqrt{3}}$: id ideo ob ſimilitudinem orbis hujus, quem corpus agente uniformi vi centripeta deſcribit, & orbis illius quem corpus in ellipſi revolvente gyros peragens deſcribit in plano quieſcente. Per ſuperiorem terminorum collationem ſimiles redduntur hi orbes, non univerſaliter ſed tunc cum ad formam circularem quam maxime appropinquant. Corpus igitur uniformi cum vi centripeta in orbe propemodum circulari revolvens, inter apſidem ſummam & apſidem imam conficiet ſemper angulum $\frac{180}{\sqrt{3}}$ graduum, ſeu 103 *gr.* 55 *m.* 23 *ſec.* ad centrum; perveniens ab apſide ſumma ad apſidem imam ubi ſemel confecit hunc angulum, & inde ad apſidem ſummam rediens ubi iterum confecit eundem angulum; & ſic deinceps in infinitum.

Exempl. 2. Ponamus vim centripetam eſſe ut altitudinis A dignitas quælibet A^{n-3} ſeu $\frac{A^n}{A^3}$: ubi $n-3$ & n ſignificant dignitatum indices quoſcunque integros vel fractos, rationales vel irrationales, affirmativos vel negativos. Numerator ille A^n ſeu $\overline{T-X}|^n$ in ſeriem indeterminatam per methodum noſtram ſerierum convergentium reducta, evadit $T^n - nXT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XXT^{n-2}$ &c. Et collatis hujus terminis cum terminis numeratoris alterius $RGG - RFF + TFF - FFX$, fit $RGG - RFF + TFF$ ad T^n ut $-FF$ ad $-nT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XT^{n-2}$ &c. Et ſumendo rationes ultimas ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit RGG ad T^n ut $-FF$ ad $-nT^{n-1}$, ſeu GG ad T^{n-1} ut FF ad nT^{n-1}, & viciſſim GG ad FF ut T^{n-1} ad nT^{n-1} id eſt ut 1 ad n; ideoque G ad F, id eſt angulus VCp ad angulum VCP, ut 1 ad $\sqrt{n}$. Quare cum angulus VCP, in deſcenſu corporis ab apſide ſumma ad apſidem imam in ellipſi confectus, ſit graduum 180; conficietur angulus VCp, in deſcenſu corporis ab

T apſide

De Motu Corporum

apſide ſumma ad apſidem imam, in orbe propemodum circulari quem corpus quodvis vi centripeta dignitati A^{n-3} proportionali deſcribit, æqualis angulo graduum $\frac{180}{\sqrt{n}}$; & hoc angulo repetito corpus redibit ab apſide ima ad apſidem ſummam, & ſic deinceps in infinitum. Ut ſi vis centripeta ſit ut diſtantia corporis a centro, id eſt, ut A ſeu $\frac{A^4}{A^3}$, erit n æqualis 4 & $\sqrt{n}$ æqualis 2; ideoque angulus inter apſidem ſummam & apſidem imam æqualis $\frac{180}{2}$ *gr.* ſeu 90 *gr.* Completa igitur quarta parte revolutionis unius corpus perveniet ad apſidem imam, & completa alia quarta parte ad apſidem ſummam, & ſic deinceps per vices in infinitum. Id quod etiam ex propoſitione x. manifeſtum eſt. Nam corpus urgente hac vi centripeta revolvetur in ellipſi immobili, cujus centrum eſt in centro virium. Quod ſi vis centripeta ſit reciproce ut diſtantia, id eſt directe ut $\frac{1}{A}$ ſeu $\frac{A^2}{A^3}$, erit n æqualis 2, ideoque inter apſidem ſummam & imam angulus erit graduum $\frac{180}{\sqrt{2}}$ ſeu 127 *gr.* 16 *m.* 45 *ſec.* & propterea corpus tali vi revolvens, perpetua anguli hujus repetitione, vicibus alternis ab apſide ſumma ad imam & ab ima ad ſummam perveniet in æternum. Porro ſi vis centripeta ſit reciproce ut latus quadrato-quadratum undecimæ dignitatis altitudinis, id eſt reciproce ut $A^{\frac{11}{4}}$, ideoque directe ut $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$ ſeu ut $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$ erit n æqualis $\frac{1}{4}$, & $\frac{180}{\sqrt{n}}$ *gr.* æqualis 360 *gr.* & propterea corpus de apſide ſumma diſcedens & ſubinde perpetuo deſcendens, perveniet ad apſidem imam ubi complevit revolutionem integram, dein perpetuo aſcenſu complendo aliam revolutionem integram, redibit ad apſidem ſummam: & ſic per vices in æternum.

Exempl. 3. Aſſumentes m & n pro quibuſvis indicibus dignitatum altitudinis, & b, c pro numeris quibuſvis datis, ponamus vim centripetam eſſe ut $\frac{b A^m + c A^n}{A\ cub.}$, id eſt, ut $\frac{b \text{ in } \overline{T-X}|^m + c \text{ in } \overline{T-X}|^n}{A\ cub.}$

fue-

ſeu (per eandem methodum noſtram ſerierum convergentium) ut

$$\frac{bT^m + cT^n - mbXT^{m-1} - ncXT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXXT^{n-2} \text{ \&c.}}{A \, cub.}$$

& collatis numeratorum terminis, fiet RGG − RFF + TFF ad $bT^m + cT^n$, ut − FF ad $-mbT^{m-1} - ncT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXT^{n-2}$ &c. Et ſumendo rationes ultimas quæ prodeunt ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit GG ad $bT^{m-1} + cT^{n-1}$, ut FF ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$, & viciſſim GG ad FF ut $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$. Quæ proportio, exponendo altitudinem maximam *CV* ſeu T arithmetice per unitatem, fit GG ad FF ut $b + c$ ad $mb + nc$, ideoque ut 1 ad $\frac{mb+nc}{b+c}$. Unde eſt G ad F, id eſt angulus *VCp* ad angulum *VCP*, ut 1 ad $\sqrt{\frac{mb+nc}{b+c}}$. Et propterea cum angulus *VCP* inter apſidem ſummam & apſidem imam in ellipſi immobili ſit 180 *gr.* erit angulus *VCp* inter eaſdem apſides, in orbe quem corpus vi centripeta quantitati $\frac{bA^m + cA^n}{A \, cub.}$ proportionali deſcribit, æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$. Et eodem argumento ſi vis centripeta ſit ut $\frac{bA^m - cA^n}{A \, cub.}$, angulus inter apſides invenietur graduum $180\sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}$. Nec ſecus reſolvetur problema in caſibus difficilioribus. Quantitas, cui vis centripeta proportionalis eſt, reſolvi ſemper debet in ſeries convergentes denominatorem habentes A *cub.* Dein pars data numeratoris qui ex illa operatione provenit ad ipſius partem alteram non datam, & pars data numeratoris hujus RGG—RFF + TFF—FFX ad ipſius partem alteram non datam in eadem ratione ponendæ ſunt: Et quantitates ſuperfluas delendo, ſcribendoque unitatem pro T, obtinebitur proportio G ad F.

Corol. 1. Hinc ſi vis centripeta ſit ut aliqua altitudinis dignitas, inveniri poteſt dignitas illa ex motu apſidum; & contra. Nimirum ſi motus totus angularis, quo corpus redit ad apſidem eandem, ſit

T 2 ad

ad motum angularem revolutionis unius, ſeu graduum 360, ut numerus aliquis m ad numerum alium n, & altitudo nominetur A: erit vis ut altitudinis dignitas illa $A^{\frac{nn}{mm}-3}$, cujus index eſt $\frac{nn}{mm}-3$. Id quod per exempla ſecunda manifeſtum eſt. Unde liquet vim illam in majore quam triplicata altitudinis ratione, in receſſu a centro, decreſcere non poſſe: Corpus tali vi revolvens deque apſide diſcedens, ſi cœperit deſcendere nunquam perveniet ad apſidem imam ſeu altitudinem minimam, ſed deſcendet uſque ad centrum, deſcribens curvam illam lineam de qua egimus in corol. 3. prop. xli. Sin cœperit illud, de apſide diſcedens, vel minimum aſcendere; aſcendet in infinitum, neque unquam perveniet ad apſidem ſummam. Deſcribet enim curvam illam lineam de qua actum eſt in eodem corol. & in corol. vi. prop. xliv. Sic & ubi vis, in receſſu a centro, decreſcit in majore quam triplicata ratione altitudinis, corpus de apſide diſcedens, perinde ut cœperit deſcendere vel aſcendere, vel deſcendet ad centrum uſque vel aſcendet in infinitum. At ſi vis, in receſſu a centro, vel decreſcat in minore quam triplicata ratione altitudinis, vel creſcat in altitudinis ratione quacunque; corpus nunquam deſcendet ad centrum uſque, ſed ad apſidem imam aliquando perveniet: & contra, ſi corpus de apſide ad apſidem alternis vicibus deſcendens & aſcendens nunquam appellat ad centrum; vis in receſſu a centro aut augebitur, aut in minore quam triplicata altitudinis ratione decreſcet: & quo citius corpus de apſide ad apſidem redierit, eo longius ratio virium recedet a ratione illa triplicata. Ut ſi corpus revolutionibus 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ de apſide ſumma ad apſidem ſummam alterno deſcenſu & aſcenſu redierit; hoc eſt, ſi fuerit m ad n ut 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ ad 1, ideoque $\frac{nn}{mm}-3$ valeat $\frac{1}{64}-3$ vel $\frac{1}{16}-3$ vel $\frac{1}{4}-3$ vel $\frac{4}{9}-3$: erit vis ut $A^{\frac{1}{64}-3}$ vel $A^{\frac{1}{16}-3}$ vel $A^{\frac{1}{4}-3}$ vel $A^{\frac{4}{9}-3}$, id eſt, reciproce ut $A^{3-\frac{1}{64}}$ vel $A^{3-\frac{1}{16}}$ vel $A^{3-\frac{1}{4}}$ vel $A^{3-\frac{4}{9}}$. Si corpus ſingulis revolutionibus redierit ad apſidem eandem immotam; erit m ad n ut 1 ad 1, ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ æqualis A^{-2} ſeu $\frac{1}{AA}$; & propterea decrementum virium in ratione duplicata altitudinis, ut in præcedentibus demonſtratum eſt. Si corpus partibus revolutionis unius

vel

vel tribus quartis, vel duabus tertiis, vel una tertia, vel una quarta, ad apſidem eandem redierit; erit *m* ad *n* ut $\frac{3}{4}$ vel $\frac{2}{3}$ vel $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{4}$ ad 1, ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ æqualis $A^{\frac{16}{9}-3}$ vel $A^{\frac{9}{4}-3}$ vel A^{9-3} vel A^{16-3}; & propterea vis aut reciproce ut $A^{\frac{11}{9}}$ vel $A^{\frac{3}{4}}$, aut directe ut A^{6} vel A^{13}. Denique ſi corpus pergendo ab apſide ſumma ad apſidem ſummam confecerit revolutionem integram, & præterea gradus tres, ideoque apſis illa ſingulis corporis revolutionibus confecerit in conſequentia gradus tres; erit *m* ad *n* ut 363 *gr.* ad 360 *gr.* ſive ut 121 ad 120, ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ erit æquale $A^{-\frac{29523}{14641}}$; & propterea vis centripeta reciproce ut $A^{\frac{29523}{14641}}$ ſeu reciproce ut $A^{2\frac{4}{243}}$ proxime. Decreſcit igitur vis centripeta in ratione paulo majore quam duplicata, ſed quæ vicibus $59\frac{3}{4}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit.

Corol. 2. Hinc etiam ſi corpus, vi centripeta quæ ſit reciproce ut quadratum altitudinis, revolvatur in ellipſi umbilicum habente in centro virium, & huic vi centripetæ addatur vel auferatur vis alia quævis extranea; cognoſci poteſt (per exempla tertia) motus apſidum qui ex vi illa extranea orietur: & contra. Ut ſi vis qua corpus revolvitur in ellipſi ſit ut $\frac{1}{AA}$, & vis extranea ablata ut cA, ideoque vis reliqua ut $\frac{A-cA^{4}}{A\,cub.}$; erit (in exemplis tertiis) *b* æqualis 1, *m* æqualis 1, & *n* æqualis 4, ideoque angulus revolutionis inter apſides æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$. Ponamus vim illam extraneam eſſe 357.45 partibus minorem quam vis altera qua corpus revolvitur in ellipſi, id eſt *c* eſſe $\frac{100}{35745}$, exiſtente A vel T æquali 1, & $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ evadet $180\sqrt{\frac{35645}{35345}}$, ſeu 180.7623, id eſt, 180 *gr.* 45 *m.* 44 *ſ.* Igitur corpus de apſide ſumma diſcedens, motu angulari 180 *gr.* 45 *m.* 44 *ſ.* perveniet ad apſidem imam, & hoc motu duplicato ad apſidem ſummam redibit: ideoque apſis ſumma ſingulis revolutionibus progrediendo conficiet 1 *gr.* 31 *m.* 28 *ſec.* Apſis lunæ eſt duplo velocior circiter.

Hactenus de motu corporum in orbibus quorum plana per centrum virium tranſeunt. Supereſt ut motus etiam determinemus in

planis

planis excentricis. Nam ſcriptores qui motum gravium tractant, conſiderare ſolent aſcenſus & deſcenſus ponderum, tam obliquos in planis quibuſcunque datis, quam perpendiculares: & pari jure motus corporum viribus quibuſcunque centra petentium, & planis excentricis innitentium hic conſiderandus venit. Plana autem ſupponimus eſſe politiſſima & abſolute lubrica ne corpora retardent. Quinimo, in his demonſtrationibus, vice planorum quibus corpora incumbunt quæque tangunt incumbendo, uſurpamus plana his parallela, in quibus centra corporum moventur & orbitas movendo deſcribunt. Et eadem lege motus corporum in ſuperficiebus curvis peractos ſubinde determinamus.

SECTIO X.

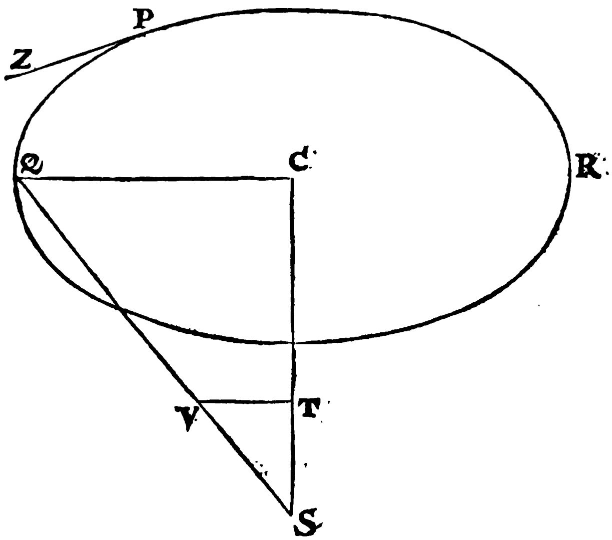
De motu corporum in ſuperficiebus datis, deque funipendulorum motu reciproco.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA XXXII.

Poſita cujuſcunque generis vi centripeta, datoque tum virium centro tum plano quocunque in quo corpus revolvitur, & conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis: requiritur motus corporis de loco dato, data cum velocitate, ſecundum rectam in plano illo datam egreſſi.

Sit S centrum virium, SC diſtantia minima centri hujus a plano dato, P corpus de loco P ſecundum rectam PZ egrediens, Q corpus idem in trajectoria ſua revolvens, & PQR trajectoria illa, in plano dato deſcripta, quam invenire oportet. Jungantur CQ, QS, & ſi in QS capiatur SV proportionalis vi centripetæ qua corpus trahitur verſus centrum S, & agatur VT quæ ſit parallela CQ & occurrat SC in T: Vis SV reſolvetur (per legum corol 2.) in vires ST, TV; quarum ST trahendo corpus ſecundum lineam plano perpendicularem, nil mutat motum ejus in hoc plano. Vis autem altera TV, agendo ſecundum poſitionem plani, trahit corpus directe verſus punctum

punctum *C* in plano datum, ideoque efficit, ut corpus illud in hoc plano perinde moveatur, ac ſi vis *ST* tolleretur, & corpus vi ſola *TV* revolveretur circa centrum *C* in ſpatio libero. Data autem vi centripeta *TV* qua corpus *Q* in ſpatio libero circa centrum datum



C revolvitur, datur (per prop. xlii.) tum trajectoria *PQR*, quam corpus deſcribit, tum locus *Q*, in quo corpus ad datum quodvis tempus verſabitur, tum denique velocitas corporis in loco illo *Q*; & contra. *Q. E. I.*

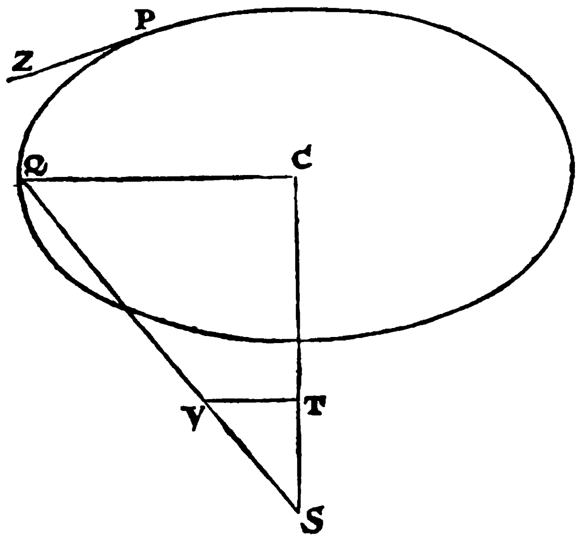
PROPOSITIO XLVII. THEOREMA XV.

Poſito quod vis centripeta proportionalis ſit diſtantiæ corporis a centro; corpora omnia in planis quibuſcunque revolventia deſcribent ellipſes, & revolutiones temporibus æqualibus peragent; quæque moventur in lineis rectis, ultro citroque diſcurrendo, ſingulas eundi & redeundi periodos iiſdem temporibus abſolvent.

Nam, ſtantibus quæ in ſuperiore propoſitione, vis *SV*, qua corpus *Q* in plano quovis *PQR* revolvens trahitur verſus centrum *S*, eſt ut diſtantia *SQ*; atque ideo ob proportionales *SV* & *SQ*, *TV* & *CQ*, vis *TV*, qua corpus trahitur verſus punctum *C* in orbis plano datum,

De Motu Corporum

datum, eſt ut diſtantia *CQ*. Vires igitur, quibus corpora in plano *PQR* verſantia trahuntur verſus punctum *C*, ſunt pro ratione diſtantiarum æquales viribus quibus corpora undiquaque trahuntur verſus centrum *S*; & propterea corpora movebuntur iiſdem temporibus, in iiſdem figuris, in plano quovis *PQR* circa punctum *C*, atque in



ſpatiis liberis circa centrum *S*; ideoque (per corol. 2. prop. x. & corol. 2. prop. xxxviii.) temporibus ſemper æqualibus, vel deſcribent ellipſes in plano illo circa centrum *C*, vel periodos movendi ultro citroque in lineis rectis per centrum *C* in plano illo ductis, complebunt. *Q. E. D.*

Scholium.

His affines ſunt aſcenſus ac deſcenſus corporum in ſuperficiebus curvis. Concipe lineas curvas in plano deſcribi, dein circum axes quoſvis datos per centrum virium tranſeuntes revolvi, & ea revolutione ſuperficies curvas deſcribere; tum corpora ita moveri ut eorum centra in his ſuperficiebus perpetuo reperiantur. Si corpora illa oblique aſcendendo & deſcendend ocurrant ultro citroque; peragentur eorum motus in planis per axem tranſeuntibus, atque ideo in lineis curvis, quarum revolutione curvæ illæ ſuperficies genitæ ſunt. Iſtis igitur in caſibus ſufficit motum in his lineis curvis conſiderare.

PROPO-

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XVI.

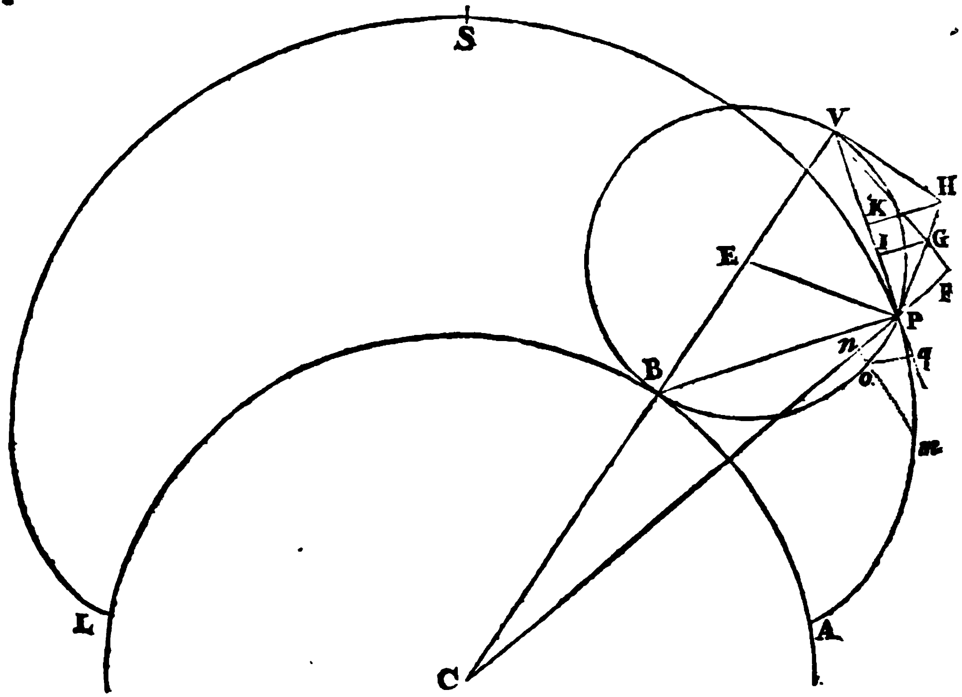
Si rota globo extrinſecus ad angulos rectos inſiſtat, & more rotarum revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei, quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, (quodque cycloidem vel epicycloidem nominare licet) erit ad duplicatum ſinum verſum arcus dimidii qui globum ex eo tempore inter eundum tetigit, ut ſumma diametrorum globi & rotæ ad ſemidiametrum globi.

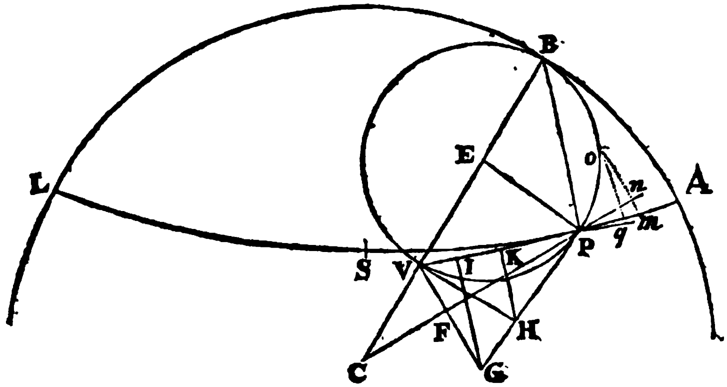
PROPOSITIO XLIX. THEOREMA XVII.

Si rota globo concavo ad rectos angulos intrinſecus inſiſtat & revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum ſinum verſum arcus dimidii qui globum toto hoc tempore inter eundem tetigit, ut differentia diametrorum globi & rotæ ad ſemidiametrum globi.

Sit *ABL* globus, *C* centrum ejus, *BPV* rota ei inſiſtens, *E* centrum rotæ, *B* punctum contactus, & *P* punctum datum in perimetro rotæ. Concipe hanc rotam pergere in circulo maximo *ABL* ab *A* per *B* verſus *L*, & inter eundum ita revolvi ut arcus *AB*, *PB* ſibi invicem ſemper æquentur, atque punctum illud *P* in perimetro rotæ datum interea deſcribere viam curvilineam *AP*. Sit autem *AP* via tota curvilinea deſcripta ex quo rota globum tetigit in *A*, & erit viæ hujus longitudo *AP* ad duplum ſinum verſum arcus ½*PB*, ut 2 *CE* ad *CB*. Nam recta *CE* (ſi opus eſt producta) occurrat rotæ in *V*, junganturque *CP*, *BP*, *EP*, *VP*, & in *CP* productam demittatur normalis *VF*. Tangant *PH*, *VH* circulum in *P* & *V* concurrentes in *H*, ſecetque *PH* ipſam *VF* in *G*, &

ad *VP* demittantur normales *GI*, *HK*. Centro item *C* & intervallo quovis deſcribatur circulus *nom* ſecans rectam *CP* in *n*, rotæ perimetrum *BP* in *o*, & viam curvilineam *AP* in *m*; centroque *V* & intervallo *Vo* deſcribatur circulus ſecans *VP* productam in *q*.





Quoniam rota eundo ſemper revolvitur circa punctum contactus *B*, manifeſtum eſt quod recta *BP* perpendicularis eſt ad lineam illam curvam *AP* quam rotæ punctum *P* deſcribit, atque ideo quod recta *VP* tanget hanc curvam in puncto *P*. Circuli *nom* radius ſenſim auctus vel diminutus æquetur tandem diſtantiæ *CP*; &, ob-

ob ſimilitudinem figuræ evaneſcentis *Pnomq* & figuræ *PFGVI*, ratio ultima lineolarum evaneſcentium *Pm*, *Pn*, *Po*, *Pq*, id eſt, ratio mutationum momentanearum curvæ *AP*, rectæ *CP*, arcus circularis *BP*, ac rectæ *VP*, eadem erit quæ linearum *PV*, *PF*, *PG*, *PI* reſpective. Cum autem *VF* ad *CF* & *VH* ad *CV* perpendiculares ſint, angulique *HVG*, *VCF* propterea æquales; & angulus *VHG* (ob angulos quadrilateri *HVEP* ad *V* & *P* rectos) angulo *CEP* æqualis eſt, ſimilia erunt triangula *VHG*, *CEP*; & inde fiet ut *EP* ad *CE* ita *HG* ad *HV* ſeu *HP* & ita *KI* ad *KP*, & compoſite vel diviſim ut *CB* ad *CE* ita *PI* ad *PK*, & duplicatis conſequentibus ut *CB* ad 2 *CE* ita *PI* ad *PV*, atque ita *Pq* ad *Pm*. Eſt igitur decrementum lineæ *VP*, id eſt, incrementum lineæ *BV—VP* ad incrementum lineæ curvæ *AP* in data ratione *CB* ad 2 *CE*, & propterea (per corol. lem. IV.) longitudines *BV—VP* & *AP*, incrementis illis genitæ, ſunt in eadem ratione. Sed, exiſtente *BV* radio, eſt *VP* co-ſinus anguli *BVP* ſeu $\frac{1}{2}$ *BEP*, ideoque *BV—VP* ſinus verſus eſt ejuſdem anguli; & propterea in hac rota, cujus radius eſt $\frac{1}{2}$ *BV*, erit *BV—VP* duplus ſinus verſus arcus $\frac{1}{2}$ *BP*. Ergo *AP* eſt ad duplum ſinum verſum arcus $\frac{1}{2}$ *BP* ut 2 *CE* ad *CB*. *Q. E. D.*

Lineam autem *AP* in propoſitione priore cycloidem extra globum, alteram in poſteriore cycloidem intra globum diſtinctionis gratia nominabimus.

Corol. 1. Hinc ſi deſcribatur cyclois integra *ASL* & biſecetur ea in *S*, erit longitudo partis *PS* ad longitudinem *VP* (quæ duplus eſt ſinus anguli *VBP*, exiſtente *EB* radio) ut 2 *CE* ad *CB*, atque ideo in ratione data.

Corol. 2. Et longitudo ſemiperimetri cycloidis *AS* æquabitur lineæ rectæ, quæ eſt ad rotæ diametrum *BV* ut 2 *CE* ad *CB*.

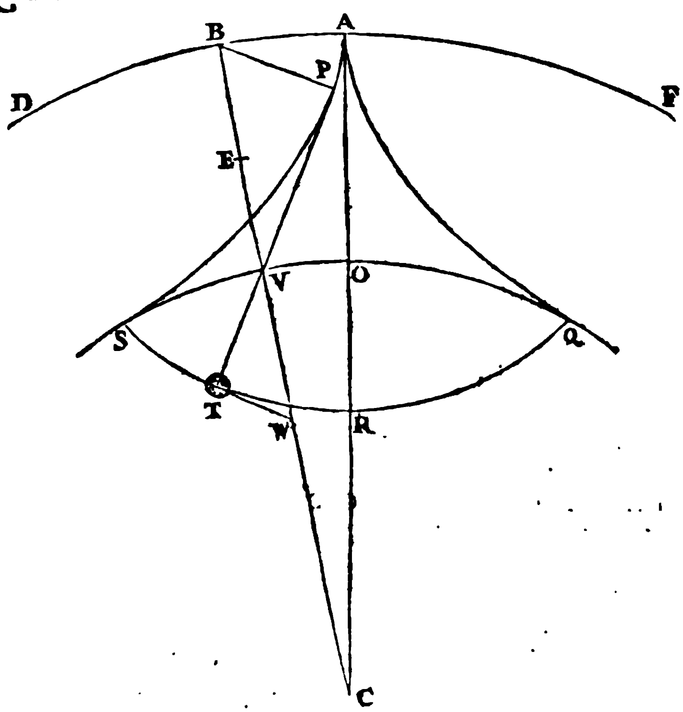
PROPOSITIO L. PROBLEMA XXXIII.

Facere ut corpus pendulum oſcilletur in cycloide data.

Intra globum *QVS*, centro *C* deſcriptum, detur cyclois *QRS* biſecta in *R* & punctis ſuis extremis *Q* & *S* ſuperficiei globi hinc inde occurrens. Agatur *CR* biſecans arcum *QS* in *O*, & producatur ea ad *A*, ut ſit *CA* ad *CO* ut *CO* ad *CR*. Centro *C* inter-

 vallo

vallo *CA* deſcribatur globus exterior *DAF*, & intra hunc globum a rota, cujus diameter ſit *AO*, deſcribantur duæ ſemicycloides *AQ*, *AS*, quæ globum interiorem tangant in *Q* & *S* & globo exteriori occurrant in *A*. A puncto illo *A*, filo *APT* longitudinem *AR* æquante, pendeat corpus *T*, & ita intra ſemicycloides *AQ*, *AS* oſcilletur, ut quoties pendulum digreditur a perpendiculo *AR*, filum parte ſui ſuperiore *AP* applicetur ad ſemicycloidem illam *APS* verſus quam peragitur motus, & circum eam ceu obſtaculum flectatur, parteque reliqua *PT* cui ſemicyclois nondum objicitur, protendatur in lineam rectam; & pondus *T* oſcillabitur in cycloide data *QRS*. *Q. E. F.*



Occurrat enim filum *PT* tum cycloidi *QRS* in *T*, tum circulo *QOS* in *V*, agaturque *CV*; & ad fili partem rectam *PT*, e punctis extremis *P* ac *T*, erigantur perpendicula *BP*, *TW*, occurrentia rectæ *CV* in *B* & *W*. Patet, ex conſtructione & geneſi ſimilium figurarum *AS*, *SR*, perpendicula illa *PB*, *TW* abſcindere de *CV* longitudines *VB*, *VW* rotarum diametris *OA*, *OR* æquales. Eſt igitur *TP* ad *VP* (duplum ſinum anguli *VBP* exiſtente $\frac{1}{2}BV$ radio) ut *BW* ad *BV*, ſeu $AO+OR$ ad *AO*, id eſt (cum ſint *CA*

ad

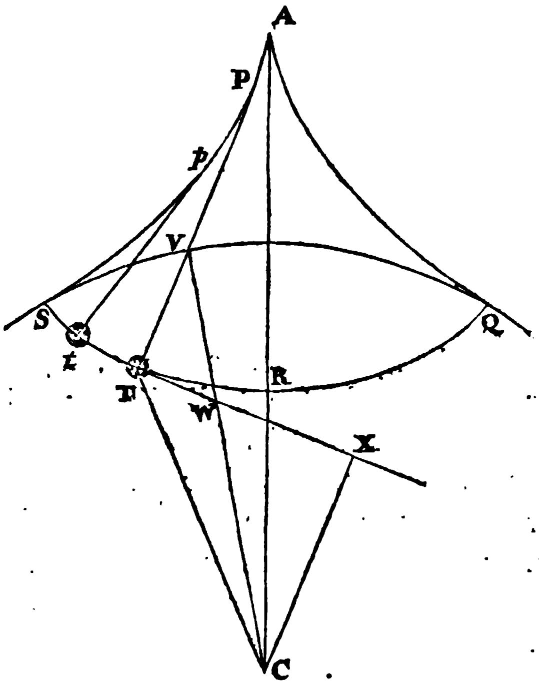
ad CO, CO ad CR & diviſim AO ad OR proportionales) ut $CA+CO$ ad CA, vel, ſi biſecetur BV in E, ut $2\,CE$ ad CB. Proinde (per corol 1. prop. XLIX.) longitudo partis rectæ fili PT æquatur ſemper cycloidis arcui PS, & filum totum APT æquatur ſemper cycloidis arcui dimidio APS, hoc eſt (per corol. 2. prop. XLIX.) longitudini AR. Et propterea viciſſim ſi filum manet ſemper æquale longitudini AR movebitur punctum T in cycloide data QRS. *Q. E. D.*

Corol. Filum AR æquatur ſemicycloidi AS, ideoque ad globi exterioris ſemidiametrum AC eandem habet rationem quam ſimilis illi ſemicyclois SR habet ad globi interioris ſemidiametrum CO.

PROPOSITIO LI. THEOREMA XVIII.

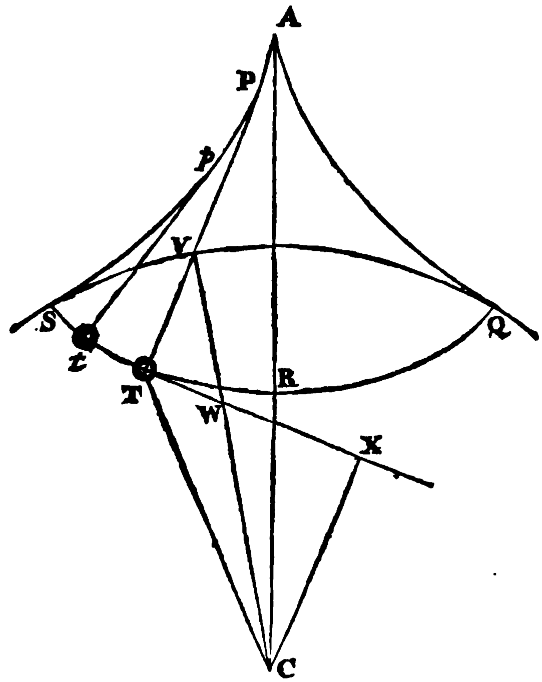
Si vis centripeta tendens undique ad globi centrum C *ſit in locis ſingulis ut diſtantia loci cujuſque a centro, & hac ſola vi agente corpus* T *oſcilletur (modo jam deſcripto) in perimetro cycloidis* QRS: *dico quod oſcillationum utcunque inæqualium æqualia erunt tempora.*

Nam in cycloidis tangentem TW infinite productam cadat per-



pendiculum CX & jungatur CT. Quoniam vis centripeta qua corpus

De Motu Corporum pus *T* impellitur verſus *C* eſt ut diſtantia *CT*, atque hæc (per legum corol. 2.) reſolvitur in partes *CX*, *TX*, quarum *CX* impellendo corpus directe a *P* diſtendit filum *PT* & per ejus reſiſtentiam tota ceſſat, nullum alium edens effectum; pars autem altera *TX*, urgendo corpus tranſverſim ſeu verſus *X*, directe accelerat motum ejus in cycloide; manifeſtum eſt quod corporis acceleratio, huic vi acceleratrici proportionalis, ſit ſingulis momentis ut longitudo *TX*, id eſt, ob datas *CV*, *WV* iiſque proportionales *TX*, *TW*, ut longitudo *TW*, hoc eſt (per corol. 1. prop. XLIX.) ut longitudo arcus



cycloidis *TR*. Pendulis igitur duobus *APT*, *Apt* de perpendiculo *AR* inæqualiter deductis & ſimul dimiſſis, accelerationes eorum ſemper erunt ut arcus deſcribendi *TR*, *tR*. Sunt autem partes ſub initio deſcriptæ ut accelerationes, hoc eſt, ut totæ ſub initio deſcribendæ, & propterea partes quæ manent deſcribendæ & accelerationes ſubſequentes, his partibus proportionales, ſunt etiam ut totæ; & ſic deinceps. Sunt igitur accelerationes, atque ideo velocitates genitæ & partes his velocitatibus deſcriptæ parteſque deſcribendæ, ſemper ut totæ; & propterea partes deſcribendæ datam

ſervantes

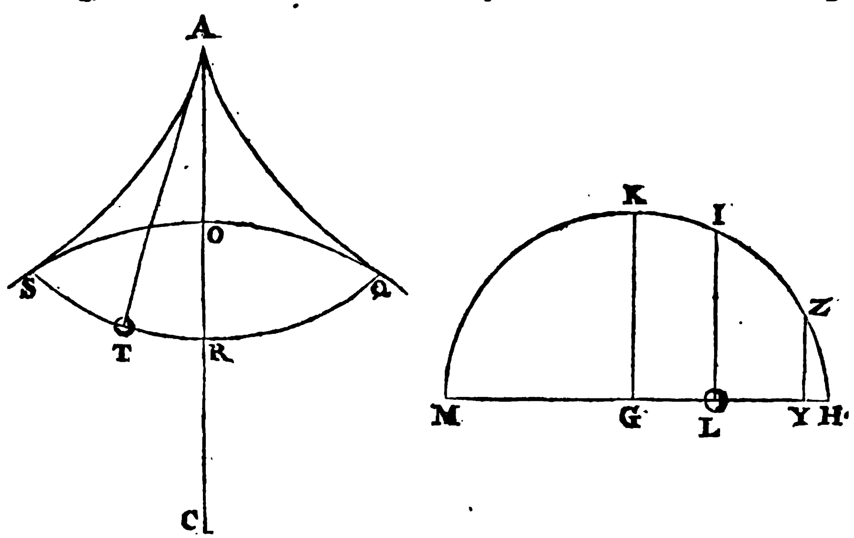
ſervantes rationem ad invicem ſimul evaneſcent, id eſt, corpora duo oſcillantia ſimul pervenient ad perpendiculum *AR*. Cumque viciſſim aſcenſus perpendiculorum de loco infimo *R*, per eoſdem arcus cycloidales motu retrogrado facti, retardentur in locis ſingulis a viribus iiſdem a quibus deſcenſus accelerabantur, patet velocitates aſcenſuum ac deſcenſuum per eoſdem arcus factorum æquales eſſe, atque ideo temporibus æqualibus fieri; & propterea, cum cycloidis partes duæ *RS* & *RQ* ad utrumque perpendiculi latus jacentes ſint ſimiles & æquales, pendula duo oſcillationes ſuas tam totas quam dimidias iiſdem temporibus ſemper peragent. *Q. E. D.*

Corol. Vis qua corpus *T* in loco quovis *T* acceleratur vel retardatur in cycloide, eſt ad totum corporis ejuſdem pondus in loco altiſſimo *S* vel *Q*, ut cycloidis arcus *TR* ad ejuſdem arcum *SR* vel *QR*.

PROPOSITIO LII. PROBLEMA XXXIV.

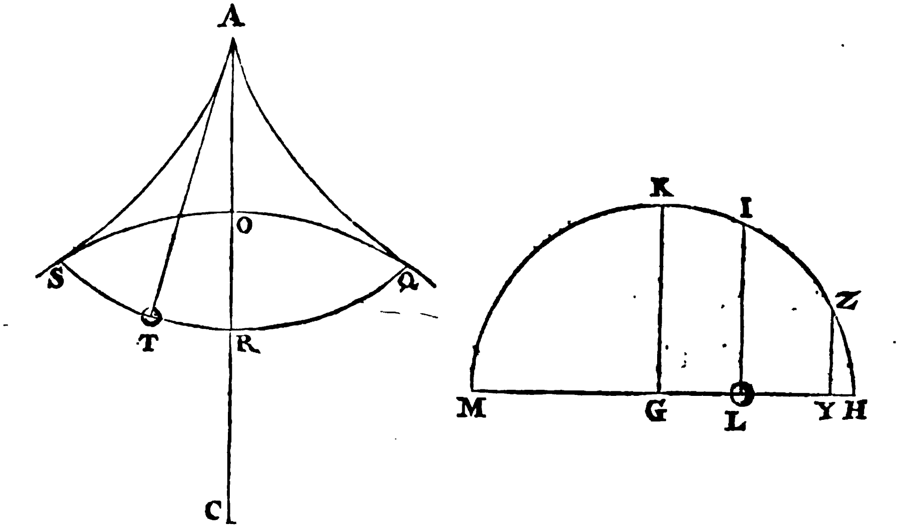
Definire & velocitates pendulorum in locis ſingulis, & tempora quibus tum oſcillationes totæ, tum ſingulæ oſcillationum partes peraguntur.

Centro quovis *G*, intervallo *GH* cycloidis arcum *RS* æquante,



deſcribe ſemicirculum *HKM* ſemidiametro *GK* biſectum. Et ſi vis centripeta, diſtantiis locorum a centro proportionalis, tendat ad centrum

centrum *G*, ſitque ea in perimetro *HIK* æqualis vi centripetæ in perimetro globi *QOS* ad ipſius centrum tendenti; & eodem tempore quo pendulum *T* dimittitur e loco ſupremo *S*, cadat corpus aliquod *L* ab *H* ad *G*: quoniam vires quibus corpora urgentur ſunt æquales ſub initio & ſpatiis deſcribendis *TR*, *LG* ſemper proportionales, atque ideo, ſi æquantur *TR* & *LG*, æquales in locis *T* & *L*; patet corpora illa deſcribere ſpatia *ST*, *HL* æqualia ſub initio, ideoque ſubinde pergere æqualiter urgeri, & æqualia ſpatia deſcribere. Quare (per prop. XXXVIII.) tempus quo corpus deſcribit arcum *ST* eſt ad tempus oſcillationis unius, ut arcus *HI*, tempus quo corpus *H* perveniet ad *L*, ad ſemiperipheriam *HKM*,



tempus quo corpus *H* perveniet ad *M*. Et velocitas corporis penduli in loco *T* eſt ad velocitatem ipſius in loco infimo *R*, (hoc eſt, velocitas corporis *H* in loco *L* ad velocitatem ejus in loco *G*, ſeu incrementum momentaneum lineæ *HL* ad incrementum momentaneum lineæ *HG*, arcubus *HI*, *HK* æquabili fluxu creſcentibus) ut ordinatim applicata *LI* ad radium *GK*, ſive ut $\sqrt{SRq. - TRq.}$ ad *SR*. Unde cum, in oſcillationibus inæqualibus, deſcribantur æqualibus temporibus arcus totis oſcillationum arcubus proportionales; habentur, ex datis temporibus, & velocitates & arcus deſcripti in oſcillationibus univerſis. Quæ erant primo invenienda.

Oſcil-

Oſcillentur jam funipendula corpora in cycloidibus diverſis intra globos diverſos, quorum diverſæ ſunt etiam vires abſolutæ, deſcriptis: &, ſi vis abſoluta globi cujuſvis *QOS* dicatur V, vis acceleratrix qua pendulum urgetur in circumferentia hujus globi, ubi incipit directe verſus centrum ejus moveri, erit ut diſtantia corporis penduli a centro illo & vis abſoluta globi conjunctim, hoc eſt, ut $CO \times V$. Itaque lineola *HY*, quæ ſit ut hæc vis acceleratrix $CO \times V$, deſcribetur dato tempore; &, ſi erigatur normalis *YZ* circumferentiæ occurrens in *Z*, arcus naſcens *HZ* denotabit datum illud tempus. Eſt autem arcus hic naſcens *HZ* in ſubduplicata ratione rectanguli *GHY*, ideoque ut $\sqrt{GH \times CO \times V}$. Unde tempus oſcillationis integræ in cycloide *QRS* (cum ſit ut ſemiperipheria *HKM*, quæ oſcillationem illam integram denotat, directe; utque arcus *HZ*, qui datum tempus ſimiliter denotat, inverſe) fiet ut *GH* directe & $\sqrt{GH \times CO \times V}$ inverſe, hoc eſt, ob æquales *GH* & *SR*, ut $\sqrt{\frac{SR}{CO \times V}}$, ſive (per corol. prop. L.) ut $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$. Itaque oſcillationes in globis & cycloidibus omnibus, quibuſcunque cum viribus abſolutis factæ, ſunt in ratione quæ componitur ex ſubduplicata ratione longitudinis fili directe, & ſubduplicata ratione diſtantiæ inter punctum ſuſpenſionis & centrum globi inverſe, & ſubduplicata ratione vis abſolutæ globi etiam inverſe. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc etiam oſcillantium, cadentium & revolventium corporum tempora poſſunt inter ſe conferri. Nam ſi rotæ, qua cyclois intra globum deſcribitur, diameter conſtituatur æqualis ſemidiametro globi cyclois evadet linea recta per centrum globi tranſiens, & oſcillatio jam erit deſcenſus & ſubſequens aſcenſus in hac recta. Unde datur tum tempus deſcenſus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale quo corpus uniformiter circa centrum globi ad diſtantiam quamvis revolvendo arcum quadrantalem deſcribit. Eſt enim hoc tempus (per caſum ſecundum) ad tempus ſemioſcillationis in cycloide quavis *QRS* ut 1 ad $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$.

Corol. 2. Hinc etiam conſectantur quæ *Wrennus* & *Hugenius* de cycloide vulgari adinvenerunt. Nam ſi globi diameter augeatur in infinitum: mutabitur ejus ſuperficies ſphærica in planum, viſque centripeta aget uniformiter ſecundum lineas huic plano perpendiculares,

culares, & cyclois noſtra abibit in cycloidem vulgi. Iſto autem in caſu longitudo arcus cycloidis, inter planum illud & punctum deſcribens, æqualis evadet quadruplicato ſinui verſo dimidii arcus rotæ inter idem planum & punctum deſcribens; ut invenit *Wrennus:* Et pendulum inter duas ejuſmodi cycloides in ſimili & æquali cycloide temporibus æqualibus oſcillabitur, ut demonſtravit *Hugenius.* Sed & deſcenſus gravium, tempore oſcillationis unius, is erit quem *Hugenius* indicavit.

Aptantur autem propoſitiones a nobis demonſtratæ ad veram conſtitutionem terræ, quatenus rotæ eundo in ejus circulis maximis deſcribunt motu clavorum, perimetris ſuis infixorum, cycloides extra globum; & pendula inferius in fodinis & cavernis terræ ſuſpenſa, in cycloidibus intra globos oſcillari debent, ut oſcillationes omnes evadant iſochronæ. Nam gravitas (ut in libro tertio docebitur) decreſcit in progreſſu a ſuperficie terræ, ſurſum quidem in duplicata ratione diſtantiarum a centro ejus, deorſum vero in ratione ſimplici.

PROPOSITIO LIII. PROBLEMA XXXV.

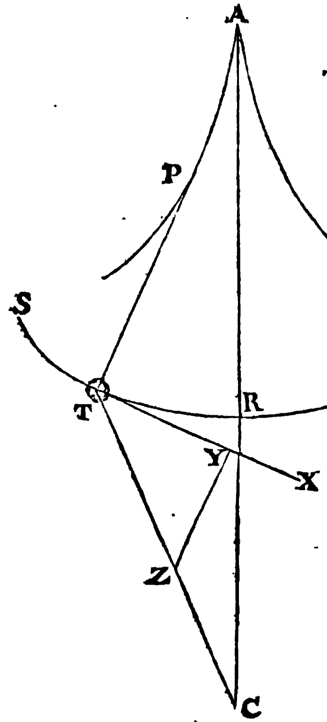
Conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire vires quibus corpora in datis curvis lineis oſcillationes ſemper iſochronas peragent.

Oſcilletur corpus T in curva quavis linea $STRQ$, cujus axis ſit AR tranſiens per virium centrum C. Agatur TX quæ curvam illam in corporis loco quovis T contingat, inque hac tangente TX capiatur TY æqualis arcui TR. Nam longitudo arcus illius ex figurarum quadraturis, per methodos vulgares, innoteſcit. De puncto Y educatur recta YZ tangenti perpendicularis. Agatur CT perpendiculari illi occurrens in Z, & erit vis centripeta proportionalis rectæ TZ. *Q. E. I.*

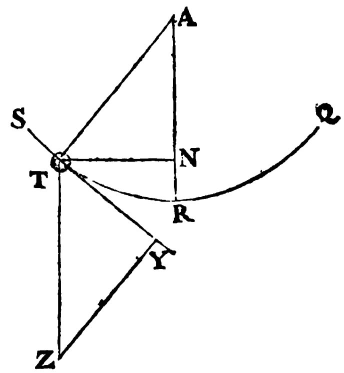
Nam ſi vis, qua corpus trahitur de T verſus C, exponatur per rectam TZ captam ipſi proportionalem, reſolvetur hæc in vires TY, YZ; quarum YZ trahendo corpus ſecundum longitudinem fili PT, motum ejus nil mutat, vis autem altera TY motum ejus in curva $STRQ$ directe accelerat vel directe retardat. Proinde cum hæc

ſit

ſit ut via deſcribenda *TR*, accelerationes corporis vel retardationes in oſcillationum duarum (majoris & minoris) partibus proportionalibus deſcribendis, erunt ſemper ut partes illæ, & propterea fa-



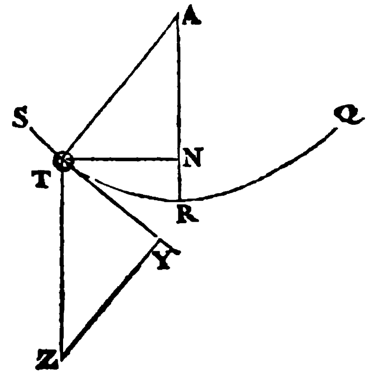
cient ut partes illæ ſimul deſcribantur. Corpora autem quæ partes totis ſemper proportionales ſimul deſcribunt, ſimul deſcribent totas. *Q. E. D.*



Corol. 1. Hinc ſi corpus *T*, filo rectilineo *AT* a centro *A* pendens, deſcribat arcum circularem *STRQ*, & interea urgeatur ſecundum lineas parallelas deorſum a vi aliqua, quæ ſit ad vim uniformem gravitatis, ut arcus *TR* ad ejus ſinum *TN*: æqualia erunt oſcillationum ſingularum tempora. Etenim ob parallelas *TZ*, *AR*, ſimilia erunt triangula *ATN*, *ZTY*; & propterea *TZ* erit ad *AT* ut *TY* ad *TN*; hoc eſt, ſi gravitatis vis uniformis exponatur per longitudinem datam *AT*; vis

 TZ, qua

TZ, qua oſcillationes evadent iſochronæ, erit ad vim gravitatis *AT*, ut arcus *TR* ipſi *TY* æqualis ad arcus illius ſinum *TN*.

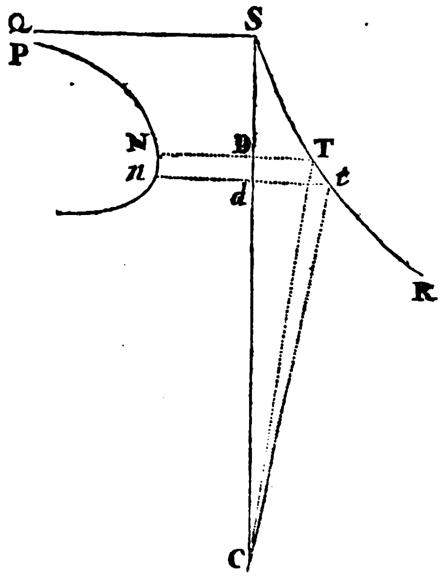


Corol. 2. Et propterea in horologiis, ſi vires a machina in pendulum ad motum conſervandum impreſſæ ita cum vi gravitatis componi poſſint, ut vis tota deorſum ſemper ſit ut linea quæ oritur applicando rectangulum ſub arcu *TR* & radio *AR* ad ſinum *TN*, oſcillationes omnes erunt iſochronæ.

PROPOSITIO LIV. PROBLEMA XXXVI.

Conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire tempora, quibus corpora vi qualibet centripeta in lineis quibuſcunque curvis, in plano per centrum virium tranſeunte deſcriptis, deſcendent & aſcendent.

Deſcendat corpus de loco quovis *S*, per lineam quamvis curvam *STtR* in plano per virium centrum *C* tranſeunte datam. Jungatur *CS* & dividatur eadem in partes innumeras æquales, ſitque *Dd* partium illarum aliqua. Centro *C* intervallis *CD*, *Cd* deſcribantur circuli *DT*, *dt*, lineæ curvæ *STtR* occurrentes in *T* & *t*. Et ex data tum lege vis centripetæ, tum altitudine *CS* de qua corpus cecidit; dabitur velocitas corporis in alia quavis altitudine *CT* (per prop. XXXIX.) Tempus autem, quo corpus deſcribit lineolam *Tt*, eſt ut lineolæ hujus longitudo, id eſt, ut ſecans anguli *tTC* directe; & velocitas inverſe. Tempori huic proportionalis ſit ordinatim applicata *DN* ad rectam *CS* per punctum *D* perpendicularis,

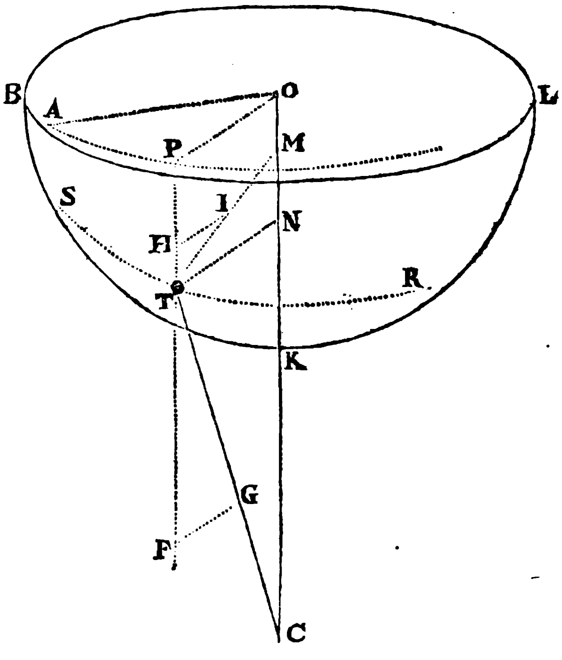


pendicularis, & ob datam *Dd* erit rectangulum *Dd* × *DN*, hoc eſt area *DNnd*, eidem tempori proportionale. Ergo ſi *PNn* ſit curva illa linea quam punctum *N* perpetuo tangit, ejuſque aſymptotos ſit recta *SQ* rectæ *CS* perpendiculariter inſiſtens: erit area *SQPND* proportionalis tempori quo corpus deſcendendo deſcripſit lineam *ST*; proindeque ex inventa illa area dabitur tempus. *Q.E.I.*

PROPOSITIO LV. THEOREMA XIX.

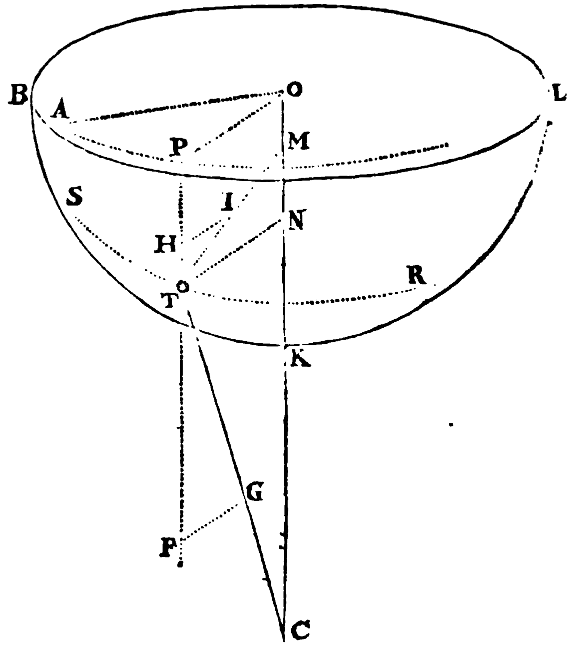
Si corpus movetur in ſuperficie quacunque curva, cujus axis per centrum virium tranſit, & a corpore in axem demittatur perpendicularis, eique parallela & æqualis ab axis puncto quovis dato ducatur: dico quod parallela illa aream tempori proportionalem deſcribet.

Sit *BKL* ſuperficies curva, *T* corpus in ea revolvens, *STR* trajectoria, quam corpus in eadem deſcribit, *S* initium trajectoriæ, *OMK* axis ſuperficiei curvæ, *TN* recta a corpore in axem perpendicularis, *OP* huic parallela & æqualis a puncto *O*, quod in axe datur, educta; *AP* veſtigium trajectoriæ a puncto *P* in lineæ volubilis *OP* plano *AOP* deſcriptum; *A* veſtigii initium puncto *S* reſpondens; *TC* recta a corpore ad centrum ducta; *TG* pars ejus vi centripetæ, qua corpus urgetur in centrum *C*, proportionalis; *TM* recta ad ſuperficiem curvam perpendicularis; *TI* pars ejus vi preſſionis, qua corpus urget ſuperficiem viciſſimque urgetur verſus *M* a ſuperficie, proportionalis; *PTF* recta axi parallela per corpus tranſiens, & *GF*, *IH* rectæ a punctis



G & *I*

G & *I* in parallelam illam *PHTF* perpendiculariter demiſſæ. Dico jam, quod area *AOP*, radio *OP* ab initio motus deſcripta, ſit tempori proportionalis. Nam vis *TG* (per legum corol. 2.) reſolvitur in vires *TF*, *FG*; & vis *TI* in vires *TH*, *HI*: Vires autem *TF*, *TH* agendo ſecundum lineam *PF* plano *AOP* perpendicularem mutant ſolummodo motum corporis quatenus huic plano perpendicularem. Ideoque motus ejus quatenus ſecundum poſitionem plani factus; hoc eſt, motus puncti *P*, quo trajectoriæ veſtigium *AP* in hoc plano deſcribitur, idem eſt ac ſi vires *TF*, *TH* tollerentur, & corpus ſolis viribus *FG*, *HI* agitaretur; hoc eſt, idem ac ſi corpus in plano *AOP*, vi centripeta ad centrum *O* tendente & ſummam virium *FG* & *HI* æquante, deſcriberet curvam *AP*. Sed vi tali deſcribitur area *AOP* (per prop. 1.) tempori proportionalis. *Q. E. D.*



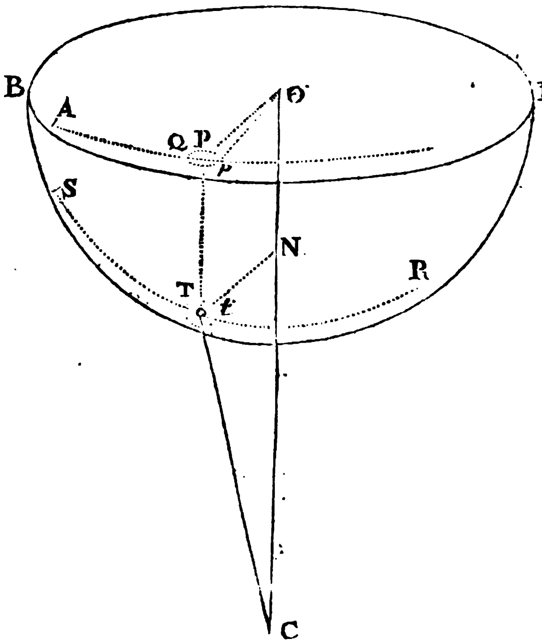
Corol. Eodem argumento ſi corpus, a viribus agitatum ad centra duo vel plura in eadem quavis recta *CO* data tendentibus, deſcriberet in ſpatio libero lineam quamcunque curvam *ST*; foret area *AOP* tempori ſemper proportionalis.

PROPO-

PROPOSITIO LVI. PROBLEMA XXXVII.

Conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, datiſque tum lege vis centripetæ ad centrum datum tendentis, tum ſuperficie curva cujus axis per centrum illud tranſit; invenienda eſt trajectoria quam corpus in eadem ſuperficie deſcribet, de loco dato, data cum velocitate, verſus plagam in ſuperficie illa datam egreſſum.

Stantibus quæ in ſuperiore propoſitione conſtructa ſunt, exeat corpus *T* de loco dato *S* ſecundum rectam poſitione datam in trajectoriam inveniendam *STR*, cujus veſtigium in plano *BLO* ſit *AP*. Et ex data corporis velocitate in altitudine *SC*, dabitur ejus velocitas in alia quavis altitudine *TC*. Ea cum velocitate dato tempore quam minimo deſcribat corpus trajectoriæ ſuæ particulam *Tt*, ſitque *Pp* veſtigium ejus in plano *AOP* deſcriptum. Jungatur *Op*, & circelli centro *T* intervallo *Tt* in ſuperficie curva deſcripti veſtigium in plano *AOP* ſit ellipſis *pQ*. Et ob datum magnitudine circellum *Tt*, datamque ejus ab axe *CO* diſtantiam *TN* vel *PO*, dabitur ellipſis illa *pQ* ſpecie & magnitudine, ut & poſitione ad rectam *PO*. Cumque area *POp* ſit tempori proportionalis, atque ideo ex dato tempore detur, dabitur angulus *POp*. Et inde dabitur ellipſeos & rectæ *Op* interſectio communis *p*, una cum angulo *OPp* in quo trajectoriæ veſtigium *APp* ſecat lineam *OP*. Inde vero (conferendo



De Motu Corporum

rendo prop. XLI. cum corol. ſuo 2.) ratio determinandi curvam *APp* facile apparet. Tum ex ſingulis veſtigii punctis *P*, erigendo ad planum *AOP* perpendicula *PT* ſuperficiei curvæ occurrentia in *T*, dabuntur ſingula trajectoriæ puncta *T*. *Q. E. I.*

SECTIO XI.

De motu corporum viribus centripetis ſe mutuo petentium.

Hactenus expoſui motus corporum attractorum ad centrum immobile, quale tamen vix extat in rerum natura. Attractiones enim fieri ſolent ad corpora; & corporum trahentium & attractorum actiones ſemper mutuæ ſunt & æquales, per legem tertiam: adeo ut neque attrahens poſſit quieſcere neque attractum, ſi duo ſint corpora, ſed ambo (per legum corollarium quartum) quaſi attractione mutua, circum gravitatis centrum commune revolvantur: & ſi plura ſint corpora, quæ vel ab unico attrahantur, & idem attrahant, vel omnia ſe mutuo attrahant; hæc ita inter ſe moveri debeant, ut gravitatis centrum commune vel quieſcat, vel uniformiter moveatur in directum. Qua de cauſa jam pergo motum exponere corporum ſe mutuo trahentium, conſiderando vires centripetas tanquam attractiones, quamvis fortaſſe, ſi phyſice loquamur, verius dicantur impulſus. In mathematicis enim jam verſamur; & propterea, miſſis diſputationibus phyſicis, familiari utimur ſermone, quo poſſimus a lectoribus mathematicis facilius intelligi.

PROPOSITIO LVII. THEOREMA XX.

Corpora duo ſe invicem trahentia deſcribunt, & circum commune centrum gravitatis, & circum ſe mutuo, figuras ſimiles.

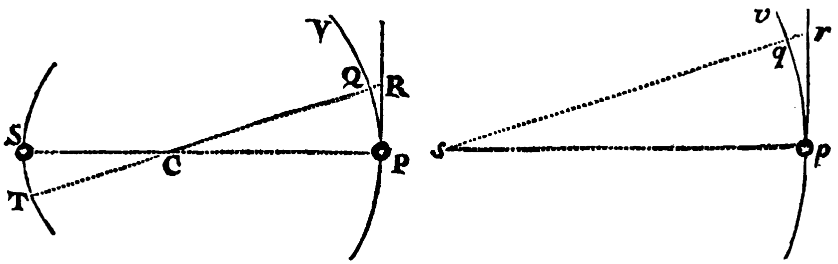
Sunt enim diſtantiæ corporum a communi gravitatis centro reciproce proportionales corporibus; atque ideo in data ratione ad invicem, & componendo in data ratione ad diſtantiam totam inter corpora. Feruntur autem hæ diſtantiæ circum terminum ſuum communem

communem æquali motu angulari, propterea quod in directum ſemper jacentes non mutant inclinationem ad ſe mutuo. Lineæ autem rectæ, quæ ſunt in data ratione ad invicem, & æquali motu angulari circum terminos ſuos feruntur, figuras circum eoſdem terminos in planis, quæ una cum his terminis vel quieſcunt, vel motu quovis non angulari moventur, deſcribunt omnino ſimiles. Proinde ſimiles ſunt figuræ, quæ his diſtantiis circumactis deſcribuntur. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LVIII. THEOREMA XXI.

Si corpora duo viribus quibuſvis ſe mutuo trahunt, & interea revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod figuris, quas corpora ſic mota deſcribunt circum ſe mutuo, poteſt figura ſimilis & æqualis, circum corpus alterutrum immotum, viribus iiſdem deſcribi.

Revolvantur corpora *S*, *P* circa commune gravitatis centrum *C*, pergendo de *S* ad *T*, deque *P* ad *Q*. A dato puncto *s* ipſis *SP*, *TQ* æquales & parallelæ ducantur ſemper *sp*, *sq*; & curva *pqv*, quam punctum *p* revolvendo circum punctum immotum *s* deſcribit, erit ſimilis & æqualis curvis, quas corpora *S*, *P* deſcribunt circum ſe mutuo: proindeque (per theor. xx.) ſimilis curvis *ST* & *PQV*,

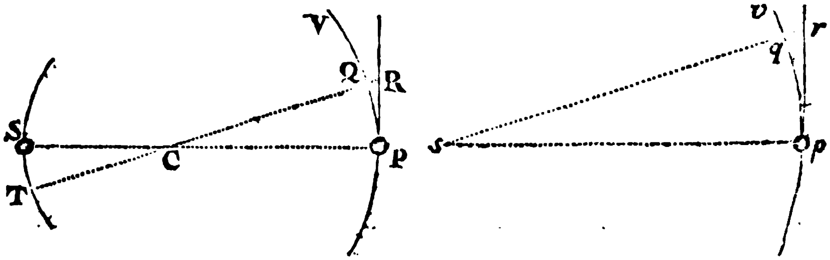


quas eadem corpora deſcribunt circum commune gravitatis centrum *C*: idque quia proportiones linearum *SC*, *CP*, & *SP* vel *sp* ad invicem dantur.

Caſ. 1. Commune illud gravitatis centrum *C*, per legum corollarium quartum, vel quieſcit, vel movetur uniformiter in directum. Ponamus primo, quod id quieſcit, inque *s* & *p* locentur corpora

 duo,

duo, immobile in *s*, mobile in *p*, corporibus *S* & *P* ſimilia & æqualia. Dein tangant rectæ *PR* & *pr* curvas *PQ* & *pq* in *P* & *p*, & producantur *CQ* & *sq* ad *R* & *r*. Et ob ſimilitudinem figurarum *CPRQ*, *sprq* erit *RQ* ad *rq* ut *CP* ad *sp*, ideoque in data ratione. Proinde ſi vis, qua corpus *P* verſus corpus *S*, atque ideo verſus centrum intermedium *C* attrahitur, eſſet ad vim, qua corpus *p* verſus centrum *s* attrahitur, in eadem illa ratione data; hæ vires æqualibus temporibus attraherent ſemper corpora de tangentibus *PR*, *pr* ad arcus *PQ*, *pq* per intervalla ipſis proportionalia *RQ*, *rq*, ideoque vis poſterior efficeret, ut corpus *p* gyraretur in curva *pqv*, quæ ſimilis eſſet curvæ *PQV*, in qua vis prior efficit, ut corpus *P* gyretur; & revolutiones iiſdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non ſunt ad invicem in ratione *CP* ad *sp*, ſed (ob ſimilitudinem & æqualitatem corporum *S* & *s*, *P* & *p*, & æqualitatem diſtantiarum *SP*, *sp*) ſibi mutuo æquales; corpora æqualibus temporibus æqualiter trahentur de tangentibus: & propterea, ut



corpus poſterius *p* trahatur per intervallum majus *rq*, requiritur tempus majus, idque in ſubduplicata ratione intervallorum; propterea quod (per lemma decimum) ſpatia ipſo motus initio deſcripta ſunt in duplicata ratione temporum. Ponatur igitur velocitas corporis *p* eſſe ad velocitatem corporis *P* in ſubduplicata ratione diſtantiæ *sp* ad diſtantiam *CP*, eo ut temporibus, quæ ſint in eadem ſubduplicata ratione, deſcribantur arcus *pq*, *PQ*, qui ſunt in ratione integra: Et corpora *P*, *p* viribus æqualibus ſemper attracta deſcribent circum centra quieſcentia *C* & *s* figuras ſimiles *PQV*, *pqv*, quarum poſterior *pqv* ſimilis eſt & æqualis figuræ, quam corpus *P* circum corpus mobile *S* deſcribit. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Ponamus jam quod commune gravitatis centrum, una cum ſpatio in quo corpora moventur inter ſe, progreditur uniformiter

miter in directum; & (per legum corollarium ſextum) motus omnes in hoc ſpatio peragentur ut prius, ideoque corpora deſcribent circum ſe mutuo figuras eaſdem ac prius, & propterea figuræ *p q v* ſimiles & æquales. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc corpora duo viribus diſtantiæ ſuæ proportionalibus ſe mutuo trahentia, deſcribunt (per prop. x.) & circum commune gravitatis centrum, & circum ſe mutuo, ellipſes concentricas; & vice verſa, ſi tales figuræ deſcribuntur, ſunt vires diſtantiæ proportionales.

Corol. 2. Et corpora duo, viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciproce proportionalibus, deſcribunt (per prop. xi. xii. xiii.) & circum commune gravitatis centrum, & circum ſe mutuo, ſectiones conicas umbilicum habentes in centro, circum quod figuræ deſcribuntur. Et vice verſa, ſi tales figuræ deſcribuntur, vires centripetæ ſunt quadrato diſtantiæ reciproce proportionales.

Corol. 3. Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune gyrantia, radiis & ad centrum illud & ad ſe mutuo ductis, deſcribunt areas temporibus proportionales.

PROPOSITIO LIX. THEOREMA XXII.

Corporum duorum S *&* P, *circa commune gravitatis centrum* C *revolventium, tempus periodicum eſſe ad tempus periodicum corporis alterutrius* P, *circa alterum immotum* S *gyrantis, & figuris, quæ corpora circum ſe mutuo deſcribunt, figuram ſimilem & æqualem deſcribentis, in ſubduplicata ratione corporis alterius* S, *ad ſummam corporum* S+P.

Namque, ex demonſtratione ſuperioris propoſitionis, tempora, quibus arcus quivis ſimiles *PQ* & *pq* deſcribuntur, ſunt in ſubduplicata ratione diſtantiarum *CP* & *SP* vel *sp*, hoc eſt, in ſubduplicata ratione corporis *S* ad ſummam corporum *S*+*P*. Et componendo, ſummæ temporum quibus arcus omnes ſimiles *PQ* & *pq* deſcribuntur, hoc eſt, tempora tota, quibus figuræ totæ ſimiles deſcribuntur, ſunt in eadem ſubduplicata ratione. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LX. THEOREMA XXIII.

Si corpora duo S *&* P, *viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciproce proportionalibus, ſe mutuo trahentia, revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod ellipſeos, quam corpus alterutrum* P *hoc motu circa alterum* S *deſcribit, axis principalis erit ad axem principalem ellipſeos, quam corpus idem* P *circa alterum quieſcens* S *eodem tempore periodico deſcribere poſſet, ut ſumma corporum duorum* S+P *ad primum duorum medie proportionalium inter hanc ſummam & corpus illud alterum* S.

Nam ſi deſcriptæ ellipſes eſſent ſibi invicem æquales, tempora periodica (per theorema ſuperius) forent in ſubduplicata ratione corporis *S* ad ſummam corporum *S*+*P*. Minuatur in hac ratione tempus periodicum in ellipſi poſteriore, & tempora periodica evadent æqualia; ellipſeos autem axis principalis (per prop. xv.) minuetur in ratione, cujus hæc eſt ſeſquiplicata, id eſt in ratione, cujus ratio *S* ad *S*+*P* eſt triplicata; ideoque erit ad axem principalem ellipſeos alterius, ut primum duorum medie proportionalium inter *S*+*P* & *S* ad *S*+*P*. Et inverſe, axis principalis ellipſeos circa corpus mobile deſcriptæ erit ad axem principalem deſcriptæ circa immobile, ut *S*+*P* ad primum duorum medie proportionalium inter *S*+*P* & *S*. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXI. THEOREMA XXIV.

Si corpora duo viribus quibuſvis ſe mutuo trahentia, neque alias agitata vel impedita, quomodocunque moveantur; motus eorum perinde ſe habebunt, ac ſi non traherent ſe mutuo, ſed utrumque a corpore tertio in communi gravitatis centro conſtituto viribus iiſdem traheretur: Et virium trahentium eadem erit lex reſpectu diſtantiæ corporum a centro illo communi atque reſpectu diſtantiæ totius inter corpora.

Nam

Nam vires illæ, quibus corpora ſe mutuo trahunt, tendendo ad corpora, tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium; ideoque eædem ſunt, ac ſi a corpore intermedio manarent. *Q.E.D.*

Et quoniam datur ratio diſtantiæ corporis utriuſvis a centro illo communi ad diſtantiam inter corpora, dabitur ratio cujuſvis poteſtatis diſtantiæ unius ad eandem poteſtatem diſtantiæ alterius; ut & ratio quantitatis cujuſvis, quæ ex una diſtantia & quantitatibus datis utcunque derivatur, ad quantitatem aliam, quæ ex altera diſtantia, & quantitatibus totidem datis, datamque illam diſtantiarum rationem ad priores habentibus ſimiliter derivatur. Proinde ſi vis, qua corpus unum ab altero trahitur, ſit directe vel inverſe ut diſtantia corporum ab invicem; vel ut quælibet hujus diſtantiæ poteſtas; vel denique ut quantitas quævis ex hac diſtantia & quantitatibus datis quomodocunque derivata: erit eadem vis, qua corpus idem ad commune gravitatis centrum trahitur, directe itidem vel inverſe ut corporis attracti diſtantia a centro illo communi, vel ut eadem diſtantiæ hujus poteſtas, vel denique ut quantitas ex hac diſtantia & analogis quantitatibus datis ſimiliter derivata. Hoc eſt, vis trahentis eadem erit lex reſpectu diſtantiæ utriuſque. *Q.E.D.*

PROPOSITIO LXII. PROBLEMA XXXVIII.

Corporum duorum, quæ viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciproce proportionalibus ſe mutuo trahunt, ac de locis datis demittuntur, determinare motus.

Corpora (per theorema noviſſimum) perinde movebuntur, ac ſi a corpore tertio in communi gravitatis centro conſtituto traherentur; & centrum illud ipſo motus initio quieſcet per hypotheſin; & propterea (per legum corol. 4.) ſemper quieſcet. Determinandi ſunt igitur motus corporum (per prob. xxv.) perinde ac ſi a viribus ad centrum illud tendentibus urgerentur, & habebuntur motus corporum ſe mutuo trahentium. *Q.E.I.*

PROPOSITIO LXIII. PROBLEMA XXXIX.

Corporum duorum quæ viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciproce proportionalibus ſe mutuo trahunt, deque locis datis, ſecundum datas rectas, datis cum velocitatibus exeunt, determinare motus.

Ex datis corporum motibus ſub initio, datur uniformis motus centri communis gravitatis, ut & motus ſpatii, quod una cum hoc centro movetur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales reſpectu hujus ſpatii. Motus autem ſubſequentes (per legum corollarium quintum, & theorema noviſſimum) perinde fiunt in hoc ſpatio, ac ſi ſpatium ipſum una cum communi illo gravitatis centro quieſceret, & corpora non traherent ſe mutuo, ſed a corpore tertio ſito in centro illo traherentur. Corporis igitur alterutrius in hoc ſpatio mobili, de loco dato, ſecundum datam rectam, data cum velocitate exeuntis, & vi centripeta ad centrum illud tendente correpti, determinandus eſt motus per problema nonum & viceſimum ſextum: & habebitur ſimul motus corporis alterius circum idem centrum. Cum hoc motu componendus eſt uniformis ille ſyſtematis ſpatii & corporum in eo gyrantium motus progreſſivus ſupra inventus, & habebitur motus abſolutus corporum in ſpatio immobili. *Q. E. I.*

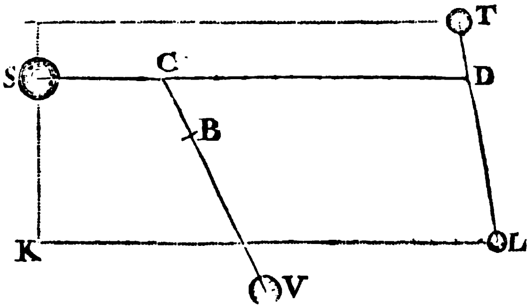
PROPOSITIO LXIV. PROBLEMA XL.

Viribus quibus corpora ſe mutuo trahunt creſcentibus in ſimplici ratione diſtantiarum a centris: requiruntur motus plurium corporum inter ſe.

Ponantur primo corpora duo *T* & *L* commune habentia gravitatis centrum *D*. Deſcribent hæc (per corollarium primum theorematis XXI.) ellipſes centra habentes in *D*, quarum magnitudo ex problemate V. innoteſcit.

Trahat jam corpus tertium *S* priora duo *T* & *L* viribus acceleratricibus *ST*, *SL*, & ab ipſis viciſſim trahatur. Vis *ST* (per legum corol.

corol. 2.) reſolvitur in vires *SD*, *DT*; & vis *SL* in vires *SD*, *DL*. Vires autem *DT*, *DL*, quæ ſunt ut ipſarum ſumma *TL*, atque ideo ut vires acceleratrices quibus corpora *T* & *L* ſe mutuo trahunt, additæ his viribus corporum *T* & *L*, prior priori & poſterior poſteriori, componunt vires diſtantiis *DT* ac *DL* proportionales, ut prius, ſed viribus prioribus majores; ideoque (per corol. 1. prop. x. & corol. 1. & 8. prop. iv.) efficiunt ut corpora illa deſcribant ellipſes ut prius, ſed motu celeriore. Vires reliquæ acceleratrices *SD* & *SD*, actionibus motricibus *SD*×*T* & *SD*×*L*, quæ ſunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter & ſecundum lineas *TI*, *LK*, ipſi *DS* parallelas, nil mutant ſitus eorum ad invicem, ſed faciunt ut ipſa æqualiter accedant ad lineam *IK*; quam ductam concipe per medium corporis *S*, & lineæ *DS* perpendicularem. Impedietur autem iſte ad lineam *IK* acceſſus faciendo ut ſyſtema corporum *T* & *L* ex una parte, & corpus *S* ex altera, juſtis cum velocitatibus, gyrentur circa commune gravitatis centrum *C*. Tali motu corpus *S*, eo quod ſumma virium motricium *SD*×*T* & *SD*×*L*, diſtantiæ *CS* proportionalium, tendit verſus centrum *C*, deſcribit ellipſin circa idem *C*; & punctum *D*, ob proportionales *CS*, *CD*, deſcribet ellipſin conſimilem e regione. Corpora autem *T* & *L* viribus motricibus *SD*×*T* & *SD*×*L*, prius priore, poſterius poſteriore, æqualiter & ſecundum lineas parallelas *TI* & *LK*, ut dictum eſt, attracta, pergent (per legum corollarium quintum & ſextum) circa centrum mobile *D* ellipſes ſuas deſcribere, ut prius. *Q. E. I.*



Addatur jam corpus quartum *V*, & ſimili argumento concludetur hoc & punctum *C* ellipſes circa omnium commune centrum gravitatis *B* deſcribere; manentibus motibus priorum corporum *T*, *L* & *S* circa centra *D* & *C*, ſed acceleratis. Et eadem methodo corpora plura adjungere licebit. *Q. E. I.*

Hæc ita ſe habent, etſi corpora *T* & *L* trahunt ſe mutuo viribus acceleratricibus majoribus vel minoribus quam quibus trahunt corpora reliqua pro ratione diſtantiarum. Sunto mutuæ omnium attractiones

LIBER PRIMUS.

nes acceleratrices ad invicem ut diſtantiæ ductæ in corpora trahentia, & ex præcedentibus facile deducetur quod corpora omnia æqualibus temporibus periodicis ellipſes varias, circa omnium commune gravitatis centrum *B*, in plano immobili deſcribunt. *Q. E. I.*

PROPOSITIO LXV. THEOREMA XXV.

Corpora plura, quorum vires decreſcunt in duplicata ratione diſtantiarum ab eorundem centris, moveri poſſe inter ſe in ellipſibus; & radiis ad umbilicos ductis areas deſcribere temporibus proportionales quam proxime.

In propoſitione ſuperiore demonſtratus eſt caſus ubi motus plures peraguntur in ellipſibus accurate. Quo magis recedit lex virium a lege ibi poſita, eo magis corpora perturbabunt mutuos motus; neque fieri poteſt, ut corpora, ſecundum legem hic poſitam ſe mutuo trahentia, moveantur in ellipſibus accurate, niſi ſervando certam proportionem diſtantiarum ab invicem. In ſequentibus autem caſibus non multum ab ellipſibus errabitur.

Caſ. 1. Pone corpora plura minora circa maximum aliquod ad varias ab eo diſtantias revolvi, tendantque ad ſingula vires abſolutæ proportionales iiſdem corporibus. Et quoniam omnium commune gravitatis centrum (per legum corol. quartum) vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum, fingamus corpora minora tam parva eſſe, ut corpus maximum nunquam diſtet ſenſibiliter ab hoc centro: & maximum illud vel quieſcet, vel movebitur uniformiter in directum, ſine errore ſenſibili; minora autem revolventur circa hoc maximum in ellipſibus, atque radiis ad idem ductis deſcribent areas temporibus proportionales; niſi quatenus errores inducuntur, vel per errorem maximi a communi illo gravitatis centro, vel per actiones minorum corporum in ſe mutuo. Diminui autem poſſunt corpora minora, uſque donec error iſte, & actiones mutuæ ſint datis quibuſvis minores; atque ideo donec orbes cum ellipſibus quadrent, & areæ reſpondeant temporibus, ſine errore, qui non ſit minor quovis dato. *Q. E. O.*

Caſ.

Caſ. 2. Fingamus jam ſyſtema corporum minorum modo jam deſcripto circa maximum revolventium, aliudve quodvis duorum circum ſe mutuo revolventium corporum ſyſtema progredi uniformiter in directum, & interea vi corporis alterius longe maximi & ad magnam diſtantiam ſiti urgeri ad latus. Et quoniam æquales vires acceleratrices, quibus corpora ſecundum lineas parallelas urgentur, non mutant ſitus corporum ad invicem, ſed ut ſyſtema totum, ſervatis partium motibus inter ſe, ſimul transferatur, efficiunt: manifeſtum eſt quod, ex attractionibus in corpus maximum, nulla prorſus orietur mutatio motus attractorum inter ſe, niſi vel ex attractionum acceleratricum inæqualitate, vel ex inclinatione linearum ad invicem, ſecundum quas attractiones fiunt. Pone ergo attractiones omnes acceleratrices in corpus maximum eſſe inter ſe reciproce ut quadrata diſtantiarum; & augendo corporis maximi diſtantiam, donec rectarum ab hoc ad reliqua ductarum differentiæ reſpectu earum longitudinis, & inclinationes ad invicem minores ſint, quam datæ quævis; perſeverabunt motus partium ſyſtematis inter ſe ſine erroribus, qui non ſint quibuſvis datis minores. Et quoniam, ob exiguam partium illarum ab invicem diſtantiam, ſyſtema totum ad modum corporis unius attrahitur; movebitur idem hac attractione ad modum corporis unius; hoc eſt, centro ſuo gravitatis deſcribet circa corpus maximum ſectionem aliquam conicam (*viz.* Hyperbolam vel parabolam attractione languida, ellipſin fortiore) & radio ad maximum ducto deſcribet areas temporibus proportionales, ſine ullis erroribus, niſi quas partium diſtantiæ, perexiguæ ſane & pro lubitu minuendæ, valeant efficere. *Q. E. O.*

LIBER PRIMUS.

Simili argumento pergere licet ad caſus magis compoſitos in infinitum.

Corol. 1. In caſu ſecundo, quo propius accedit corpus omnium maximum ad ſyſtema duorum vel plurium, eo magis turbabuntur motus partium ſyſtematis inter ſe; propterea quod linearum a corpore maximo ad has ductarum jam major eſt inclinatio ad invicem, majorque proportionis inæqualitas.

Corol. 2. Maxime autem turbabuntur, ponendo quod attractiones acceleratrices partium ſyſtematis, verſus corpus omnium maximum, non ſint ad invicem reciproce ut quadrata diſtantiarum a corpore illo maximo; præſertim ſi proportionis hujus inæqualitas major ſit

quam inæqualitas proportionis diſtantiarum a corpore maximo. Nam ſi vis acceleratrix, æqualiter & ſecundum lineas parallelas agendo, nil perturbat motus inter ſe, neceſſe eſt, ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur, majorque ſit, vel minor pro majore, vel minore inæqualitate. Exceſſus impulſuum majorum, agendo in aliqua corpora & non agendo in alia, neceſſario mutabunt ſitum eorum inter ſe. Et hæc perturbatio addita perturbationi, quæ ex linearum inclinatione & inæqualitate oritur, majorem reddet perturbationem totam.

Corol. 3. Unde ſi ſyſtematis hujus partes in ellipſibus, vel circulis ſine perturbatione inſigni moveantur; manifeſtum eſt, quod eædem a viribus acceleratricibus, ad alia corpora tendentibus, aut non urgentur niſi leviſſime, aut urgentur æqualiter, & ſecundum lineas parallelas quamproxime.

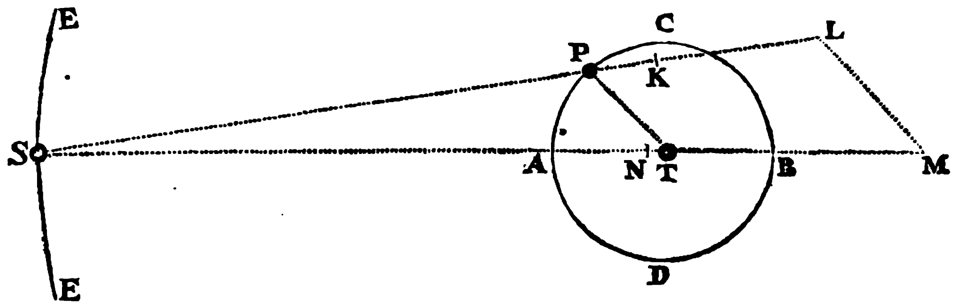
PROPOSITIO LXVI. THEOREMA XXVI.

Si corpora tria, quorum vires decreſcunt in duplicata ratione diſtantiarum, ſe mutuo trahant; & attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium ſint inter ſe reciproce ut quadrata diſtantiarum; minora autem circa maximum revolvantur: dico quod interius circa intimum & maximum, radiis ad ipſum ductis, deſcribet areas temporibus magis proportionales, & figuram ad formam ellipſeos umbilicum in concurſu radiorum habentis magis accedentem; ſi corpus maximum his attractionibus agitetur; quam ſi maximum illud vel a minoribus non attractum quieſcat, vel multo minus vel multo magis attractum, aut multo minus aut multo magis agitetur.

Liquet fere ex demonſtratione corollarii ſecundi propoſitionis præcedentis; ſed argumento magis diſtincto & latius cogente ſic evincitur.

Caſ. 1. Revolvantur corpora minora *P* & *S* in eodem plano circa maximum *T*, quorum *P* deſcribat orbem interiorem *PAB*, & *S* exteriorem.

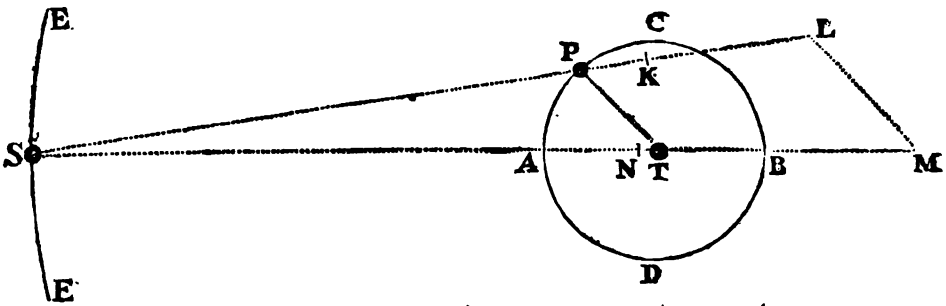
teriorem *ESE*. Sit *SK* mediocris diſtantia corporum *P* & *S*; & corporis *P* verſus *S* attractio acceleratrix, in mediocri illa diſtantia, exponatur per eandem. In duplicata ratione *SK* ad *SP* capiatur *SL* ad *SK*, & erit *SL* attractio acceleratrix corporis *P* verſus *S* in diſtantia quavis *SP*. Junge *PT*, eique parallelam age *LM* occurrentem *ST* in *M*; & attractio *SL* reſolvetur (per legum corol. 2.) in attractiones *SM*, *LM*. Et ſic urgebitur corpus *P* vi acceleratrice triplici. Vis una tendit ad *T*, & oritur a mutua attractione corporum *T* & *P*. Hac vi ſola corpus *P* circum corpus *T*, ſive immotum, ſive hac attractione agitatum, deſcribere deberet & areas, radio *PT*, temporibus proportionales, & ellipſin cui umbilicus eſt in centro corporis *T*. Patet hoc per prop. XI. & corollaria 2. & 3. theor. XXI. Vis altera eſt attractionis *LM*, quæ quoniam tendit a *P* ad *T*, ſu-



peraddita vi priori coincidet cum ipſa, & ſic faciet ut areæ etiamnum temporibus proportionales deſcribantur per corol. 3. theor. XXI. At quoniam non eſt quadrato diſtantiæ *PT* reciproce proportionalis, componet ea cum vi priore vim ab hac proportione aberrantem, idque eo magis, quo major eſt proportio hujus vis ad vim priorem, cæteris paribus. Proinde cum (per prop. XI. & per corol. 2. theor. XXI.) vis, qua ellipſis circa umbilicum *T* deſcribitur, tendere debeat ad umbilicum illum, & eſſe quadrato diſtantiæ *PT* reciproce proportionalis; vis illa compoſita, aberrando ab hac proportione, faciet ut orbis *PAB* aberret a forma ellipſeos umbilicum habentis in *T*; idque eo magis, quo major eſt aberratio ab hac proportione; atque ideo etiam quo major eſt proportio vis ſecundæ *LM* ad vim primam, cæteris paribus. Jam vero vis tertia *SM*, trahendo corpus *P* ſecundum lineam ipſi *ST* parallelam, componet cum viribus prioribus vim, quæ non amplius dirigitur a *P* in *T*;

 quæque

quæque ab hac determinatione tanto magis aberrat, quanto major eſt proportio hujus tertiæ vis ad vires priores, cæteris paribus: atque ideo quæ faciet ut corpus *P*, radio *TP*, areas non amplius temporibus proportionales deſcribat; atque ut aberratio ab hac proportionalitate tanto major ſit, quanto major eſt proportio vis hujus tertiæ ad vires cæteras. Orbis vero *PAB* aberrationem a forma elliptica præfata hæc vis tertia duplici de cauſa adaugebit, tum quod non dirigatur a *P* ad *T*, tum etiam quod non ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ *PT*. Quibus intellectis, manifeſtum eſt, quod areæ temporibus tum maxime fiunt proportionales, ubi vis tertia, manentibus viribus cæteris, fit minima; & quod orbis *PAB* tum maxime accedit ad præfatam formam ellipticam, ubi vis tam ſecunda quam tertia, ſed præcipue vis tertia fit minima, vi prima manente.



Exponatur corporis *T* attractio acceleratrix verſus *S* per lineam *SN*; & ſi attractiones acceleratrices *SM*, *SN* æquales eſſent; hæ, trahendo corpora *T* & *P* æqualiter & ſecundum lineas parallelas, nil mutarent ſitum eorum ad invicem. Iidem jam forent corporum illorum motus inter ſe (per legum corol. vi.) ac ſi hæ attractiones tollerentur. Et pari ratione ſi attractio *SN* minor eſſet attractione *SM*, tolleret ipſa attractionis *SM* partem *SN*, & maneret pars ſola *MN*, qua temporum & arearum proportionalitas & orbitæ forma illa elliptica perturbaretur. Et ſimiliter ſi attractio *SN* major eſſet attractione *SM*, oriretur ex differentia ſola *MN* perturbatio proportionalitatis & orbitæ. Sic per attractionem *SN* reducitur ſemper attractio tertia ſuperior *SM* ad attractionem *MN*, attractione prima & ſecunda manentibus prorſus immutatis: & propterea areæ ac tempora ad proportionalitatem, & orbita *PAB* ad formam præ-

fatam

fatam ellipticam tum maxime accedunt, ubi attractio *MN* vel nulla eſt, vel quam fieri poſſit minima; hoc eſt, ubi corporum *P* & *T* attractiones acceleratrices, factæ verſus corpus *S*, accedunt quantum fieri poteſt ad æqualitatem; id eſt, ubi attractio *SN* non eſt nulla, neque minor minima attractionum omnium *SM*, ſed inter attractionum omnium *SM* maximam & minimam quaſi mediocris, hoc eſt, non multo major neque multo minor attractione *SK*. *Q.E.D.*

Caſ. 2. Revolvantur jam corpora minora *P*, *S* circa maximum *T* in planis diverſis; & vis *LM*, agendo ſecundum lineam *PT* in plano orbitæ *PAB* ſitam, eundem habebit effectum ac prius, neque corpus *P* de plano orbitæ ſuæ deturbabit. At vis altera *NM*, agendo ſecundum lineam quæ ipſi *ST* parallela eſt (atque ideo, quando corpus *S* verſatur extra lineam nodorum, inclinatur ad planum orbitæ *PAB*) præter perturbationem motus in longitudinem jam ante expoſitam, inducet perturbationem motus in latitudinem, trahendo corpus *P* de plano ſuæ orbitæ. Et hæc perturbatio, in dato quovis corporum *P* & *T* ad invicem ſitu, erit ut vis illa generans *MN*, ideoque minima evadet ubi *MN* eſt minima, hoc eſt (uti jam expoſui) ubi attractio *SN* non eſt multo major, neque multo minor attractione *SK*. *Q.E.D.*

Corol. 1. Ex his facile colligitur, quod, ſi corpora plura minora *P*, *S*, *R*, &c. revolvantur circa maximum *T*, motus corporis intimi *P* minime perturbabitur attractionibus exteriorum, ubi corpus maximum *T* pariter a cæteris, pro ratione virium acceleratricum, attrahitur & agitatur, atque cætera a ſe mutuo.

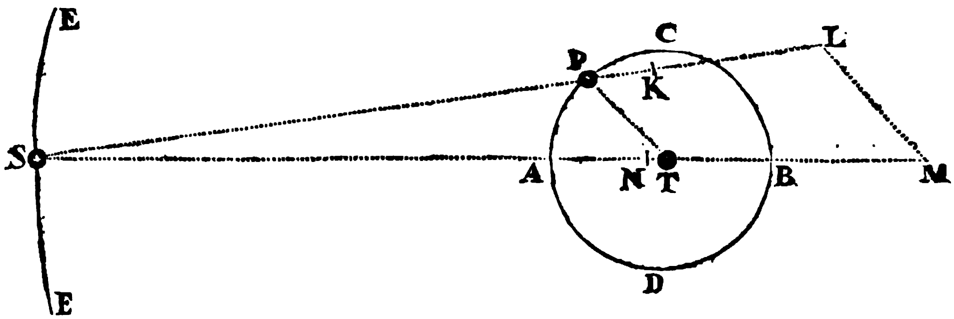
Corol. 2. In ſyſtemate vero trium corporum *T*, *P*, *S*, ſi attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium ſint ad invicem reciproce ut quadrata diſtantiarum; corpus *P*, radio *PT*, aream circa corpus *T* velocius deſcribet prope conjunctionem *A* & oppoſitionem *B*, quam prope quadraturas *C*, *D*. Namque vis omnis qua corpus *P* urgetur & corpus *T* non urgetur, quæque non agit ſecundum lineam *PT* accelerat vel retardat deſcriptionem areæ, perinde ut ipſa in conſequentia vel in antecedentia dirigitur. Talis eſt vis *NM*. Hæc in tranſitu corporis *P* a *C* ad *A* tendit in conſequentia, motumque accelerat; dein uſque ad *D* in antecedentia, & motum retardat; tum in conſequentia uſque ad *B*, & ultimo in antecedentia tranſeundo a *B* ad *C*.

Corol.

Corol. 3. Et eodem argumento patet quod corpus *P*, cæteris paribus, velocius movetur in conjunctione & oppoſitione quam in quadraturis.

Corol. 4. Orbita corporis *P*, cæteris paribus, curvior eſt in quadraturis quam in conjunctione & oppoſitione. Nam corpora velociora minus deflectunt a recto tramite. Et præterea vis *KL*, vel *NM*, in conjunctione & oppoſitione contraria eſt vi, qua corpus *T* trahit corpus *P*; ideoque vim illam minuit; corpus autem *P* minus deflectet a recto tramite, ubi minus urgetur in corpus *T*.

Corol. 5. Unde corpus *P*, cæteris paribus, longius recedet a corpore *T* in quadraturis, quam in conjunctione & oppoſitione. Hæc ita ſe habent excluſo motu excentricitatis. Nam ſi orbita corporis *P* excentrica ſit, excentricitas ejus (ut mox in hujus corol. 9. oſtendetur) evadet maxima ubi apſides ſunt in ſyzygiis; indeque fieri poteſt ut corpus *P*, ad apſidem ſummam appellans, abſit longius a corpore *T* in ſyzygiis quam in quadraturis.



Corol. 6. Quoniam vis centripeta corporis centralis *T*, qua corpus *P* retinetur in orbe ſuo, augetur in quadraturis per additionem vis *LM*, ac diminuitur in ſyzygiis per ablationem vis *KL*, & ob magnitudinem vis *KL*, magis diminuitur quam augetur; eſt autem vis illa centripeta (per corol. 2. prop. IV.) in ratione compoſita ex ratione ſimplici radii *TP* directe & ratione duplicata temporis periodici inverſe: patet hanc rationem compoſitam diminui per actionem vis *KL*; ideoque tempus periodicum, ſi maneat orbis radius *TP*, augeri, idque in ſubduplicata ratione, qua vis illa centripeta diminuitur: auctoque ideo vel diminuto hoc radio, tempus periodicum augeri magis, vel diminui minus quam in radii hujus ratione ſeſqui-

feſquiplicata, (per corol. VI. prop. IV.) Si vis illa corporis centralis paulatim langueſceret, corpus *P* minus ſemper & minus attractum perpetuo recederet longius a centro *T*; & contra, ſi vis illa augeretur, accederet propius. Ergo ſi actio corporis longinqui *S*, qua vis illa diminuitur, augeatur ac diminuatur per vices: augebitur ſimul ac diminuetur radius *TP* per vices; & tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione compoſita ex ratione ſeſquiplicata radii, & ratione ſubduplicata, qua vis illa centripeta corporis centralis *T*, per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui *S*, diminuitur vel augetur.

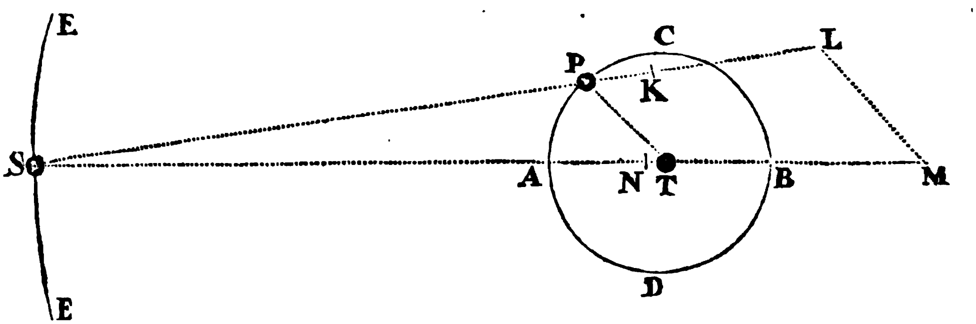
Corol. 7. Ex præmiſſis conſequitur etiam, quod ellipſeos a corpore *P* deſcriptæ axis, ſeu apſidum linea, quoad motum angularem, progreditur & regreditur per vices, ſed magis tamen progreditur, & per exceſſum progreſſionis fertur in conſequentia. Nam vis qua corpus *P* urgetur in corpus *T* in quadraturis, ubi vis *MN* evanuit, componitur ex vi *LM* & vi centripeta, qua corpus *T* trahit corpus *P*. Vis prior *LM*, ſi augeatur diſtantia *PT*, augetur in eadem fere ratione cum hac diſtantia, & vis poſterior decreſcit in duplicata illa ratione, ideoque ſumma harum virium decreſcit in minore quam duplicata ratione diſtantiæ *PT*, & propterea (per corol. I. prop. XLV.) efficit ut aux, ſeu apſis ſumma, regrediatur. In conjunctione vero & oppoſitione vis, qua corpus *P* urgetur in corpus *T*, differentia eſt inter vim, qua corpus *T* trahit corpus *P*, & vim *KL*; & differentia illa, propterea quod vis *KL* augetur quamproxime in ratione diſtantiæ *PT*, decreſcit in majore quam duplicata ratione diſtantiæ *PT*, ideoque (per corol. I. prop. XLV.) efficit ut aux progrediatur. In locis inter ſyzygias & quadraturas pendet motus augis ex cauſa utraque conjunctim, adeo ut pro hujus vel alterius exceſſu progrediatur ipſa vel regrediatur. Unde cum vis *KL* in ſyzygiis ſit quaſi duplo major quam vis *LM* in quadraturis, exceſſus erit penes vim *KL*, transferetque augem in conſequentia. Veritas autem hujus & præcedentis corollarii facilius intelligetur concipiendo ſyſtema corporum duorum *T*, *P* corporibus pluribus *S*, *S*, *S*, &c. in orbe *ESE* conſiſtentibus, undique cingi. Namque horum actionibus actio ipſius *T* minuetur undique, decreſcetque in ratione pluſquam duplicata diſtantiæ.

Corol.

DE MOTU CORPORUM

Corol. 8. Cum autem pendeat apſidum progreſſus vel regreſſus a decremento vis centripetæ facto in majori vel minori quam duplicata ratione diſtantiæ *TP*, in tranſitu corporis ab apſide ima ad apſidem ſummam; ut & a ſimili incremento in reditu ad apſidem imam; atque ideo maximus ſit ubi proportio vis in apſide ſumma ad vim in apſide ima maxime recedit a duplicata ratione diſtantiarum inverſa: manifeſtum eſt quod apſides in ſyzygiis ſuis, per vim ablatitiam *KL* ſeu *NM* — *LM*, progredientur velocius, inque quadraturis ſuis tardius recedent per vim addititiam *LM*. Ob diuturnitatem vero temporis, quo velocitas progreſſus vel tarditas regreſſus continuatur, fit hæc inæqualitas longe maxima.

Corol. 9. Si corpus aliquod, vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ a centro, revolveretur circa hoc centrum in ellipſi; & mox, in deſcenſu ab apſide ſumma ſeu auge ad apſidem imam, vis illa per acceſſum perpetuum vis novæ augeretur in ratione pluſquam duplicata diſtantiæ diminutæ: manifeſtum eſt quod corpus, perpetuo acceſſu vis illius novæ impulſum ſemper in centrum, magis vergeret in hoc centrum, quam ſi urgeretur vi ſola creſcente in duplicata ratione diſtantiæ diminutæ; ideoque orbem deſcriberet orbe elliptico interiorem, & in apſide ima propius accederet ad centrum quam prius. Orbis igitur, acceſſu hujus vis novæ, fiet magis excentricus. Si jam vis, in receſſu corporis ab apſide ima ad apſidem ſummam, decreſceret iiſdem gradibus quibus ante creverat, rediret corpus ad diſtantiam priorem, ideoque ſi vis decreſcat in majori ratione, corpus jam minus attractum aſcendet ad diſtantiam majorem & ſic orbis excentricitas adhuc magis augebitur. Quare ſi ratio incrementi & decrementi vis centripetæ ſingulis revolutionibus augeatur, augebitur ſemper excentricitas; & contra,



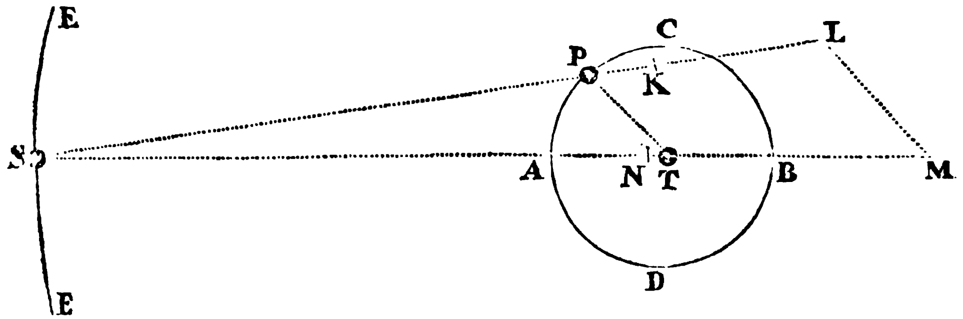
dimi-

diminuetur eadem, ſi ratio illa decreſcat. Jam vero in ſyſtemate corporum *T*, *P*, *S*, ubi apſides orbis *PAB* ſunt in quadraturis, ratio illa incrementi ac decrementi minima eſt, & maxima fit ubi apſides ſunt in ſyzygiis. Si apſides conſtituantur in quadraturis, ratio prope apſides minor eſt & prope ſyzygias major quam duplicata diſtantiarum, & ex ratione illa majori oritur augis motus directus, uti jam dictum eſt. At ſi conſideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progreſſu inter apſides, hæc minor eſt quam duplicata diſtantiarum. Vis in apſide ima eſt ad vim in apſide ſumma in minore quam duplicata ratione diſtantiæ apſidis ſummæ ab umbilico ellipſeos ad diſtantiam apſidis imæ ab eodem umbilico: & contra, ubi apſides conſtituuntur in ſyzygiis, vis in apſide ima eſt ad vim in apſide ſumma in majore quam duplicata ratione diſtantiarum. Nam vires *LM* in quadraturis additæ viribus corporis *T* componunt vires in ratione minore, & vires *KL* in ſyzygiis ſubductæ a viribus corporis *T* relinquunt vires in ratione majore. Eſt igitur ratio decrementi & incrementi totius, in tranſitu inter apſides, minima in quadraturis, maxima in ſyzygiis: & propterea in tranſitu apſidum a quadraturis ad ſyzygias perpetuo augetur, augetque excentricitatem ellipſeos; inque tranſitu a ſyzygiis ad quadraturas perpetuo diminuitur, & excentricitatem diminuit.

Corol. 10. Ut rationem ineamus errorum in latitudinem, fingamus planum orbis *EST* immobile manere; & ex errorum expoſita cauſa manifeſtum eſt, quod ex viribus *NM*, *ML*, quæ ſunt cauſa illa tota, vis *ML* agendo ſemper ſecundum planum orbis *PAB*, nunquam perturbat motus in latitudinem; quodque vis *NM*, ubi nodi ſunt in ſyzygiis, agendo etiam ſecundum idem orbis planum, non perturbat hos motus; ubi vero ſunt in quadraturis, eos maxime perturbat, corpuſque *P* de plano orbis ſui perpetuo trahendo, minuit inclinationem plani in tranſitu corporis a quadraturis ad ſyzygias, augetque viciſſim eandem in tranſitu a ſyzygiis ad quadraturas. Unde fit ut corpore in ſyzygiis exiſtente inclinatio evadat omnium minima, redeatque ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus ad nodum proximum accedit. At ſi nodi conſtituantur in octantibus poſt quadraturas, id eſt, inter *C* & *A*, *D* & *B*, intelligetur ex modo expoſitis, quod, in tranſitu corporis *P* a nodo alterutro ad gradum inde nonageſimum, inclinatio plani perpetuo minuitur; deinde in

tranſitu per proximos 45 gradus, uſque ad quadraturam proximam, inclinatio augetur, & poſtea denuo in tranſitu per alios 45 gradus, uſque ad nodum proximum, diminuitur. Magis itaque diminuitur inclinatio quam augetur, & propterea minor eſt ſemper in nodo ſubſequente quam in præcedente. Et ſimili ratiocinio, inclinatio magis augetur, quam diminuitur, ubi nodi ſunt in octantibus alteris inter *A* & *D*, *B* & *C*. Inclinatio igitur ubi nodi ſunt in ſyzygiis eſt omnium maxima. In tranſitu eorum a ſyzygiis ad quadraturas, in ſingulis corporis ad nodos appulſibus, diminuitur; fitque omnium minima, ubi nodi ſunt in quadraturis, & corpus in ſyzygiis: dein creſcit iiſdem gradibus, quibus antea decreverat; nodiſque ad ſyzygias proximas appulſis, ad magnitudinem primam revertitur.

Corol. 11. Quoniam corpus *P*, ubi nodi ſunt in quadraturis, perpetuo trahitur de plano orbis ſui, idque in partem verſus *S* in tranſitu ſuo a nodo *C* per conjunctionem *A* ad nodum *D*; & in con-



trariam partem in tranſitu a nodo *D* per oppoſitionem *B* ad nodum *C*: manifeſtum eſt, quod in motu ſuo a nodo *C* corpus perpetuo recedit ab orbis ſui plano primo *CD*, uſque dum perventum eſt ad nodum proximum; ideoque in hoc nodo, longiſſime diſtans a plano illo primo *CD*, tranſit per planum orbis *EST* non in plani illius nodo altero *D*, ſed in puncto quod inde vergit ad partes corporis *S*, quodque proinde novus eſt nodi locus in anteriora vergens. Et ſimili argumento pergent nodi recedere in tranſitu corporis de hoc nodo in nodum proximum. Nodi igitur in quadraturis conſtituti perpetuo recedunt; in ſyzygiis, ubi motus in latitudinem nil perturbatur, quieſcunt; in locis intermediis, conditionis utriuſque participes,

cipes, recedunt tardius: ideoque, ſemper vel retrogradi, vel ſtationarii ſingulis revolutionibus feruntur in antecedentia.

Corol. 12. Omnes illi in his corollariis deſcripti errores ſunt paulo majores in conjunctione corporum *P*, *S*, quam in eorum oppoſitione; idque ob majores vires generantes *NM* & *ML*.

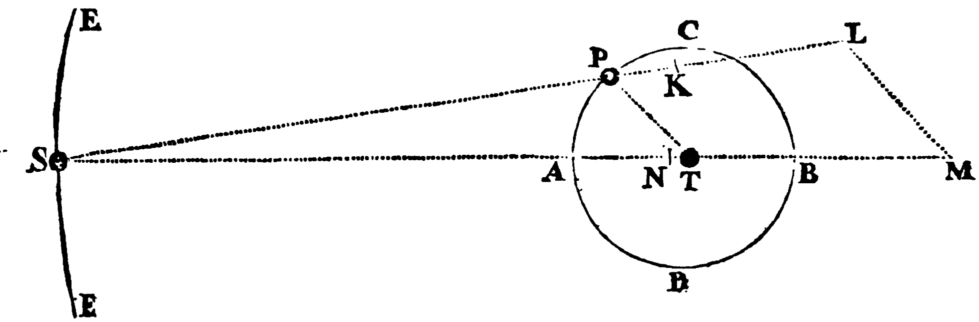
Corol. 13. Cumque rationes horum corollariorum non pendeant a magnitudine corporis *S*, obtinent præcedentia omnia, ubi corporis *S* tanta ſtatuitur magnitudo, ut circa ipſum revolvatur corporum duorum *T* & *P* ſyſtema. Et ex aucto corpore *S*, auctaque ideo ipſius vi centripeta, a qua errores corporis *P* oriuntur, evadent errores illi omnes, paribus diſtantiis, majores in hoc caſu quam in altero, ubi corpus *S* circum ſyſtema corporum *P* & *T* revolvitur.

Corol. 14. Cum autem vires *NM*, *ML*, ubi corpus *S* longinquum eſt, ſint quamproxime ut vis *SK* & ratio *PT* ad *ST* conjunctim, hoc eſt, ſi detur tum diſtantia *PT*, tum corporis *S* vis abſoluta, ut *ST cub.* reciproce; ſint autem vires illæ *NM*, *ML* cauſæ errorum & effectuum omnium, de quibus actum eſt in præcedentibus corollariis: manifeſtum eſt, quod effectus illi omnes, ſtante corporum *T* & *P* ſyſtemate, & mutatis tantum diſtantia *ST* & vi abſoluta corporis *S*, ſint quamproxime in ratione compoſita ex ratione directa vis abſolutæ corporis *S*, & ratione triplicata inverſa diſtantiæ *ST*. Unde ſi ſyſtema corporum *T* & *P* revolvatur circa corpus longinquum *S*; vires illæ *NM*, *ML*, & earum effectus erunt (per corol. 2. & 6. prop. IV.) reciproce in duplicata ratione temporis periodici. Et inde etiam, ſi magnitudo corporis *S* proportionalis ſit ipſius vi abſolutæ, erunt vires illæ *NM*, *ML*, & earum effectus directe ut cubus diametri apparentis longinqui corporis *S* e corpore *T* ſpectati, & vice verſa. Namque hæ rationes eædem ſunt, atque ratio ſuperior compoſita.

Corol. 15. Et quoniam ſi, manentibus orbium *ESE* & *PAB* forma, proportionibus & inclinatione ad invicem, mutetur eorum magnitudo, & ſi corporum *S* & *T* vel maneant, vel mutentur vires in data quavis ratione; hæ vires (hoc eſt, vis corporis *T*, qua corpus *P* de recto tramite in orbitam *PAB* deflectere, & vis corporis *S*, qua corpus idem *P* de orbita illa deviare cogitur) agunt ſemper eodem modo, & eadem proportione: neceſſe eſt ut ſimiles & proportionales ſint effectus omnes, & proportionalia effectuum tempora;

pora; hoc eſt, ut errores omnes lineares ſint ut orbium diametri, angulares vero iidem, qui prius, & errorum linearium ſimilium, vel angularium æqualium tempora ut orbium tempora periodica.

Corol. 16. Unde, ſi dentur orbium formæ & inclinatio ad invicem, & mutentur utcunque corporum magnitudines, vires & diſtantiæ; ex datis erroribus & errorum temporibus in uno caſu, colligi poſſunt errores & errorum tempora in alio quovis, quam proxime: ſed brevius hac methodo. Vires *NM*, *ML*, cæteris ſtantibus, ſunt ut radius *TP*, & harum effectus periodici (per corol. 2. lem. x.) ut vires, & quadratum temporis periodici corporis *P* conjunctim. Hi ſunt errores lineares corporis *P*; & hinc errores angulares e centro *T* ſpectati (id eſt, tam motus augis & nodorum, quam omnes in longitudinem & latitudinem errores apparentes) ſunt, in qualibet revolutione corporis *P*, ut quadratum temporis revolutionis quam proxime. Conjungantur hæ rationes cum rationibus corollarii xiv.



& in quolibet corporum *T*, *P*, *S* ſyſtemate, ubi *P* circum *T* ſibi propinquum, & *T* circum *S* longinquum revolvitur, errores angulares corporis *P*, de centro *T* apparentes, erunt, in ſingulis revolutionibus corporis illius *P*, ut quadratum temporis periodici corporis *P* directe & quadratum temporis periodici corporis *T* inverſe. Et inde motus medius augis erit in data ratione ad motum medium nodorum; & motus uterque erit ut tempus periodicum corporis *P* directe & quadratum temporis periodici corporis *T* inverſe. Augendo vel minuendo excentricitatem & inclinationem orbis *PAB* non mutantur motus augis & nodorum ſenſibiliter, niſi ubi eædem ſunt nimis magnæ.

Corol.

Corol. 17. Cum autem linea *LM* nunc major ſit nunc minor quam radius *PT*, exponatur vis mediocris *LM* per radium illum *PT*; & erit hæc ad vim mediocrem *SK* vel *SN* (quam exponere licet per *ST*) ut longitudo *PT* ad longitudinem *ST*. Eſt autem vis mediocris *SN* vel *ST*, qua corpus *T* retinetur in orbe ſuo circum *S*, ad vim, qua corpus *P* retinetur in orbe ſuo circum *T*, in ratione compoſita ex ratione radii *ST* ad radium *PT*, & ratione duplicata temporis periodici corporis *P* circum *T* ad tempus periodicum corporis *T* circum *S*. Et ex æquo, vis mediocris *LN* ad vim, qua corpus *P* retinetur in orbe ſuo circum *T* (quave corpus idem *P*, eodem tempore periodico, circum punctum quodvis immobile *T* ad diſtantiam *PT* revolvi poſſet) eſt in ratione illa duplicata periodicorum temporum. Datis igitur temporibus periodicis una cum diſtantia *PT*, datur vis mediocris *LM*; & ea data, datur etiam vis *MN* quamproxime per analogiam linearum *PT*, *MN*.

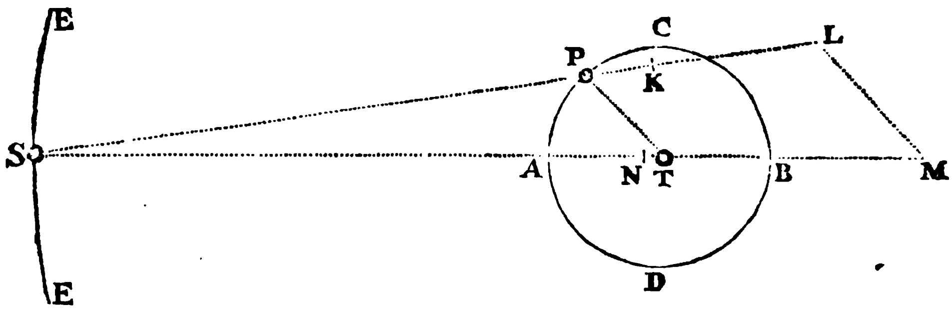
Corol. 18. Iiſdem legibus, quibus corpus *P* circum corpus *T* revolvitur, fingamus corpora plura fluida circum idem *T* ad æquales ab ipſo diſtantias moveri; deinde ex his contiguis factis conflari annulum fluidum, rotundum ac corpori *T* concentricum; & ſingulæ annuli partes, motus ſuos omnes ad legem corporis *P* peragendo, propius accedent ad corpus *T*, & celerius movebuntur in conjunctione & oppoſitione ipſarum & corporis *S*, quam in quadraturis. Et nodi annuli hujus, ſeu interſectiones ejus cum plano orbitæ corporis *S* vel *T*, quieſcent in ſyzygiis; extra ſyzygias vero movebuntur in antecedentia, & velociſſime quidem in quadraturis, tardius aliis in locis. Annuli quoque inclinatio variabitur, & axis ejus ſingulis revolutionibus oſcillabitur, completaque revolutione ad priſtinum ſitum redibit, niſi quatenus per præceſſionem nodorum circumfertur.

Corol. 19. Fingas jam globum corporis *T*, ex materia non fluida conſtantem, ampliari & extendi uſque ad hunc annulum, & alveo per circuitum excavato continere aquam, motuque eodem periodico circa axem ſuum uniformiter revolvi. Hic liquor per vices acceleratus & retardatus (ut in ſuperiore corollario) in ſyzygiis velocior erit, in quadraturis tardior quam ſuperficies globi, & ſic fluet in alveo refluetque ad modum maris. Aqua, revolvendo circa globi centrum quieſcens, ſi tollatur attractio corporis *S*, nullum acquiret

motum

motum fluxus & refluxus. Par eſt ratio globi uniformiter progredientis in directum, & interea revolventis circa centrum ſuum (per legum corol. v.) ut & globi de curſu rectilineo uniformiter tracti, (per legum corol. 6.) Accedat autem corpus *S*, & ab ipſius inæquabili attractione mox turbabitur aqua. Etenim major erit attractio aquæ propioris, minor ea remotioris. Vis autem *LM* trahet aquam deorſum in quadraturis, facietque ipſam deſcendere uſque ad ſyzygias; & vis *KL* trahet eandem ſurſum in ſyzygiis, ſiſtetque deſcenſum ejus, & faciet ipſam aſcendere uſque ad quadraturas: niſi quatenus motus fluendi & refluendi ab alveo aquæ dirigatur, & per frictionem aliquatenus retardetur.

Corol. 20. Si annulus jam rigeat, & minuatur globus, ceſſabit motus fluendi & refluendi; ſed oſcillatorius ille inclinationis motus & præceſſio nodorum manebunt. Habeat globus eundem axem cum annulo, gyroſque compleat iiſdem temporibus, & ſuperficie ſua contingat ipſum interius, eique inhæreat; & participando motum ejus,



compages utriuſque oſcillabitur, & nodi regredientur. Nam globus, ut mox dicetur, ad ſuſcipiendas impreſſiones omnes indifferens eſt. Annuli globo orbati maximus inclinationis angulus eſt, ubi nodi ſunt in ſyzygiis. Inde in progreſſu nodorum ad quadraturas conatur is inclinationem ſuam minuere, & iſto conatu motum imprimit globo toti. Retinet globus motum impreſſum, uſque dum annulus conatu contrario motum hunc tollat, imprimatque motum novum in contrariam partem: Atque hac ratione maximus decreſcentis inclinationis motus fit in quadraturis nodorum, & minimus inclinationis angulus in octantibus poſt quadraturas; dein maximus reclinationis motus in ſyzygiis, & maximus angulus in octantibus proximis. Et eadem

eadem eſt ratio globi annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior eſt paulo quam juxta polos, vel conſtat ex materia paulo denſiore. Supplet enim vicem annuli iſte materiæ in æquatoris regionibus exceſſus. Et quanquam, aucta utcunque globi hujus vi centripeta, tendere ſupponantur omnes ejus partes deorſum, ad modum gravitantium partium telluris, tamen phænomena hujus & præcedentis corollarii vix inde mutabuntur; niſi quod loca maximarum & minimarum altitudinum aquæ diverſa erunt. Aqua enim jam in orbe ſuo ſuſtinetur & permanet, non per vim ſuam centrifugam, ſed per alveum in quo fluit. Et præterea vis *LM* trahit aquam deorſum maxime in quadraturis, & vis *KL* ſeu *NM*—*LM* trahit eandem ſurſum maxime in ſyzygiis. Et hæ vires conjunctæ deſinunt trahere aquam deorſum & incipiunt trahere aquam ſurſum in octantibus ante ſyzygias, ac deſinunt trahere aquam ſurſum incipiuntque trahere aquam deorſum in octantibus poſt ſyzygias. Et inde maxima aquæ altitudo evenire poteſt in octantibus poſt ſyzygias, & minima in octantibus poſt quadraturas circiter; niſi quatenus motus aſcendendi vel deſcendendi ab his viribus impreſſus vel per vim inſitam aquæ paulo diutius perſeveret, vel per impedimenta alvei paulo citius ſiſtatur.

Corol. 21. Eadem ratione, qua materia globi juxta æquatorem redundans efficit ut nodi regrediantur, atque ideo per hujus incrementum augetur iſte regreſſus, per diminutionem vero diminuitur, & per ablationem tollitur; ſi materia pluſquam redundans tollatur, hoc eſt, ſi globus juxta æquatorem vel depreſſior reddatur, vel rarior quam juxta polos, orietur motus nodorum in conſequentia.

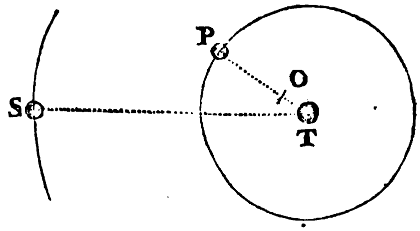
Corol. 22. Et inde viciſſim, ex motu nodorum innoteſcit conſtitutio globi. Nimirum ſi globus polos eoſdem conſtanter ſervat, & motus ſit in antecedentia, materia juxta æquatorem redundat; ſi in conſequentia, deficit. Pone globum uniformem & perfecte circinatum in ſpatiis liberis primo quieſcere; dein impetu quocunque oblique in ſuperficiem ſuam facto propelli, & motum inde concipere partim circularem, partim in directum. Quoniam globus iſte ad axes omnes per centrum ſuum tranſeuntes indifferenter ſe habet, neque propenſior eſt in unum axem, unumve axis ſitum, quam in alium quemvis; perſpicuum eſt, quod is axem ſuum, axiſque inclinationem vi propria nunquam mutabit. Impellatur jam globus oblique,

que, in eadem illa ſuperficiei parte, qua prius, impulſu quocunque novo; & cum citior vel ſerior impulſus effectum nil mutet, manifeſtum eſt, quod hi duo impulſus ſucceſſive impreſſi eundem producent motum, ac ſi ſimul impreſſi fuiſſent, hoc eſt, eundem, ac ſi globus vi ſimplici ex utroque (per legum corol. 2.) compoſita impulſus fuiſſet, atque ideo ſimplicem, circa axem inclinatione datum. Et par eſt ratio impulſus ſecundi facti in locum alium quemvis in æquatore motus primi; ut & impulſus primi facti in locum quemvis in æquatore motus, quem impulſus ſecundus ſine primo generaret; atque ideo impulſuum amborum factorum in loca quæcunque: generabunt hi eundem motum circularem ac ſi ſimul & ſemel in locum interſectionis æquatorum motuum illorum, quos ſeorſim generarent, fuiſſent impreſſi. Globus igitur homogeneus & perfectus non retinet motus plures diſtinctos, ſed impreſſos omnes componit & ad unum reducit, & quatenus in ſe eſt, gyratur ſemper motu ſimplici & uniformi circa axem unicum, inclinatione ſemper invariabili datum. Sed nec vis centripeta inclinationem axis, aut rotationis velocitatem mutare poteſt. Si globus plano quocunque, per centrum ſuum & centrum in quod vis dirigitur tranſeunte, dividi intelligatur in duo hemiſphæria; urgebit ſemper vis illa utrumque hemiſphærium æqualiter, & propterea globum, quoad motum rotationis, nullam in partem inclinabit. Addatur vero *alicubi inter* polum & æquatorem materia nova in formam montis cumulata, & hæc, perpetuo conatu recedendi a centro ſui motus, turbabit motum globi, facietque ut poli ejus errent per ipſius ſuperficiem, & circulos circum ſe punctumque ſibi oppoſitum perpetuo deſcribant. Neque corrigetur iſta vagationis enormitas, niſi locando montem illum vel in polo alterutro, quo in caſu (per corol. XXI.) nodi æquatoris progredientur; vel in æquatore, qua ratione (per corol. XX.) nodi regredientur; vel denique ex altera axis parte addendo materiam novam, qua mons inter movendum libretur, & hoc pacto nodi vel progredientur, vel recedent, perinde ut mons & hæcce nova materia ſunt vel polo vel æquatori propiores.

PROPO-

PROPOSITIO LXVII. THEOREMA XXVII.

Poſitis iiſdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, *circa interiorum* P, T *commune gravitatis centrum* O, *radiis ad centrum illud ductis, deſcribit areas temporibus magis proportionales & orbem ad formam ellipſeos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, quam circa corpus intimum & maximum* T, *radiis ad ipſum ductis, deſcribere poteſt.*



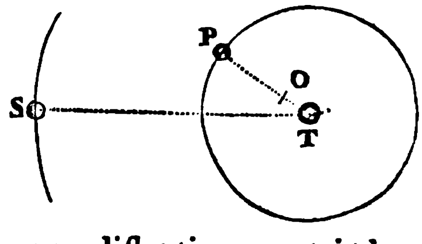
Nam corporis *S* attractiones verſus *T* & *P* componunt ipſius attractionem abſolutam, quæ magis dirigitur in corporum *T* & *P* commune gravitatis centrum *O*, quam in corpus maximum *T*, quæque quadrato diſtantiæ *SO* magis eſt proportionalis reciproce, quam quadrato diſtantiæ *ST*: ut rem perpendenti facile conſtabit.

PROPOSITIO LXVIII. THEOREMA XXVIII.

Poſitis iiſdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, *circa interiorum* P & T *commune gravitatis centrum* O, *radiis ad centrum illud ductis, deſcribit areas temporibus magis proportionales, & orbem ad formam ellipſeos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, ſi corpus intimum & maximum his attractionibus perinde atque cætera agitetur, quam ſi id vel non attractum quieſcat, vel multo magis aut multo minus attractum aut multo magis aut multo minus agitetur.*

Demonſtratur eodem fere modo cum prop. LXVI. ſed argumento prolixiore, quod ideo prætereo. Sufficeret rem ſic æſtimare. Ex demonſtratione propoſitionis noviſſimæ liquet centrum, in quod

corpus *S* conjunctis viribus urgetur, proximum eſſe communi centro gravitatis duorum illorum. Si coincideret hoc centrum cum centro illo communi, & quieſceret commune centrum gravitatis corporum trium; deſcriberent corpus *S* ex una parte, & commune centrum aliorum duorum ex altera parte, circa commune omnium centrum quieſcens, ellipſes accuratas. Liquet hoc per corollarium ſecundum propoſitionis LVIII. collatum cum demonſtratis in prop. LXIV. & LXV. Perturbatur iſte motus ellipticus aliquantulum per diſtantiam centri duorum a centro, in quod tertium *S* attrahitur. Detur præterea motus communi trium centro, & augebitur perturbatio. Proinde minima eſt perturbatio, ubi commune trium centrum quieſcit; hoc eſt, ubi corpus intimum & maximum *T* lege cæterorum attrahitur: fitque major ſemper, ubi trium commune illud centrum, minuendo motum corporis *T*, moveri incipit, & magis deinceps magiſque agitatur.



Corol. Et hinc, ſi corpora plura minora revolvantur circa maximum, colligere licet quod orbitæ deſcriptæ propius accedent ad ellipticas, & arearum deſcriptiones fient magis æquabiles, ſi corpora omnia viribus acceleratricibus, quæ ſunt ut eorum vires abſolutæ directe & quadrata diſtantiarum inverſe, ſe mutuo trahant agitentque, & orbitæ cujuſque umbilicus collocetur in communi centro gravitatis corporum omnium interiorum (nimirum umbilicus orbitæ primæ & intimæ in centro gravitatis corporis maximi & intimi; ille orbitæ ſecundæ, in communi centro gravitatis corporum duorum intimorum; iſte tertiæ, in communi centro gravitatis trium interiorum; & ſic deinceps) quam ſi corpus intimum quieſcat & ſtatuatur communis umbilicus orbitarum omnium.

PROPOSITIO LXIX. THEOREMA XXIX.

In ſyſtemate corporum plurium A, B, C, D, *&c. ſi corpus aliquod* A *trahit cætera omnia* B, C, D, *&c. viribus acceleratricibus quæ ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a tra-*

a trahente; & corpus aliud B *trahit etiam cætera* A, C, D, *&c. viribus quæ ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a trahente: erunt abſolutæ corporum trahentium* A, B *vires ad invicem, ut ſunt ipſa corpora* A, B, *quorum ſunt vires.* LIBER PRIMUS.

Nam attractiones acceleratrices corporum omnium *B*, *C*, *D* verſus *A*, paribus diſtantiis, ſibi invicem æquantur ex hypotheſi; & ſimiliter attractiones acceleratrices corporum omnium verſus *B*, paribus diſtantiis, ſibi invicem æquantur. Eſt autem abſoluta vis attractiva corporis *A* ad vim abſolutam attractivam corporis *B*, ut attractio acceleratrix corporum omnium verſus *A* ad attractionem acceleratricem corporum omnium verſus *B*, paribus diſtantiis; & ita eſt attractio acceleratrix corporis *B* verſus *A*, ad attractionem acceleratricem corporis *A* verſus *B*. Sed attractio acceleratrix corporis *B* verſus *A* eſt ad attractionem acceleratricem corporis *A* verſus *B*, ut maſſa corporis *A* ad maſſam corporis *B*; propterea quod vires motrices, quæ (per definitionem ſecundam, ſeptimam & octavam) ſunt ut vires acceleratrices & corpora attracta conjunctim, hic ſunt (per motus legem tertiam) ſibi invicem æquales. Ergo abſoluta vis attractiva corporis *A* eſt ad abſolutam vim attractivam corporis *B*, ut maſſa corporis *A* ad maſſam corporis *B*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi ſingula ſyſtematis corpora *A*, *B*, *C*, *D*, &c. ſeorſim ſpectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a trahente; erunt corporum illorum omnium vires abſolutæ ad invicem ut ſunt ipſa corpora.

Corol. 2. Eodem argumento, ſi ſingula ſyſtematis corpora *A*, *B*, *C*, *D*, &c. ſeorſim ſpectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ ſunt vel reciproce, vel directe in ratione dignitatis cujuſcunque diſtantiarum a trahente, quæve ſecundum legem quamcunque communem ex diſtantiis ab unoquoque trahente definiuntur; conſtat quod corporum illorum vires abſolutæ ſunt ut corpora.

Corol. 3. In ſyſtemate corporum, quorum vires decreſcunt in ratione duplicata diſtantiarum, ſi minora circa maximum in ellipſibus, umbilicum communem in maximi illius centro habentibus, quam fieri poteſt accuratiſſimis revolvantur; & radiis ad maximum illud

ductis deſcribant areas temporibus quam maxime proportionales: erunt corporum illorum vires abſolutæ ad invicem, aut accurate aut quamproxime, in ratione corporum; & contra. Patet per corol. prop. LXVIII. collatum cum hujus corol. 1.

Scholium.

His propoſitionibus manuducimur ad analogiam inter vires centripetas, & corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi ſolent. Rationi enim conſentaneum eſt, ut vires, quæ ad corpora diriguntur, pendeant ab eorundem natura & quantitate, ut fit in magneticis. Et quoties hujuſmodi caſus incidunt, æſtimandæ erunt corporum attractiones, aſſignando ſingulis eorum particulis vires proprias, & colligendo ſummas virium. Vocem attractionis hic generaliter uſurpo pro corporum conatu quocunque accedendi ad invicem: ſive conatus iſte fiat ab actione corporum, vel ſe mutuo petentium, vel per ſpiritus emiſſos ſe invicem agitantium; ſive is ab actione ætheris, aut aëris, mediive cujuſcunque ſeu corporei ſeu incorporei oriatur corpora innatantia in ſe invicem utcunque impellentis. Eodem ſenſu generali uſurpo vocem impulſus, non ſpecies virium & qualitates phyſicas, ſed quantitates & proportiones mathematicas in hoc tractatu expendens, ut in definitionibus explicui. In matheſi inveſtigandæ ſunt virium quantitates & rationes illæ, quæ ex conditionibus quibuſcunque poſitis conſequentur: deinde, ubi in phyſicam deſcenditur, conferendæ ſunt hæ rationes cum phænomenis; ut innoteſcat quænam virium conditiones ſingulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum demum de virium ſpeciebus, cauſis & rationibus phyſicis tutius diſputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora ſphærica, ex particulis modo jam expoſito attractivis conſtantia, debeant in ſe mutuo agere; & quales motus inde conſequantur.

SECTIO

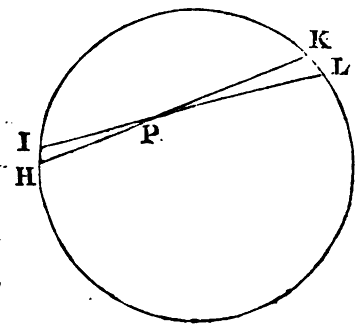
SECTIO XII.

De corporum ſphæricorum viribus attractivis.

PROPOSITIO LXX. THEOREMA XXX.

Si ad ſphæricæ ſuperficiei puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis: dico quod corpuſculum intra ſuperficiem conſtitutum his viribus nullam in partem attrahitur.

Sit *HIKL* ſuperficies illa ſphærica, & *P* corpuſculum intus conſtitutum. Per *P* agantur ad hanc ſuperficiem lineæ duæ *HK*, *IL*, arcus quam minimos *HI*, *KL* intercipientes; &, ob triangula *HPI*, *LPK* (per corol. 3. lem. VII.) ſimilia, arcus illi erunt diſtantiis *HP*, *LP* proportionales; & ſuperficiei ſphæricæ particulæ quævis ad *HI* & *KL*, rectis per punctum *P* tranſeuntibus undique terminatæ, erunt in duplicata illa ratione. Ergo vires harum particularum in corpus *P* exercitæ ſunt inter ſe æquales. Sunt enim ut particulæ directe, & quadrata diſtantiarum inverſe. Et hæ duæ rationes componunt rationem æqualitatis. Attractiones igitur, in contrarias partes æqualiter factæ, ſe mutuo deſtruunt. Et ſimili argumento, attractiones omnes per totam ſphæricam ſuperficiem a contrariis attractionibus deſtruuntur. Proinde corpus *P* nullam in partem his attractionibus impellitur. *Q. E. D.*

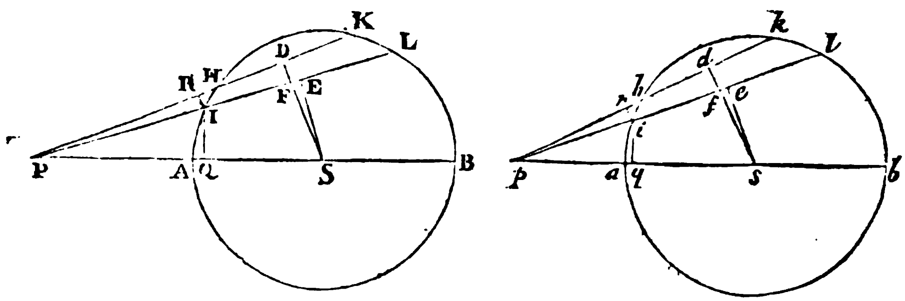


PROPOSITIO LXXI. THEOREMA XXXI.

Iiſdem poſitis, dico quod corpuſculum extra ſphæricam ſuperficiem conſtitutum attrahitur ad centrum ſphæræ, vi reci-

proce proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab eodem centro.

Sint *AHKB*, *a h k b* æquales duæ ſuperficies ſphæricæ, centris *S*, *s*, diametris *AB*, *ab* deſcriptæ, & *P*, *p* corpuſcula ſita extrinſecus in diametris illis productis. Agantur a corpuſculis lineæ *PHK*, *PIL*, *p h k*, *p i l*, auferentes a circulis maximis *AHB*, *ahb*, æquales arcus *HK*, *hk* & *IL*, *il*: Et ad eas demittantur perpendicula *SD*, *sd*; *SE*, *se*; *IR*, *ir*; quorum *SD*, *sd* ſecent *PL*, *pl* in *F* & *f*: Demittantur etiam ad diametros perpendicula *IQ*, *iq*. Evaneſcant anguli *DPE*, *dpe*: & ob æquales *DS* & *ds*, *ES* & *es*, lineæ *PE*, *PF* & *pe*, *pf* & lineola *DF*, *df* pro æqualibus habeantur; quippe quarum ratio ultima, angulis illis *DPE*, *dpe* ſimul



evaneſcentibus, eſt æqualitatis. His itaque conſtitutis, erit *PI* ad *PF* ut *RI* ad *DF*, & *pf* ad *pi* ut *df* vel *DF* ad *ri*; & ex æquo $PI \times pf$ ad $PF \times pi$ ut *RI* ad *ri*, hoc eſt (per corol. 3. lem. VII.) ut arcus *IH* ad arcum *ih*. Rurſus *PI* ad *PS* ut *IQ* ad *SE*, & *ps* ad *pi* ut *se* vel *SE* ad *iq*; & ex æquo $PI \times ps$ ad $PS \times pi$ ut *IQ* ad *iq*. Et conjunctis rationibus *PI quad.* $\times pf \times ps$ ad *pi quad.* $\times PF \times PS$, ut $IH \times IQ$ ad $ih \times iq$; hoc eſt, ut ſuperficies circularis, quam arcus *IH* convolutione ſemicirculi *AKB* circa diametrum *AB* deſcribet, ad ſuperficiem circularem, quam arcus *ih* convolutione ſemicirculi *akb* circa diametrum *ab* deſcribet. Et vires, quibus hæ ſuperficies ſecundum lineas ad ſe tendentes attrahunt corpuſcula *P* & *p*, ſunt (per hypotheſin) ut ipſæ ſuperficies directe, & quadrata diſtantiarum ſuperficierum a corporibus inverſe, hoc eſt, ut $pf \times ps$ ad $PF \times PS$. Suntque hæ vires ad ipſarum partes obliquas,

quas, quæ (facta per legum corol 2. reſolutione virium) ſecundum lineas *PS*, *ps* ad centra tendunt, ut *PI* ad *PQ*, & *pi* ad *pq*; id eſt (ob ſimilia triangula *PIQ* & *PSF*, *piq* & *psf*) ut *PS* ad *PF* & *ps* ad *pf*. Unde, ex æquo, fit attractio corpuſculi hujus *P* verſus *S* ad attractionem corpuſculi *p* verſus *s*, ut $\frac{PF \times pf \times ps}{PS}$ ad $\frac{pf \times PF \times PS}{ps}$, hoc eſt, ut *ps quad.* ad *PS quad.* Et ſimili argumento vires, quibus ſuperficies convolutione arcuum *KL*, *kl* deſcriptæ trahunt corpuſcula, erunt ut *ps quad.* ad *PS quad.* inque eadem ratione erunt vires ſuperficierum omnium circularium in quas utraque ſuperficies ſphærica, capiendo ſemper *sd* æqualem *SD* & *se* æqualem *SE*, diſtingui poteſt. Et, per compoſitionem, vires totarum ſuperficierum ſphæricarum in corpuſcula exercitæ erunt in eadem ratione. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXII. THEOREMA XXXII.

Si ad ſphæræ cujuſvis puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis; ac detur tum ſphæræ denſitas, tum ratio diametri ſphæræ ad diſtantiam corpuſculi a centro ejus: dico quod vis, qua corpuſculum attrahitur, proportionalis erit ſemidiametro ſphæræ.

Nam concipe corpuſcula duo ſeorſim a ſphæris duabus attrahi, unum ab una & alterum ab altera, & diſtantias eorum a ſphærarum centris proportionales eſſe diametris ſphærarum reſpective, ſphæras autem reſolvi in particulas ſimiles & ſimiliter poſitas ad corpuſcula. Et attractiones corpuſculi unius, factæ verſus ſingulas particulas ſphæræ unius, erunt ad attractiones alterius verſus analogas totidem particulas ſphæræ alterius, in ratione compoſita ex ratione particularum directe & ratione duplicata diſtantiarum inverſe. Sed particulæ ſunt ut ſphæræ, hoc eſt, in ratione triplicata diametrorum, & diſtantiæ ſunt ut diametri; & ratio prior directe una cum ratione poſteriore bis inverſe eſt ratio diametri ad diametrum. *Q. E. D.*

Corol.

De Motu Corporum

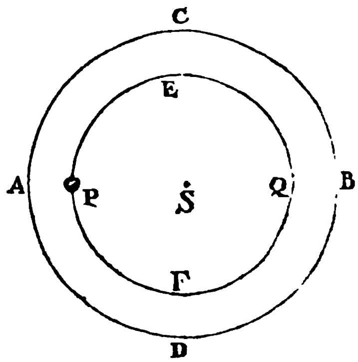
Corol. 1. Hinc ſi corpuſcula in circulis, circa ſphæras ex materia æqualiter attractiva conſtantes, revolvantur; ſintque diſtantiæ a centris ſphærarum proportionales earundem diametris: Tempora periodica erunt æqualia.

Corol. 2. Et vice verſa, ſi tempora periodica ſunt æqualia; diſtantiæ erunt proportionales diametris. Conſtant hæc duo per corol. 3. prop. IV.

Corol. 3. Si ad ſolidorum duorum quorumvis, ſimilium & æqualiter denſorum, puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ, decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis; vires, quibus corpuſcula, ad ſolida illa duo ſimiliter ſita, attrahentur ab iiſdem, erunt ad invicem ut diametri ſolidorum.

PROPOSITIO LXXIII. THEOREMA XXXIII.

Si ad ſphæræ alicujus datæ puncta ſingula tendant æquales vires centripetæ decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis: dico quod corpuſculum intra ſphæram conſtitutum attrahitur vi proportionali diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.



In ſphæra *ABCD*, centro *S* deſcripta, locetur corpuſculum *P*; & centro eodem *S*, intervallo *SP*, concipe ſphæram interiorem *PEQF* deſcribi. Manifeſtum eſt, (per prop. LXX.) quod ſphæricæ ſuperficies concentricæ, ex quibus ſphærarum differentia *AEBF* componitur, attractionibus ſuis per attractiones contrarias deſtructis, nil agunt in corpus *P*. Reſtat ſola attractio ſphæræ interioris *PEQF*. Et (per prop. LXXII.) hæc eſt ut diſtantia *PS*. *Q. E. D.*

Scholium.

Superficies, ex quibus ſolida componuntur, hic non ſunt pure mathematicæ, ſed orbes adeo tenues, ut eorum craſſitudo inſtar nihili

nihili ſit; nimirum orbes evaneſcentes, ex quibus ſphæra ultimo conſtat, ubi orbium illorum numerus augetur & craſſitudo minuitur in infinitum. Similiter per puncta, ex quibus lineæ, ſuperficies, & ſolida componi dicuntur, intelligendæ ſunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ. LIBER PRIMUS.

PROPOSITIO LXXIV. THEOREMA XXXIV.

Iiſdem poſitis, dico quod corpuſculum extra ſphæram conſtitutum attrahitur vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.

Nam diſtinguatur ſphæra in ſuperficies ſphæricas innumeras concentricas, & attractiones corpuſculi a ſingulis ſuperficiebus oriundæ erunt reciproce proportionales quadrato diſtantiæ corpuſculi a centro (per prop. LXXI.) Et componendo fiet ſumma attractionum, hoc eſt attractio corpuſculi in ſphæram totam, in eadem ratione. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc in æqualibus diſtantiis a centris homogenearum ſphærarum attractiones ſunt ut ſphæræ. Nam (per prop. LXXII.) ſi diſtantiæ ſunt proportionales diametris ſphærarum, vires erunt ut diametri. Minuatur diſtantia major in illa ratione; &, diſtantiis jam factis æqualibus, augebitur attractio in duplicata illa ratione; ideoque erit ad attractionem alteram in triplicata illa ratione, hoc eſt, in ratione ſphærarum.

Corol. 2. In diſtantiis quibuſvis attractiones ſunt ut ſphæræ applicatæ ad quadrata diſtantiarum.

Corol. 3. Si corpuſculum, extra ſphæram homogeneam poſitum, trahitur vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro, conſtet autem ſphæra ex particulis attractivis; decreſcet vis particulæ cujuſque in duplicata ratione diſtantiæ a particula.

PROPOSITIO LXXV. THEOREMA XXXV.

Si ad ſphæræ datæ puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ, decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a

punctis; dico quod ſphæra quævis alia ſimilaris ab eadem attrahitur vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ centrorum.

Nam particulæ cujuſvis attractio eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ ſuæ a centro ſphæræ trahentis, (per prop. LXXIV.) & propterea eadem eſt, ac ſi vis tota attrahens manaret de corpuſculo unico ſito in centro hujus ſphæræ. Hæc autem attractio tanta eſt, quanta foret viciſſim attractio corpuſculi ejuſdem, ſi modo illud a ſingulis ſphæræ attractæ particulis eadem vi traheretur, qua ipſas attrahit. Foret autem illa corpuſculi attractio (per prop. LXXIV.) reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ ſuæ a centro ſphæræ; ideoque huic æqualis attractio ſphæræ eſt in eadem ratione. *Q. E. D.*

Corol. 1. Attractiones ſphærarum, verſus alias ſphæras homogeneas, ſunt ut ſphæræ trahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum centrorum ſuorum a centris earum, quas attrahunt.

Corol. 2. Idem valet, ubi ſphæra attracta etiam attrahit. Namque hujus puncta ſingula trahent ſingula alterius eadem vi, qua ab ipſis viciſſim trahuntur; ideoque cum in omni attractione urgeatur (per legem 3.) tam punctum attrahens, quam punctum attractum, geminabitur vis attractionis mutuæ, conſervatis proportionibus.

Corol. 3. Eadem omnia, quæ ſuperius de motu corporum circa umbilicum conicarum ſectionum demonſtrata ſunt, obtinent, ubi ſphæra attrahens locatur in umbilico, & corpora moventur extra ſphæram.

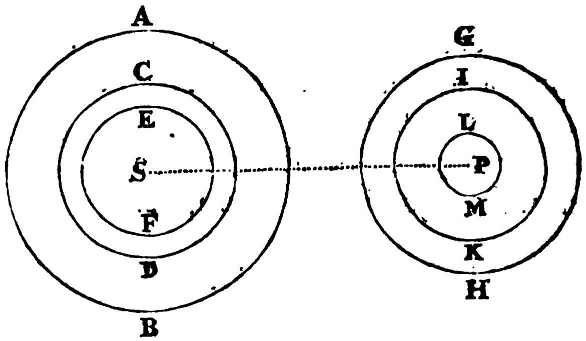
Corol. 4. Ea vero, quæ de motu corporum circa centrum conicarum ſectionum demonſtrantur, obtinent ubi motus peraguntur intra ſphæram.

PROPOSITIO LXXVI. THEOREMA XXXVI.

Si ſphæræ in progreſſu a centro ad circumferentiam (quoad materiæ denſitatem & vim attractivam) utcunque diſſimilares, in progreſſu vero per circuitum ad datam omnem a centro diſtantiam ſunt undique ſimilares; & vis attractiva puncti cujuſque decreſcit in duplicata ratione diſtantiæ corporis

poris attracti: dico quod vis tota, qua hujuſmodi ſphæra una attrahit aliam, ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ centrorum.

Sunto ſphæræ quotcunque concentricæ ſimilares *AB*, *CD*, *EF*, &c. quarum interiores additæ exterioribus componant materiam denſiorem verſus centrum, vel ſubductæ relinquant tenuiorem; & hæ (per prop. LXXV.) trahent ſphæras alias quotcunque concentricas ſimilares *GH*, *IK*, *LM*, &c. ſingulæ ſingulas, viribus reciproce proportionalibus quadrato diſtantiæ *SP*. Et componendo vel dividendo, ſumma virium illarum omnium, vel exceſſus aliquarum ſupra alias; hoc eſt, vis, qua ſphæra tota, ex concentricis quibuſcunque vel concentricarum differentiis compoſita *AB*, trahit totam ex concentricis quibuſcunque vel concentricarum differentiis compoſitam *GH*; erit in eadem ratione. Augeatur numerus ſphærarum concentricarum in infinitum ſic, ut materiæ denſitas una cum vi attractiva, in progreſſu a circumferentia ad centrum, ſecundum legem quamcunque creſcat vel decreſcat; &, addita materia non attractiva, compleatur ubivis denſitas deficiens, eo ut ſphæræ acquirant formam quamvis optatam; & vis, qua harum una attrahet alteram, erit etiamnum, per argumentum ſuperius, in eadem illa diſtantiæ quadratæ ratione inverſa. *Q. E. D.*



Corol. 1. Hinc ſi ejuſmodi ſphæræ complures, ſibi invicem per omnia ſimiles, ſe mutuo trahant; attractiones acceleratrices ſingularum in ſingulas erunt, in æqualibus quibuſvis centrorum diſtantiis, ut ſphæræ attrahentes.

Corol. 2. Inque diſtantiis quibuſvis inæqualibus, ut ſphæræ attrahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum inter centra.

Corol. 3. Attractiones vero motrices, ſeu pondera ſphærarum in ſphæras erunt, in æqualibus centrorum diſtantiis, ut ſphæræ attrahentes

hentes

De Motu Corporum

hentes & attractæ conjunctim, id eſt, ut contenta ſub ſphæris per multiplicationem producta.

Corol. 4. Inque diſtantiis inæqualibus, ut contenta illa directe & quadrata diſtantiarum inter centra inverſe.

Corol. 5. Eadem valent, ubi attractio oritur a ſphæræ utriuſque virtute attractiva mutuo exercita in ſphæram alteram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportione ſervata.

Corol. 6. Si hujuſmodi ſphæræ aliquæ circa alias quieſcentes revolvantur, ſingulæ circa ſingulas; ſintque diſtantiæ inter centra revolventium & quieſcentium proportionales quieſcentium diametris; æqualia erunt tempora periodica.

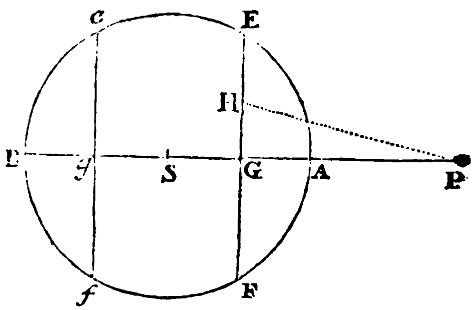
Corol. 7. Et viciſſim, ſi tempora periodica ſunt æqualia; diſtantiæ erunt proportionales diametris.

Corol. 8. Eadem omnia, quæ ſuperius de motu corporum circa umbilicos conicarum ſectionum demonſtrata ſunt, obtinent; ubi ſphæra attrahens, formæ & conditionis cujuſvis jam deſcriptæ, locatur in umbilico.

Corol. 9. Ut & ubi gyrantia ſunt etiam ſphæræ attrahentes, conditionis cujuſvis jam deſcriptæ.

PROPOSITIO LXXVII. THEOREMA XXXVII.

Si ad ſingula ſphærarum puncta tendant vires centripetæ proportionales diſtantiis punctorum a corporibus attractis: dico quod vis compoſita, qua ſphæræ duæ ſe mutuo trahent, eſt ut diſtantia inter centra ſphærarum.



Caſ. 1. Sit *AEBF* ſphæra; *S* centrum ejus; *P* corpuſculum attractum, *PASB* axis ſphæræ per centrum corpuſculi tranſiens; *EF*, *ef* plana duo, quibus ſphæra ſecatur, huic axi perpendicularia, & hinc inde æqualiter diſtantia a centro ſphæræ; *G*, *g* interſectiones planorum & axis; & *H* punctum quodvis in plano *EF*. Puncti *H* vis centripeta in corpuſculum *P*, ſecundum lineam *PH* exercita, eſt

eſt ut diſtantia *PH*; & (per legum corol. 2.) ſecundum lineam *PG*, ſeu verſus centrum *S*, ut longitudo *PG*. Igitur punctorum omnium in plano *EF*, hoc eſt plani totius vis, qua corpuſculum *P* trahitur verſus centrum *S*, eſt ut diſtantia *PG* multiplicata per numerum punctorum, id eſt, ut ſolidum quod continetur ſub plano ipſo *EF* & diſtantia illa *PG*. Et ſimiliter vis plani *ef*, qua corpuſculum *P* trahitur verſus centrum *S*, eſt ut planum illud ductum in diſtantiam ſuam *Pg*, ſive ut huic æquale planum *EF* ductum in diſtantiam illam *Pg*; & ſumma virium plani utriuſque ut planum *EF* ductum in ſummam diſtantiarum *PG*+*Pg*, id eſt, ut planum illud ductum in duplam centri & corpuſculi diſtantiam *PS*, hoc eſt, ut duplum planum *EF* ductum in diſtantiam *PS*, vel ut ſumma æqualium planorum *EF*+*ef* ducta in diſtantiam eandem. Et ſimili argumento, vires omnium planorum in ſphæra tota, hinc inde æqualiter a centro ſphæræ diſtantium, ſunt ut ſumma planorum ducta in diſtantiam *PS*, hoc eſt, ut ſphæra tota & ut diſtantia *PS* conjunctim. *Q. E. D.* LIBER PRIMUS.

Caſ. 2. Trahat jam corpuſculum *P* ſphæram *AEBF*. Et eodem argumento probabitur quod vis, qua ſphæra illa trahitur, erit ut diſtantia *PS*. *Q. E. D.*

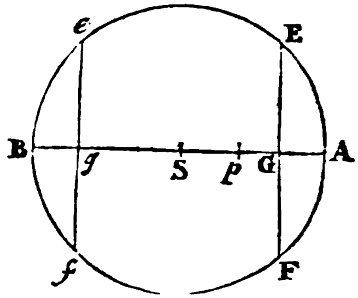
Caſ. 3. Componatur jam ſphæra altera ex corpuſculis innumeris *P*; & quoniam vis, qua corpuſculum unumquodque trahitur, eſt ut diſtantia corpuſculi a centro ſphæræ primæ & ut ſphæra eadem conjunctim, atque ideo eadem eſt, ac ſi prodiret tota de corpuſculo unico in centro ſphæræ; vis tota, qua corpuſcula omnia in ſphæra ſecunda trahuntur, hoc eſt, qua ſphæra illa tota trahitur, eadem erit, ac ſi ſphæra illa traheretur vi prodeunte de corpuſculo unico in centro ſphæræ primæ, & propterea proportionalis eſt diſtantiæ inter centra ſphærarum. *Q. E. D.*

Caſ. 4. Trahant ſphæræ ſe mutuo, & vis geminata proportionem priorem ſervabit. *Q. E. D.*

Caſ. 5. Locetur jam corpuſculum *p* intra ſphæram *AEBF*; & quoniam vis plani *ef* in corpuſculum eſt ut ſolidum contentum ſub plano illo & diſtantia *pg*; & vis contraria plani *EF* ut ſolidum contentum ſub plano illo & diſtantia *pG*; erit vis ex utraque compoſita ut differentia ſolidorum, hoc eſt, ut ſumma æqualium planorum ducta in ſemiſſem differentiæ diſtantiarum, id eſt,

ut

ut ſumma illa ducta in $p\,S$ diſtantiam corpuſculi a centro ſphæræ. Et ſimili argumento, attractio planorum omnium $E\,F$, $e\,f$ in ſphæra tota, hoc eſt, attractio ſphæræ totius, eſt conjunctim ut ſumma planorum omnium, ſeu ſphæra tota, & ut $p\,S$ diſtantia corpuſculi a centro ſphæræ. *Q. E. D.*



Caſ. 6. Et ſi ex corpuſculis innumeris p componatur ſphæra nova, intra ſphæram priorem $A\,E\,B\,F$ ſita; probabitur ut prius quod attractio, ſive ſimplex ſphæræ unius in alteram, ſive mutua utriuſque in ſe invicem, erit ut diſtantia centrorum $p\,S$. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXVIII. THEOREMA XXXVIII.

Si ſphæræ in progreſſu a centro ad circumferentiam ſint utcunque diſſimilares & inæquabiles in progreſſu vero per circuitum ad datam omnem a centro diſtantiam ſint undique ſimilares; & vis attractiva puncti cujuſque ſit ut diſtantia corporis attracti: dico quod vis tota qua hujuſmodi ſphæræ duæ ſe mutuo trahunt ſit proportionalis diſtantiæ inter centra ſphærarum.

Demonſtratur ex propoſitione præcedente eodem modo, quo propoſitio LXXVI. ex propoſitione LXXV. demonſtrata fuit.

Corol. Quæ ſuperius in propoſitionibus X. & LXIV. de motu corporum circa centra conicarum ſectionum demonſtrata ſunt, valent ubi attractiones omnes fiunt vi corporum ſphæricorum conditionis jam deſcriptæ, & attracta corpora ſunt ſphæræ conditionis ejuſdem.

Scholium.

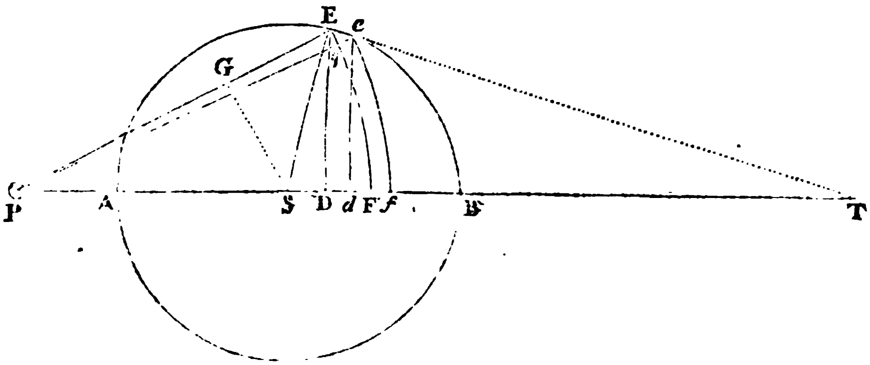
Attractionum caſus duos inſigniores jam dedi expoſitos; nimirum ubi vires centripetæ decreſcunt in duplicata diſtantiarum ratione, vel creſcunt in diſtantiarum ratione ſimplici; efficientes in utroque caſu ut corpora gyrentur in conicis ſectionibus, & componentes corporum ſphæricorum vires centripetas eadem lege, in receſſu

receſſu a centro, decreſcentes vel creſcentes cum ſeipſis: Quod eſt notatu dignum. Caſus cæteros, qui concluſiones minus elegantes exhibent, ſigillatim percurrere longum eſſet. Malim cunctos methodo generali ſimul comprehendere ac determinare, ut ſequitur.

LEMMA XXIX.

Si deſcribantur centro S *circulus quilibet* AEB, & *centro* P *circuli duo* EF, ef, *ſecantes priorem in* E, e, *lineamque* PS *in* F, f; & *ad* PS *demittantur perpendicula* ED, ed: *dico quod, ſi diſtantia arcuum* EF, ef *in infinitum minui intelligatur, ratio ultima lineæ evaneſcentis* Dd *ad lineam evaneſcentem* Ff *ea ſit, quæ lineæ* PE *ad lineam* PS.

Nam ſi linea *Pe* ſecet arcum *EF* in *q*; & recta *Ee*, quæ cum arcu evaneſcente *Ee* coincidit, producta occurrat rectæ *PS* in *T*; & ab *S* demittatur in *PE* normalis *SG*: ob ſimilia triangula *DTE*, *dTe*, *DES*; erit *Dd* ad *Ee*, ut *DT* ad *TE*, ſeu *DE* ad *ES*;



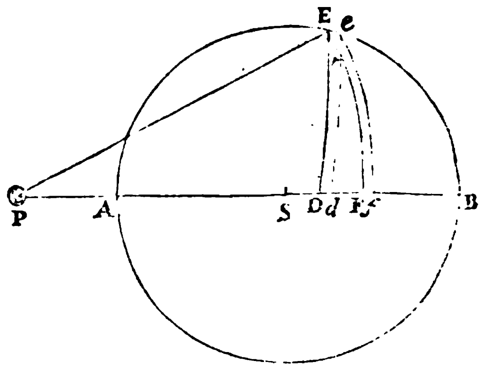
& ob triangula *Eeq*, *ESG* (per lem. VIII. & corol 3. lem. VII.) ſimilia, erit *Ee* ad *eq* ſeu *Ff* ut *ES* ad *SG*; & ex æquo, *Dd* ad *Ff* ut *DE* ad *SG*; hoc eſt (ob ſimilia triangula *PDE*, *PGS*) ut *PE* ad *PS*. Q. E. D.

PROPO-

PROPOSITIO LXXIX. THEOREMA XXXIX.

Si ſuperficies ob latitudinem infinite diminutam jamjam evaneſcens E F f e, *convolutione ſui circa axem* P S, *deſcribat ſolidum ſphæricum concavo-convexum, ad cujus particulas ſingulas æquales tendant æquales vires centripetæ: dico quod vis, qua ſolidum illud trahit corpuſculum ſitum in* P, *eſt in ratione compoſita ex ratione ſolidi* $DEq \times Ff$, *& ratione vis qua particula data in loco* F f *traheret idem corpuſculum.*

Nam ſi primo conſideremus vim ſuperficiei ſphæricæ *FE*, quæ convolutione arcus *FE* generatur, & a linea *de* ubivis ſecatur in *r*; erit ſuperficiei pars annularis, convolutione arcus *rE* genita, ut lineola *Dd*, manente ſphæræ radio *PE* (uti demonſtravit *Archimedes* in lib. de *Sphæra* & *Cylindro*.) Et hujus vis, ſecundum lineas *PE* vel *Pr* undique in ſuperficie conica ſitas exercita, ut hæc ipſa ſuperficiei pars annularis; hoc eſt, ut lineola *Dd*, vel, quod perinde eſt, ut rectangulum ſub dato ſphæræ radio *PE* & lineola illa *Dd*: at ſecundum lineam *PS* ad centrum *S* tendentem minor in ratione *PD* ad *PE*, ideoque ut $PD \times Dd$. Dividi jam intelligatur linea *DF* in particulas innumeras æquales, quæ ſingulæ nominentur *Dd*; & ſuperficies *FE* dividetur in totidem æquales annulos, quorum vires erunt ut ſumma omnium $PD \times Dd$, hoc eſt, ut $\frac{1}{2}PFq - \frac{1}{2}PDq$, ideoque ut *DE quad.* Ducatur jam ſuperficies *FE* in altitudinem *Ff*; & fiet ſolidi *EFfe* vis exercita in corpuſculum *P* ut $DEq \times Ff$: puta ſi detur vis quam particula aliqua data *Ff* in diſtantia *PF* exercet in corpuſculum *P*. At ſi vis illa non detur, fiet vis ſolidi *EFfe* ut ſolidum $DEq \times Ff$ & vis illa non data conjunctim. *Q. E. D.*

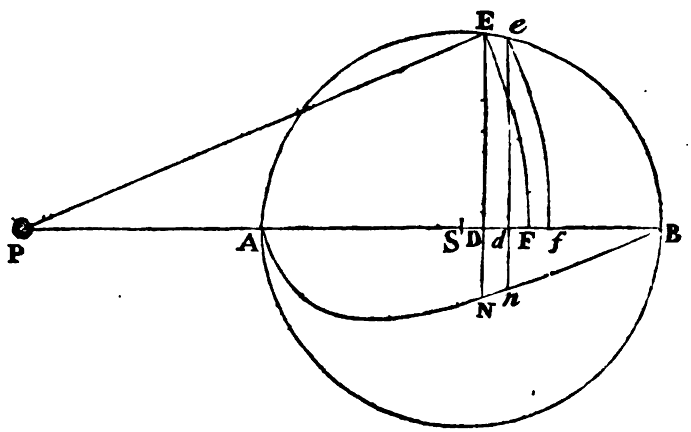


PROPO-

PROPOSITIO LXXX. THEOREMA XL.

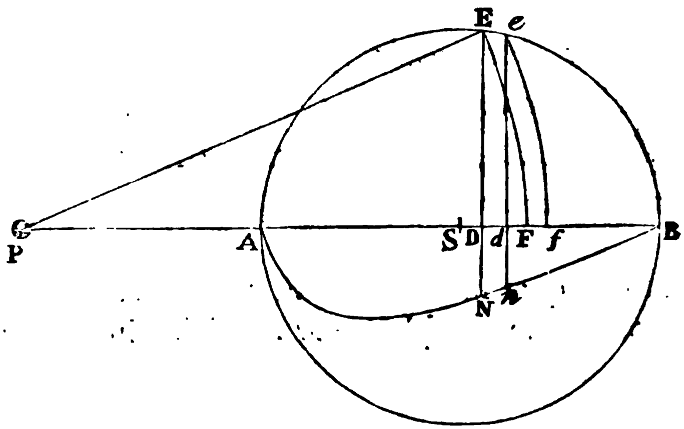
Si ad ſphæræ alicujus ABE, *centro* S *deſcriptæ, particulas ſingulas æquales tendant æquales vires centripetæ, & ad ſphæræ axem* AB, *in quo corpuſculum aliquod* P *locatur, erigantur de punctis ſingulis* D *perpendicula* DE, *ſphæræ occurrentia in* E, *& in ipſis capiantur longitudines* DN, *quæ ſint ut quantitas* $\frac{DEq \times PS}{PE}$ *& vis, quam ſphæræ particula ſita in axe ad diſtantiam* PE *exercet in corpuſculum* P, *conjunctim: dico quod vis tota, qua corpuſculum* P *trahitur verſus ſphæram, eſt ut area* ANB *comprehenſa ſub axe ſphæræ* AB, *& linea curva* ANB, *quam punctum* N *perpetuo tangit.*

Etenim ſtantibus quæ in lemmate & theoremate noviſſimo conſtructa ſunt, concipe axem ſphæræ *AB* dividi in particulas innu-



meras æquales *Dd*, & ſphæram totam dividi in totidem laminas ſphæricas concavo-convexas *EFfe*; & erigatur perpendiculum *dn*. Per theorema ſuperius vis, qua lamina *EFfe* trahit corpuſculum *P*, eſt ut $\frac{DEq \times Ff}{Dd}$ & vis particulæ unius ad diſtantiam *PE* vel *PF* exercita

exercita conjunctim. Eſt autem (per lemma noviſſimum) Dd ad Ff ut PE ad PS, & inde Ff æqualis $\frac{PS \times Dd}{PE}$; & $DEq \times Ff$ æquale Dd in $\frac{DEq \times PS}{PE}$, & propterea vis laminæ $EFfe$ eſt ut Dd in $\frac{DEq \times PS}{PE}$ & vis particulæ ad diſtantiam PF exercita conjunctim, hoc eſt (ex hypotheſi) ut $DN \times Dd$, ſeu area evaneſcens $DNnd$. Sunt igitur laminarum omnium vires, in corpus P exercitæ, ut areæ omnes $DNnd$, hoc eſt, ſphæræ vis tota ut area tota ANB. Q. E. D.



Corol. 1. Hinc ſi vis centripeta, ad particulas ſingulas tendens, eadem ſemper maneat in omnibus diſtantiis, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PE}$; erit vis tota, qua corpuſculum a ſphæra attrahitur, ut area ANB.

Corol. 2. Si particularum vis centripeta ſit reciproce ut diſtantia corpuſculi a ſe attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PEq}$; erit vis, qua corpuſculum P a ſphæra tota attrahitur, ut area ANB.

Corol. 3. Si particularum vis centripeta ſit reciproce ut cubus diſtantiæ corpuſculi a ſe attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PEqq}$; erit vis, qua corpuſculum a tota ſphæra attrahitur, ut area ANB.

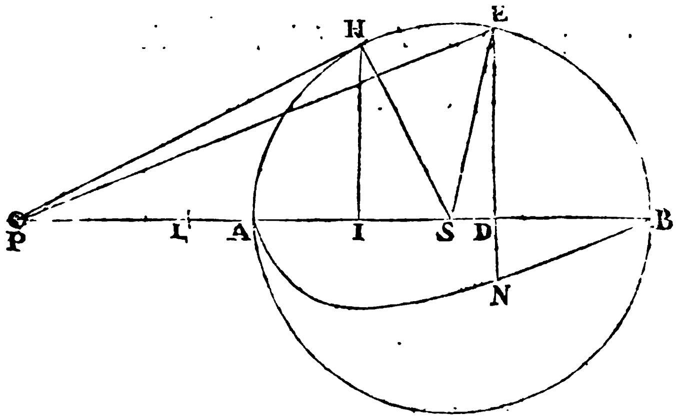
Corol.

Corol. 4. Et univerſaliter ſi vis centripeta ad ſingulas ſphæræ particulas tendens ponatur eſſe reciproce ut quantitas V, fiat autem DN ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$; erit vis, qua corpuſculum a ſphæra tota attrahitur, ut area ANB.

PROPOSITIO LXXXI. PROBLEMA XLI.

Stantibus jam poſitis, menſuranda eſt area ANB.

A puncto P ducatur recta PH ſphæram tangens in H, & ad axem PAB demiſſa normali HI, biſecetur PI in L; & erit (per prop. XII. lib. 2. elem.) PEq æquale $PSq + SEq + 2PSD$. Eſt autem SEq ſeu SHq (ob ſimilitudinem triangulorum SPH, SHI) æquale rectangulo PSI. Ergo PEq æquale eſt contento ſub PS & $PS + SI + 2SD$, hoc eſt, ſub PS & $2LS + 2SD$, id eſt, ſub PS & $2LD$. Porro DE *quad.* æquale eſt $SEq - SDq$, ſeu $SEq -$

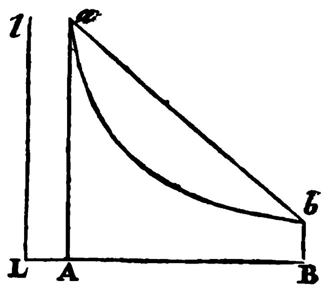


$LSq + 2SLD - LDq$, id eſt, $2SLD - LDq - ALB$. Nam $LSq - SEq$ ſeu $LSq - SAq$ (per prop. VI. lib. 2. elem.) æquatur rectangulo ALB. Scribatur itaque $2SLD - LDq - ALB$ pro DEq; & quantitas $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$, quæ ſecundum corollarium quartum propoſitionis præcedentis eſt ut longitudo ordinatim applicatæ DN, reſolvet ſeſe in tres partes $\frac{2SLD \times PS}{PE \times V} -$

 LDq

$\frac{LDq \times PS}{PE \times V} - \frac{ALB \times PS}{PE \times V}$: ubi ſi pro V ſcribatur ratio inverſa vis centripetæ, & pro PE medium proportionale inter PS & $2LD$; tres illæ partes evadent ordinatim applicatæ linearum totidem curvarum, quarum areæ per methodos vulgatas innoteſcunt. *Q. E. F.*

Exempl. 1. Si vis centripeta ad ſingulas ſphæræ particulas tendens ſit reciproce ut diſtantia; pro V ſcribe diſtantiam PE; dein $2PS \times LD$ pro PEq, & fiet DN ut $SL - \frac{1}{2}LD - \frac{ALB}{2LD}$. Pone DN æqualem ejus duplo $2SL - LD - \frac{ALB}{LD}$: & ordinatæ pars data $2SL$ ducta in longitudinem AB deſcribet aream rectangulam $2SL \times AB$; & pars indefinita LD ducta normaliter in eandem longitudinem per motum continuum, ea lege ut inter movendum creſcendo vel decreſcendo æquetur ſemper longitudini LD, deſcribet aream $\frac{LBq - LAq}{2}$, id eſt, aream $SL \times AB$; quæ ſubducta de area priore $2SL \times AB$ relinquit aream $SL \times AB$. Pars autem tertia $\frac{ALB}{LD}$, ducta itidem per motum localem normaliter in eandem longitudinem, deſcribet aream hyperbolicam; quæ ſubducta de area $SL \times AB$ relinquet aream quæſitam ANB. Unde talis emergit problematis conſtructio. Ad puncta L, A, B erige perpendicula Ll, Aa, Bb, quorum Aa ipſi LB, & Bb ipſi LA æquetur. Aſymptotis Ll, LB, per puncta a b deſcribatur hyperbola ab. Et acta chorda ba claudet aream aba areæ quæſitæ ANB æqualem.

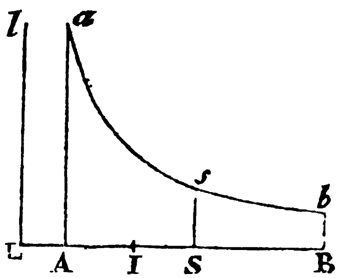


Exempl. 2. Si vis centripeta ad ſingulas ſphæræ particulas tendens ſit reciproce ut cubus diſtantiæ, vel (quod perinde eſt) ut cubus ille applicatus ad planum quodvis datum; ſcribe $\frac{PE\,cub.}{2ASq}$ pro V, dein $2PS \times LD$ pro PEq; & fiet DN ut $\frac{SL \times ASq}{PS \times LD} - \frac{ASq}{2PS}$

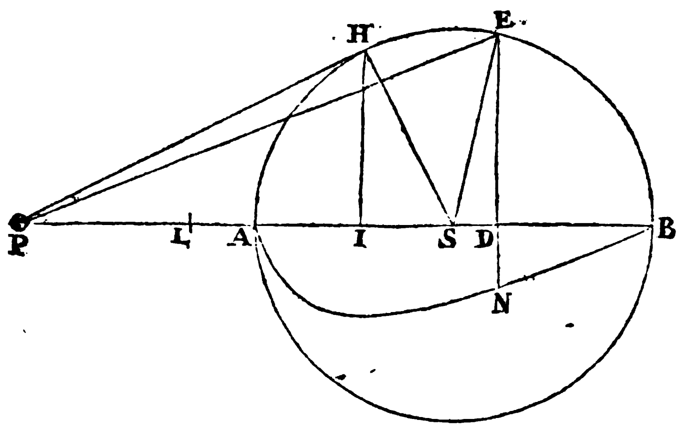
—ALB

$-\frac{ALB \times ASq}{2PS \times LDq}$, id eſt (ob continue proportionales PS, AS, SI) ut $\frac{LSI}{LD} - \frac{1}{2}SI - \frac{ALB \times SI}{2LDq}$. Si ducantur hujus partes tres in longitudinem AB, prima $\frac{LSI}{LD}$ generabit aream hyperbolicam; ſecunda $\frac{1}{2}SI$ aream $\frac{1}{2}AB \times SI$; tertia $\frac{ALB \times SI}{2LDq}$ aream $\frac{ALB \times SI}{2LA} - \frac{ALB \times SI}{2LB}$, id eſt $\frac{1}{2}AB \times SI$. De prima ſubducatur ſumma ſecundæ & tertiæ, & manebit area quæſita ANB. Unde talis emergit problematis conſtructio. Ad puncta L, A, S, B erige perpendicula Ll, Aa, Ss, Bb, quorum Ss ipſi SI æquetur, perque punctum s aſymptotis Ll, LB deſcribatur hyperbola asb occurrens perpendiculis Aa, Bb in a & b; & rectangulum $2ASI$ ſubductum de area hyperbolica $AasbB$ relinquet aream quæſitam ANB.

Liber Primus.



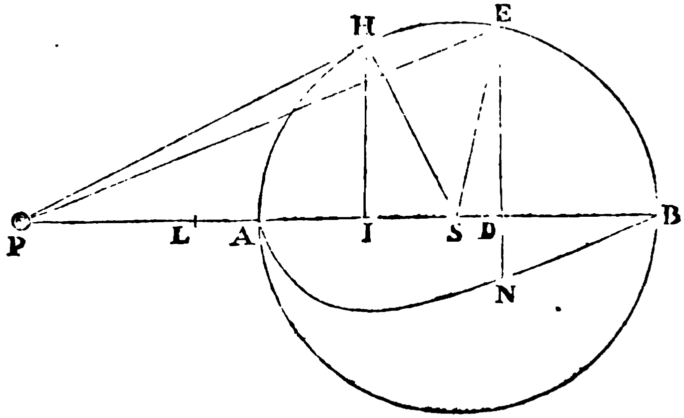
Exempl. 3. Si vis centripeta, ad ſingulas ſphæræ particulas tendens, decreſcit in quadruplicata ratione diſtantiæ a particulis; ſcribe $\frac{PEqq}{2AS\,cub.}$ pro V, dein $\sqrt{2PS \times LD}$ pro PE, & fiet DN ut



$$\frac{SIq \times SL}{\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDc}} - \frac{SIq}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD}} - \frac{SIq \times ALB}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDqc}}.$$

Cujus

Cujus tres partes ductæ in longitudinem AB, producunt areas totidem, *viz.* $\frac{2SIq\times SL}{\surd 2SI}$ in $\overline{\frac{1}{\surd LA}-\frac{1}{\surd LB}}$; $\frac{SIq}{\surd 2SI}$ in $\overline{\surd LB-\surd LA}$; & $\frac{SIq\times ALB}{3\surd 2SI}$ in $\overline{\frac{1}{\surd LA\,cub.}-\frac{1}{\surd LB\,cub.}}$. Et hæ poſt debitam reductionem fiunt $\frac{2SIq\times SL}{LI}$, SIq, & $SIq+\frac{2SI\,cub.}{3LI}$. Hæ vero,



ſubductis poſterioribus de priore, evadunt $\frac{4SI\,cub.}{3LI}$. Proinde vis tota, qua corpuſculum P in ſphæræ centrum trahitur, eſt ut $\frac{SI\,cub.}{PI}$, id eſt, reciproce ut $PS\,cub.\times PI$. *Q.E.I.*

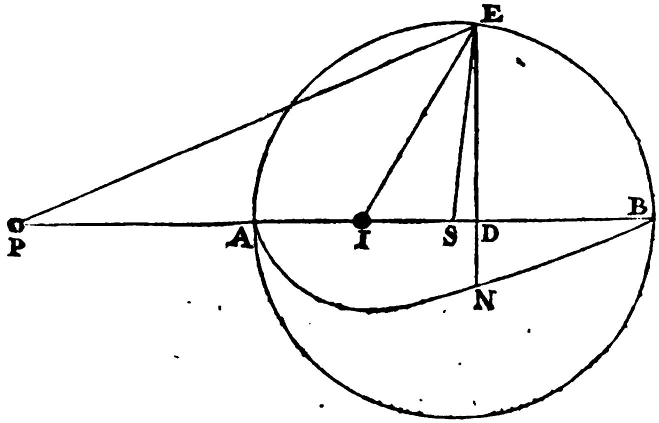
Eadem methodo determinari poteſt attractio corpuſculi ſiti intra ſphæram, ſed expeditius per theorema ſequens.

PROPOSITIO LXXXII. THEOREMA XLI.

In ſphæra centro S *intervallo* SA *deſcripta, ſi capiantur* SI, SA, SP *continue proportionales: dico quod corpuſculi intra ſphæram, in loco quovis* I, *attractio eſt ad attractionem ipſius extra ſphæram, in loco* P, *in ratione compoſita ex ſubduplicata ratione diſtantiarum a centro* IS, PS, *& ſubduplicata ratione virium centripetarum, in locis illis* P *&* I, *ad centrum tendentium.*

Ut,

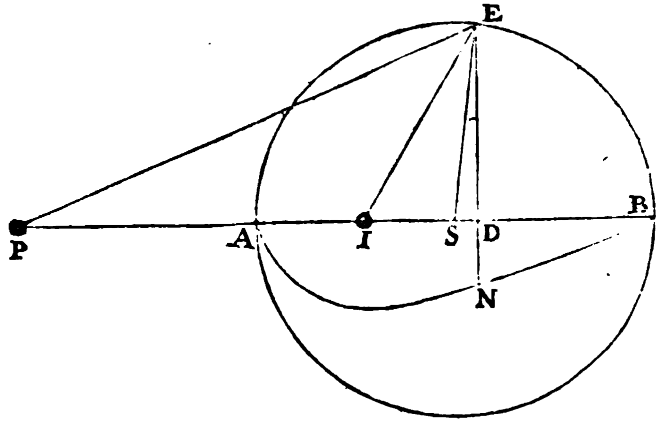
Ut, ſi vires centripetæ particularum ſphæræ ſint reciproce ut diſtantiæ corpuſculi a ſe attracti; vis, qua corpuſculum ſitum in *I* trahitur a ſphæra tota, erit ad vim, qua trahitur in *P*, in ratione compoſita ex ſubduplicata ratione diſtantiæ *SI* ad diſtantiam *SP*, & ratione ſubduplicata vis centripetæ in loco *I*, a particula aliqua in centro oriundæ, ad vim centripetam in loco *P* ab eadem in centro particula oriundam, id eſt, ratione ſubduplicata diſtantiarum *SI*, *SP* ad invicem reciproce. Hæ duæ rationes ſubduplicatæ componunt rationem æqualitatis, & propterea attractiones in *I* & *P* a ſphæra tota factæ æquantur. Simili computo, ſi vires particularum ſphæræ ſunt reciproce in duplicata ratione diſtantiarum, colligetur quod attractio in *I* ſit ad attractionem in *P*, ut diſtantia *SP* ad ſphæræ ſemidiametrum *SA*: Si vires illæ ſunt reciproce in triplicata ratione diſtantiarum, attractiones in *I* & *P* erunt ad invicem ut *SP quad.* ad *SA quad.*: Si in quadruplicata, ut *SP cub.* ad *SA cub.* Unde cum attractio in *P*, in hoc ultimo caſu, inventa fuit reciproce ut *PS cub.* × *PI*, attractio in *I* erit reciproce ut *SA cub.* × *PI*, id eſt (ob datum *SA cub.*) reciproce ut *PI*. Et ſimilis eſt progreſſus in infinitum. Theorema vero ſic demonſtratur.



Stantibus jam ante conſtructis, & exiſtente corpuſculo in loco quovis *P*, ordinatim applicata *DN* inventa fuit ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$. Ergo ſi agatur *IE*, ordinata illa pro alio quovis corpuſculi loco *I*, mutatis mutandis, evadet ut $\frac{DEq \times IS}{IE \times V}$. Pone vires centripetas, e

ſphæræ

ſphæræ puncto quovis E manantes, eſſe ad invicem in diſtantiis IE, PE, ut PE^n ad IE^n (ubi numerus n deſignet indicem poteſtatum PE & IE) & ordinatæ illæ fient ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times PE^n}$ & $\frac{DEq \times IS}{IE \times IE^n}$, quarum ratio ad invicem eſt ut $PS \times IE \times IE^n$ ad $IS \times PE \times PE^n$. Quoniam ob continue proportionales SI, SE, SP, ſimilia ſunt triangula SPE, SEI, & inde fit IE ad PE ut



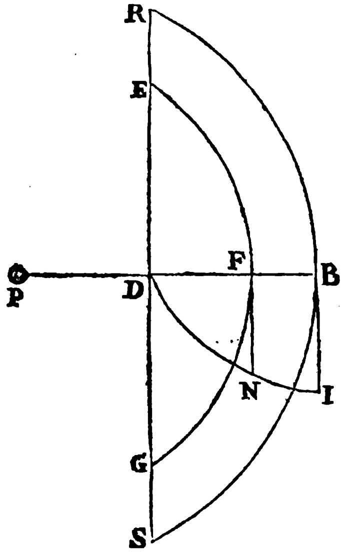
IS ad SE vel SA; pro ratione IE ad PE ſcribe rationem IS ad SA; & ordinatarum ratio evadet $PS \times IE^n$ ad $SA \times PE^n$. Sed PS ad SA ſubduplicata eſt ratio diſtantiarum PS, SI; & IE^n ad PE^n (ob proportionales IE ad PE ut IS ad SA) ſubduplicata eſt ratio virium in diſtantiis PS, IS. Ergo ordinatæ, & propterea areæ quas ordinatæ deſcribunt, hiſque proportionales attractiones, ſunt in ratione compoſita ex ſubduplicatis illis rationibus. *Q.E.D.*

PROPOSITIO LXXXIII. PROBLEMA XLII.

Invenire vim qua corpuſculum in centro ſphæræ locatum ad ejus ſegmentum quodcunque attrahitur.

Sit P corpus in centro ſphæræ, & $RBSD$ ſegmentum ejus plano RDS & ſuperficie ſphærica RBS contentum. Superficie ſphærica EFG centro P deſcripta ſecetur DB in F, ac diſtinguatur

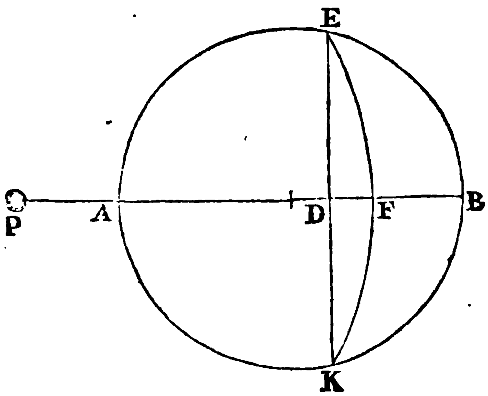
guatur ſegmentum in partes $BREFGS$, $FE\mathcal{D}G$. Sit autem ſuperficies illa non pure mathematica, ſed phyſica, profunditatem habens quam minimam. Nominetur iſta profunditas O, & erit hæc ſuperficies (per demonſtrata *Archimedis*) ut $\mathcal{P}F \times \mathcal{D}F \times O$. Ponamus præterea vires attractivas particularum ſphæræ eſſe reciproce ut diſtantiarum dignitas illa, cujus index eſt n; & vis, qua ſuperficies EFG trahit corpus $\mathcal{P}$, erit (per prop. LXXIX.) ut $\frac{\mathcal{D}Eq \times O}{\mathcal{P}F^n}$, id eſt, ut $\frac{2\mathcal{D}F \times O}{\mathcal{P}F^{n-1}} - \frac{\mathcal{D}Fq \times O}{\mathcal{P}F^n}$. Huic proportionale ſit perpendiculum FN ductum in O; & area curvilinea $B\mathcal{D}I$, quam ordinatim applicata FN in longitudinem $\mathcal{D}B$ per motum continuum ducta deſcribit, erit ut vis tota qua ſegmentum totum $RBS\mathcal{D}$ trahit corpus $\mathcal{P}$. *Q. E. I.*



PROPOSITIO LXXXIV. PROBLEMA XLIII.

Invenire vim, qua corpuſculum, extra centrum ſphæræ in axe ſegmenti cujuſvis locatum, attrahitur ab eodem ſegmento.

A ſegmento EBK trahatur corpus $\mathcal{P}$ in ejus axe $A\mathcal{D}B$ locatum. Centro $\mathcal{P}$ intervallo $\mathcal{P}E$ deſcribatur ſuperficies ſphærica EFK, qua diſtinguatur ſegmentum in partes duas $EBKFE$ & $EFK\mathcal{D}E$. Quæratur vis partis prioris per prop. LXXXI. & vis partis poſterioris per prop. LXXXIII; & ſumma virium erit vis ſegmenti totius $EBK\mathcal{D}E$. *Q. E. I.*



Scholium.

Explicatis attractionibus corporum ſphæricorum, jam pergere liceret ad leges attractionum aliorum quorundam ex particulis attractivis ſimiliter conſtantium corporum; ſed iſta particulatim tractare minus ad inſtitutum ſpectat. Suffecerit propoſitiones quaſdam generaliores de viribus hujuſmodi corporum, deque motibus inde oriundis, ob earum in rebus philoſophicis aliqualem uſum, ſubjungere.

SECTIO XIII.

De corporum non ſphæricorum viribus attractivis.

PROPOSITIO LXXXV. THEOREMA XLII.

Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum eſt, attractio longe fortior ſit, quam cum vel minimo intervallo ſeparantur ab invicem: vires particularum trahentis, in receſſu corporis attracti, decreſcunt in ratione pluſquam duplicata diſtantiarum a particulis.

Nam ſi vires decreſcunt in ratione duplicata diſtantiarum a particulis; attractio verſus corpus ſphæricum, propterea quod (per prop. LXXIV.) ſit reciproce ut quadratum diſtantiæ attracti corporis a centro ſphæræ, haud ſenſibiliter augebitur ex contactu; atque adhuc minus augebitur ex contactu, ſi attractio in receſſu corporis attracti decreſcat in ratione minore. Patet igitur propoſitio de ſphæris attractivis. Et par eſt ratio orbium ſphæricorum concavorum corpora externa trahentium. Et multo magis res conſtat in orbibus corpora interius conſtituta trahentibus, cum attractiones paſſim per orbium cavitates ab attractionibus contrariis (per prop. LXX) tollantur, ideoque vel in ipſo contactu nullæ ſunt. Quod ſi ſphæris hiſce orbibuſque ſphæricis partes quælibet a loco contactus remotæ auferantur, & partes novæ ubivis addantur: mutari poſſunt figuræ horum corporum attractivorum pro lubitu, nec tamen partes additæ vel ſubductæ, cum ſint a loco contactus remotæ, augebunt notabiliter attractionis exceſſum, qui ex contactu oritur. Conſtat igitur propoſitio de corporibus figurarum omnium. *Q. E. D.*

PROPO-

PROPOSITIO LXXXVI. THEOREMA XLIII.

Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in receſſu corporis attracti decreſcunt in triplicata vel pluſquam triplicata ratione diſtantiarum a particulis: attractio longe fortior erit in contactu, quam cum attrahens & attractum intervallo vel minimo ſeparantur ab invicem.

Nam attractionem in acceſſu attracti corpuſculi ad hujuſmodi ſphæram trahentem augeri in infinitum, conſtat per ſolutionem problematis XLI. in exemplo ſecundo ac tertio exhibitam. Idem, per exempla illa & theorema XLI. inter ſe collata, facile colligitur de attractionibus corporum verſus orbes concavo-convexos, ſive corpora attracta collocentur extra orbes, ſive intra in eorum cavitatibus. Sed & addendo vel auferendo his ſphæris & orbibus ubivis extra locum contactus materiam quamlibet attractivam, eo ut corpora attractiva induant figuram quamvis aſſignatam, conſtabit propoſitio de corporibus univerſis. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXXVII. THEOREMA XLIV.

Si corpora duo ſibi invicem ſimilia, & ex materia æqualiter attractiva conſtantia, ſeorſim attrahant corpuſcula ſibi ipſis proportionalia & ad ſe ſimiliter poſita: attractiones acceleratrices corpuſculorum in corpora tota erunt ut attractiones acceleratrices corpuſculorum in eorum particulas totis proportionales, & in totis ſimiliter poſitas.

Nam ſi corpora diſtinguantur in particulas, quæ ſint totis proportionales, & in totis ſimiliter ſitæ; erit, ut attractio in particulam quamlibet unius corporis ad attractionem in particulam correſpondentem in corpore altero, ita attractiones in particulas ſingulas primi corporis ad attractiones in alterius particulas ſingulas correſpondentes; & componendo, ita attractio in totum primum corpus ad attractionem in totum ſecundum. *Q. E. D.*

De Motu Corporum

Corol. 1. Ergo ſi vires attractivæ particularum, augendo diſtantias corpuſculorum attractorum, decreſcant in ratione dignitatis cujuſvis diſtantiarum; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut corpora directe, & diſtantiarum dignitates illæ inverſe. Ut ſi vires particularum decreſcant in ratione duplicata diſtantiarum a corpuſculis attractis, corpora autem ſint ut *A cub.* & *B cub.* ideoque tum corporum latera cubica, tum corpuſculorum attractorum diſtantiæ a corporibus, ut *A* & *B*: attractiones acceleratrices in corpora erunt ut $\frac{A\ cub.}{A\ quad.}$ & $\frac{B\ cub.}{B\ quad.}$, id eſt, ut corporum latera illa cubica *A* & *B*. Si vires particularum decreſcant in ratione triplicata diſtantiarum a corpuſculis attractis; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut $\frac{A\ cub.}{A\ cub.}$ & $\frac{B\ cub.}{B\ cub.}$, id eſt, æquales. Si vires decreſcant in ratione quadruplicata; attractiones in corpora erunt ut $\frac{A\ cub.}{Aqq.}$ & $\frac{B\ cub.}{Bqq.}$, id eſt, reciproce ut latera cubica *A* & *B*. Et ſic in cæteris.

Corol. 2. Unde viciſſim, ex viribus, quibus corpora ſimilia trahunt corpuſcula ad ſe ſimiliter poſita, colligi poteſt ratio decrementi virium particularum attractivarum in receſſu corpuſculi attracti; ſi modo decrementum illud ſit directe vel inverſe in ratione aliqua diſtantiarum.

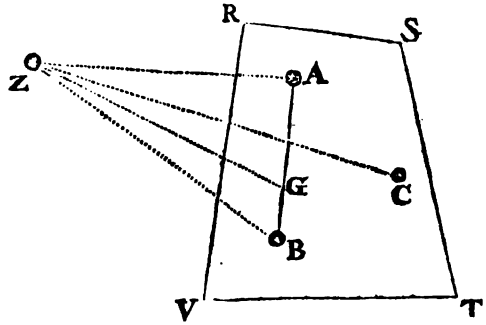
PROPOSITIO LXXXVIII. THEOREMA XLV.

Si particularum æqualium corporis cujuſcunque vires attractivæ ſint ut diſtantiæ locorum a particulis: vis corporis totius tendet ad ipſius centrum gravitatis; & eadem erit cum vi globi ex materia conſimili & æquali conſtantis, & centrum habentis in ejus centro gravitatis.

Corporis *RSTV* particulæ *A*, *B* trahant corpuſculum aliquod *Z* viribus, quæ, ſi particulæ æquantur inter ſe, ſint ut diſtantiæ *AZ*, *BZ*; ſin particulæ ſtatuantur inæquales, ſint ut hæ particulæ & ipſarum diſtantiæ *AZ*, *BZ* conjunctim, ſive (ſi ita loquar) ut hæ particulæ in diſtantias ſuas *AZ*, *BZ* reſpective ductæ. Et exponantur

hæ

hæ vires per contenta illa $A \times AZ$ & $B \times BZ$. Jungatur AB, & ſecetur ea in G ut ſit AG ad BG ut particula B ad particulam A; & erit G commune centrum gravitatis particularum A & B. Vis $A \times AZ$ (per legum corol. 2.) reſolvitur in vires $A \times GZ$ & $A \times AG$ & vis $B \times BZ$ in vires $B \times GZ$ & $B \times BG$. Vires autem $A \times AG$ & $B \times BG$, ob proportionales A ad B & BG ad AG, æquantur; ideoque cum dirigantur in partes contrarias, ſe mutuo deſtruunt. Reſtant vires $A \times GZ$ & $B \times GZ$. Tendunt hæ ab Z verſus centrum G, & vim $\overline{A+B} \times GZ$ componunt; hoc eſt, vim eandem ac ſi particulæ attractivæ A & B conſiſterent in eorum communi gravitatis centro G, globum ibi componentes.



Eodem argumento, ſi adjungatur particula tertia C, & componatur hujus vis cum vi $\overline{A+B} \times GZ$ tendente ad centrum G; vis inde oriunda tendet ad commune centrum gravitatis globi illius in G & particulæ C; hoc eſt, ad commune centrum gravitatis trium particularum A, B, C; & eadem erit, ac ſi globus & particula C conſiſterent in centro illo communi, globum majorem ibi componentes. Et ſic pergitur in infinitum. Eadem eſt igitur vis tota particularum omnium corporis cujuſcunque $RSTV$, ac ſi corpus illud, ſervato gravitatis centro, figuram globi indueret. *Q. E. D.*

Corol. Hinc motus corporis attracti Z idem erit, ac ſi corpus attrahens $RSTV$ eſſet ſphæricum: & propterea ſi corpus illud attrahens vel quieſcat, vel progrediatur uniformiter in directum; corpus attractum movebitur in ellipſi centrum habente in attrahentis centro gravitatis.

PROPOSITIO LXXXIX. THEOREMA XLVI.

Si corpora ſint plura ex particulis æqualibus conſtantia, quarum vires ſunt ut diſtantiæ locorum a ſingulis: vis ex omnium viribus compoſita, qua corpuſculum quodcunque trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis; & eadem

dem erit, ac ſi trahentia illa, ſervato gravitatis centro communi, coirent & in globum formarentur.

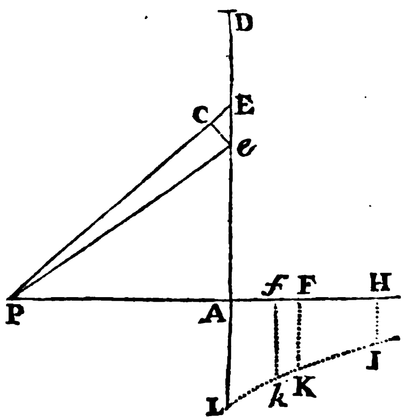
Demonſtratur eodem modo, atque propoſitio ſuperior.

Corol. Ergo motus corporis attracti idem erit, ac ſi corpora trahentia, ſervato communi gravitatis centro, coirent & in globum formarentur. Ideoque ſi corporum trahentium commune gravitatis centrum vel quieſcit, vel progreditur uniformiter in linea recta; corpus attractum movebitur in ellipſi, centrum habente in communi illo trahentium centro gravitatis.

PROPOSITIO XC. PROBLEMA XLIV.

Si ad ſingula circuli cujuſcunque puncta tendant vires æquales centripetæ, creſcentes vel decreſcentes in quacunque diſtantiarum ratione: invenire vim, qua corpuſculum attrahitur ubivis poſitum in recta, quæ plano circuli ad centrum ejus perpendiculariter inſiſtit.

Centro *A* intervallo quovis *AD*, in plano, cui recta *AP* perpendicularis eſt, deſcribi intelligatur circulus; & invenienda ſit vis, qua corpuſculum quodvis *P* in eundem attrahitur. A circuli puncto quovis *E* ad corpuſculum attractum *P* agatur recta *PE*. In recta *PA* capiatur *PF* ipſi *PE* æqualis, & erigatur normalis *FK*, quæ ſit ut vis qua punctum *E* trahit corpuſculum *P*. Sitque *IKL* curva linea quam punctum *K* perpetuo tangit. Occurrat eadem circuli plano in *L*. In *PA* capiatur *PH* æqualis *PD*, & erigatur perpendiculum *HI* curvæ prædictæ occurrens in *I*; & erit corpuſculi *P* attractio in circulum ut area *AHIL* ducta in altitudinem *AP*. *Q. E. I.*



Etenim in *AE* capiatur linea quam minima *Ee*. Jungatur *Pe*, & in *PE*, *PA* capiantur *PC*, *Pf* ipſi *Pe* æquales. Et quoniam vis,

vis, qua annuli centro A intervallo AE in plano prædicto deſcripti punctum quodvis E trahit ad ſe corpus P, ponitur eſſe ut FK, & inde vis, qua punctum illud trahit corpus P verſus A, eſt ut $\frac{AP \times FK}{PE}$, & vis, qua annulus totus trahit corpus P verſus A, ut annulus & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim; annulus autem iſte eſt ut rectangulum ſub radio AE & latitudine Ee, & hoc rectangulum (ob proportionales PE & AE, Ee & CE) æquatur rectangulo $PE \times CE$ ſeu $PE \times Ff$; erit vis, qua annulus iſte trahit corpus P verſus A, ut $PE \times Ff$ & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim, id eſt, ut contentum $Ff \times FK \times AP$, ſive ut area $FKkf$ ducta in AP. Et propterea ſumma virium, quibus annuli omnes in circulo, qui centro A & intervallo AD deſcribitur, trahunt corpus P verſus A, eſt ut area tota $AHIKL$ ducta in AP. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi vires punctorum decreſcunt in duplicata diſtantiarum ratione, hoc eſt, ſi ſit FK ut $\frac{1}{PF\ quad.}$, atque ideo area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$; erit attractio corpuſculi P in circulum ut $1 - \frac{PA}{PH}$, id eſt, ut $\frac{AH}{PH}$.

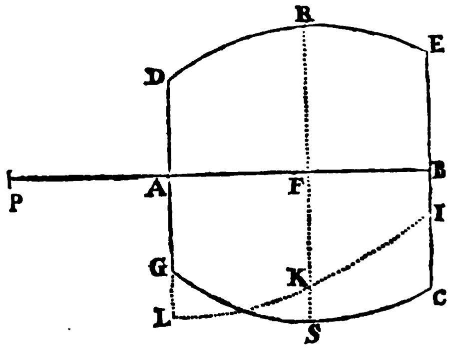
Corol. 2. Et univerſaliter, ſi vires punctorum ad diſtantias D ſint reciproce ut diſtantiarum dignitas quælibet D^n, hoc eſt, ſi ſit FK ut $\frac{1}{D^n}$, ideoque area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$; erit attractio corpuſculi P in circulum ut $\frac{1}{PA^{n-2}} - \frac{PA}{PH^{n-1}}$.

Corol. 3. Et ſi diameter circuli augeatur in infinitum, & numerus n ſit unitate major; attractio corpuſculi P in planum totum infinitum erit reciproce ut PA^{n-2}, propterea quod terminus alter $\frac{PA}{PH^{n-1}}$ evaneſcet.

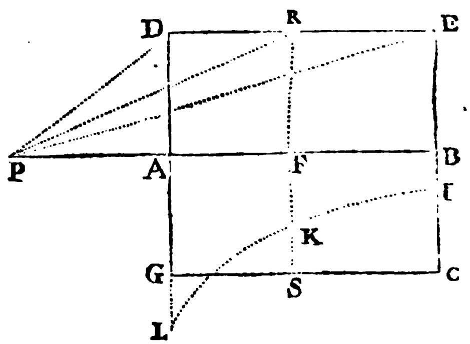
PROPO-

PROPOSITIO XCI. PROBLEMA XLV.

Invenire attractionem corpuſculi ſiti in axe ſolidi rotundi, ad cujus puncta ſingula tendunt vires æquales centripetæ in quacunque diſtantiarum ratione decreſcentes.



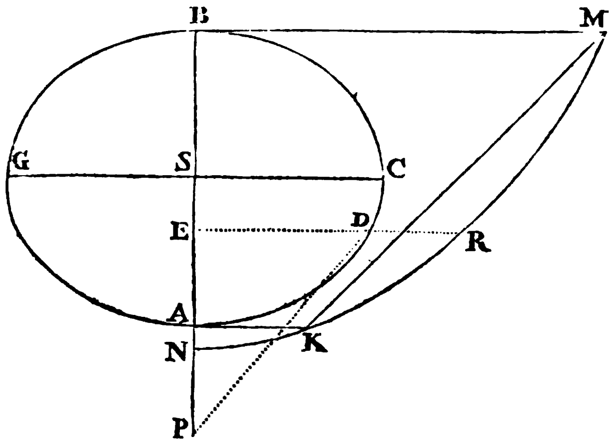
In ſolidum *DECG* trahatur corpuſculum *P*, ſitum in ejus axe *AB*. Circulo quolibet *RFS* ad hunc axem perpendiculari ſecetur hoc ſolidum, & in ejus ſemidiametro *FS*, in plano aliquo *PALKB* per axem tranſeunte, capiatur (per prop. xc.) longitudo *FK* vi, qua corpuſculum *P* in circulum illum attrahitur, proportionalis. Tangat autem punctum *K* curvam lineam *LKI*, planis extimorum circulorum *AL* & *BI* occurrentem in *L* & *I*; & erit attractio corpuſculi *P* in ſolidum ut area *LABI*. *Q. E. I.*



Corol. 1. Unde ſi ſolidum cylindrus ſit, parallelogrammo *ADEB* circa axem *AB* revoluto deſcriptus, & vires centripetæ in ſingula ejus puncta tendentes ſint reciproce ut quadrata diſtantiarum a punctis: erit attractio corpuſculi *P* in hunc cylyndrum ut $AB - PE + PD$. Nam ordinatim applicata *FK* (per corol. 1. prop. xc.) erit ut $1 - \frac{PF}{PR}$. Hujus pars 1 ducta in longitudinem *AB*, deſcribit aream $1 \times AB$: & pars altera $\frac{PF}{PR}$ ducta in longitudinem *PB*, deſcribit aream 1 in $\overline{PE - AD}$, id quod ex curvæ *LKI* quadratura facile oſtendi poteſt;) & ſimiliter pars eadem ducta in longitudinem *PA* deſcribit aream 1 in $\overline{PD - AD}$, ductaque in ipſarum *PB*, *PA* differentiam *AB* deſcribit arearum differentiam 1 in $\overline{PE - PD}$. De contento primo $1 \times AB$ auferatur contentum

tentum poſtremum 1 in $\overline{PE - PD}$, & reſtabit area *LABI* æqualis 1 in $\overline{AB - PE + PD}$. Ergo vis, huic areæ proportionalis, eſt ut $AB - PE + PD$.

Corol. 2. Hinc etiam vis innoteſcit, qua ſphærois *AGBC* attrahit corpus quodvis *P*, exterius in axe ſuo *AB* ſitum. Sit *NKRM* ſectio conica cujus ordinatim applicata *ER*, ipſi *PE* perpendicularis, æquetur ſemper longitudini *PD*, quæ ducitur ad punctum illud *D*, in quo applicata iſta ſphæroidem ſecat. A ſphæroidis verticibus *A*, *B* ad ejus axem *AB* erigantur perpendicula *AK*, *BM* ipſis *AP*, *BP* æqualia reſpective, & propterea ſectioni conicæ occurrentia in *K* & *M*; & jungatur *KM* auferens ab eadem ſegmentum *KMRK*.



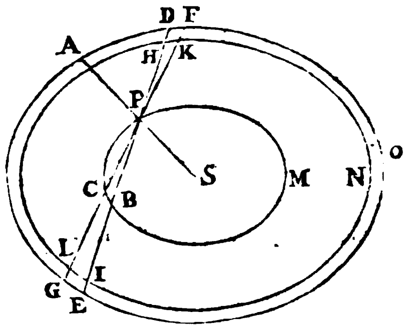
Sit autem ſphæroidis centrum *S* & ſemidiameter maxima *SC*: & vis, qua ſphærois trahit corpus *P*, erit ad vim, qua ſphæra diametro *AB* deſcripta trahit idem corpus, ut $\frac{AS \times CSq - PS \times KMRK}{PSq + CSq - ASq}$ ad $\frac{AS\ cub.}{3PS\ quad.}$. Et eodem computandi fundamento invenire licet vires ſegmentorum ſphæroidis.

Corol. 3. Quod ſi corpuſculum intra ſphæroidem in axe collocetur; attractio erit ut ipſius diſtantia a centro. Id quod facilius hoc argumento colligitur, ſive particula in axe ſit, ſive in alia quavis diametro data. Sit *AGOF* ſphærois attrahens, *S* centrum ejus, & *P* corpus attractum. Per corpus illud *P* agantur tum ſemidiameter *SPA*, tum rectæ duæ quævis *DE*, *FG* ſphæroidi hinc inde occur-

 rentes

De Motu Corporum

rentes in *D* & *E*, *F* & *G*; ſintque *PCM*, *HLN* ſuperficies ſphæroidum duarum interiorum, exteriori ſimilium & concentricarum, quarum prior tranſeat per corpus *P*, & ſecet rectas *DE* & *FG* in *B* & *C*, poſterior ſecet eaſdem rectas in *H*, *I* & *K*, *L*. Habeant autem ſphæroides omnes axem communem, & erunt rectarum partes hinc inde interceptæ *DP* & *BE*, *FP* & *CG*, *DH* & *IE*, *FK* & *LG* ſibi mutuo æquales; propterea quod rectæ *DE*, *PB* & *HI* biſecantur in eodem puncto, ut & rectæ *FG*, *PC* & *KL*. Concipe jam *DPF*, *EPG* deſignare conos oppoſitos, angulis verticalibus *DPF*, *EPG* infinite parvis deſcriptos, & lineas etiam *DH*, *EI* infinite parvas eſſe; & conorum particulæ ſphæroidum ſuperficiebus abſciſſæ *DHKF*, *GLIE*, ob æqualitatem linearum *DH*, *EI*, erunt ad invicem ut quadrata diſtantiarum ſuarum a corpuſculo *P*, & propterea corpuſculum illud æqualiter trahent. Et pari ratione, ſi ſuperficiebus ſphæroidum innumerarum ſimilium concentricarum & axem communem habentium dividantur ſpatia *DPF*, *EGCB* in particulas, hæ omnes utrinque æqualiter trahent corpus *P* in partes contrarias. Æquales igitur ſunt vires coni *DPF* & ſegmenti conici *EGCB*, & per contrarietatem ſe mutuo deſtruunt. Et par eſt ratio virium materiæ omnis extra ſphæroidem intimam *PCBM*. Trahitur igitur corpus *P* a ſola ſphæroide intima *PCBM*; & propterea (per corol. 3. prop. LXXII.) attractio ejus eſt ad vim, qua corpus *A* trahitur a ſphæroide tota *AGOD*, ut diſtantia *PS* ad diſtantiam *AS*. *Q. E. D.*



PROPOSITIO XCII. PROBLEMA XLVI.

Dato corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta ſingula tendentium.

E corpore dato formanda eſt ſphæra vel cylindrus aliave figura regularis, cujus lex attractionis, cuivis decrementi rationi congruens (per prop. LXXX. LXXXI. & XCI.) inveniri poteſt. Dein factis experimentis invenienda eſt vis attractionis in diverſis diſtantiis, & lex

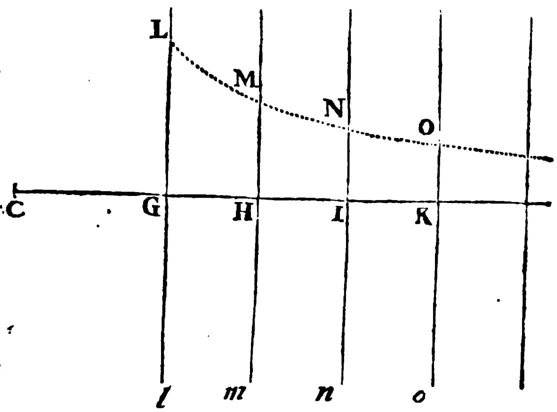
attractionis

attractionis in totum inde patefacta dabit rationem decrementi virium partium ſingularum, quam invenire oportuit.

PROPOSITIO XCIII. THEOREMA XLVII.

Si ſolidum ex una parte planum, ex reliquis autem partibus infinitum, conſtet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, quarum vires in receſſu a ſolido decreſcunt in ratione poteſtatis cujuſvis diſtantiarum pluſquam quadraticæ, & vi ſolidi totius corpuſculum ad utramvis plani partem conſtitutum trahatur: dico quod ſolidi vis illa attractiva, in receſſu ab ejus ſuperficie plana, decreſcet in ratione poteſtatis, cujus latus eſt diſtantia corpuſculi a plano, & index ternario minor quam index poteſtatis diſtantiarum.

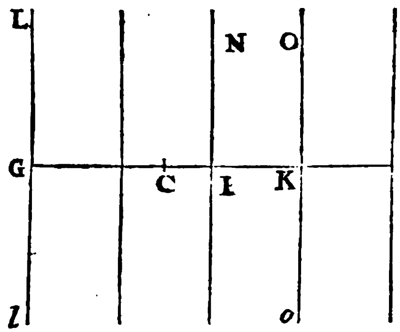
Caſ. 1. Sit *LGl* planum quo ſolidum terminatur. Jaceat ſolidum autem ex parte plani hujus verſus *I*, inque plana innumera *mHM*, *nIN*, *oKO*, &c. ipſi *GL* parallela reſolvatur. Et primo collocetur corpus attractum *C* extra ſolidum. Agatur autem *CGHI* planis illis innumeris perpendicularis, & decreſcant vires attractivæ punctorum ſolidi in ratione poteſtatis diſtantiarum, cujus index ſit numerus *n* ternario non minor. Ergo (per corol. 3. prop. xc.) vis, qua



planum quodvis *mHM* trahit punctum *C*, eſt reciproce ut CH^{n-2}. In plano *mHM* capiatur longitudo *HM* ipſi CH^{n-2} reciproce proportionalis, & erit vis illa ut *HM*. Similiter in planis ſingulis *lGL*, *nIN*, *oKO*, &c. capiantur longitudines *GL*, *IN*, *KO*, &c. ipſis CG^{n-2}, CI^{n-2}, CK^{n-2}, &c. reciproce proportionales; & vires planorum eorundem erunt ut longitudines captæ, ideoque ſumma virium ut ſumma longitudinum, hoc eſt, vis ſolidi totius ut area

GLOK in infinitum verſus *OK* producta. Sed area illa (per notas quadraturarum methodos) eſt reciproce ut CG^{n-3}, & propterea vis ſolidi totius eſt reciproce ut CG^{n-3}. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Collocetur jam corpuſculum *C* ex parte plani *lGL* intra ſolidum, & capiatur diſtantia *CK* æqualis diſtantiæ *CG*. Et ſolidi pars *LGloKO*, planis parallelis *lGL*, *oKO* terminata, corpuſculum *C* in medio ſitum nullam in partem trahet, contrariis oppoſitorum punctorum actionibus ſe mutuo per æqualitatem tollentibus. Proinde corpuſculum *C* ſola vi ſolidi ultra planum *OK* ſiti trahitur. Hæc autem vis (per caſum primum) eſt reciproce ut CK^{n-3}, hoc eſt (ob æquales *CG*, *CK*) reciproce ut CG^{n-3}. *Q. E. D.*



Corol. 1. Hinc ſi ſolidum *LGIN* planis duobus infinitis parallelis *LG*, *IN* utrinque terminetur; innoteſcit ejus vis attractiva, ſubducendo de vi attractiva ſolidi totius infiniti *LGKO* vim attractivam partis ulterioris *NIKO*, in infinitum verſus *KO* productæ.

Corol. 2. Si ſolidi hujus infiniti pars ulterior, quando attractio ejus collata cum attractione partis citerioris nullius pene eſt momenti, rejiciatur: attractio partis illius citerioris augendo diſtantiam decreſcet quam proxime in ratione poteſtatis CG^{n-3}.

Corol. 3. Et hinc ſi corpus quodvis finitum & ex una parte planum trahat corpuſculum e regione medii illius plani, & diſtantia inter corpuſculum & planum collata cum dimenſionibus corporis attrahentis perexigua ſit, conſtet autem corpus attrahens ex particulis homogeneis, quarum vires attractivæ decreſcunt in ratione poteſtatis cujuſvis pluſquam quadruplicatæ diſtantiarum; vis attractiva corporis totius decreſcet quamproxime in ratione poteſtatis, cujus latus ſit diſtantia illa perexigua, & index ternario minor quam index poteſtatis prioris. De corpore ex particulis conſtante, quarum vires attractivæ decreſcunt in ratione poteſtatis triplicatæ diſtantiarum, aſſertio non valet; propterea quod, in hoc caſu, attractio partis illius ulterioris corporis infiniti in corollario ſecundo, ſemper eſt infinite major quam attractio partis citerioris.

Scholium.

Scholium.

Si corpus aliquod perpendiculariter verſus planum datum trahatur, & ex data lege attractionis quæratur motus corporis: ſolvetur problema quærendo (per prop. XXXIX.) motum corporis recta deſcendentis ad hoc planum, & (per legum corol. 2.) componendo motum iſtum cum uniformi motu, ſecundum lineas eidem plano parallelas facto. Et contra, ſi quæratur lex attractionis in planum ſecundum lineas perpendiculares factæ, ea conditione ut corpus attractum in data quacunque curva linea moveatur, ſolvetur problema operando ad exemplum problematis tertii.

Operationes autem contrahi ſolent reſolvendo ordinatim applicatas in ſeries convergentes. Ut ſi ad baſem A in angulo quovis dato ordinatim applicetur longitudo B, quæ ſit ut baſis dignitas quælibet $A^{\frac{m}{n}}$; & quæratur vis qua corpus, ſecundum poſitionem ordinatim applicatæ, vel in baſem attractum vel a baſi fugatum, moveri poſſit in curva linea, quam ordinatim applicata termino ſuo ſuperiore ſemper attingit: Suppono baſem augeri parte quam minima O, & ordinatim applicatam $\overline{A+O}|^{\frac{m}{n}}$ reſolvo in ſeriem infinitam $A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} O A^{\frac{m-n}{n}} + \frac{mm-mn}{2nn} OOA^{\frac{m-2n}{n}}$ &c. atque hujus termino in quo O duarum eſt dimenſionum, id eſt, termino $\frac{mm-mn}{2nn} OOA^{\frac{m-2n}{n}}$ vim proportionalem eſſe ſuppono. Eſt igitur vis quæſita ut $\frac{mm-mn}{nn} A^{\frac{m-2n}{n}}$, vel quod perinde eſt, ut $\frac{mm-mn}{nn} B^{\frac{m-2n}{m}}$. Ut ſi ordinatim applicata parabolam attingat, exiſtente $m=2$, & $n=1$: fiet vis ut data $2B^{0}$, ideoque dabitur. Data igitur vi corpus movebitur in parabola, quemadmodum *Galilæus* demonſtravit. Quod ſi ordinatim applicata hyperbolam attingat, exiſtente $m=0-1$, & $n=1$; fiet vis ut $2A^{-3}$ ſeu $2B^{3}$: ideoque vi, quæ ſit ut cubus ordinatim applicatæ, corpus movebitur in hyper-

hyperbola. Sed miſſis hujuſmodi propoſitionibus, pergo ad alias quaſdam de motu, quas nondum attigi.

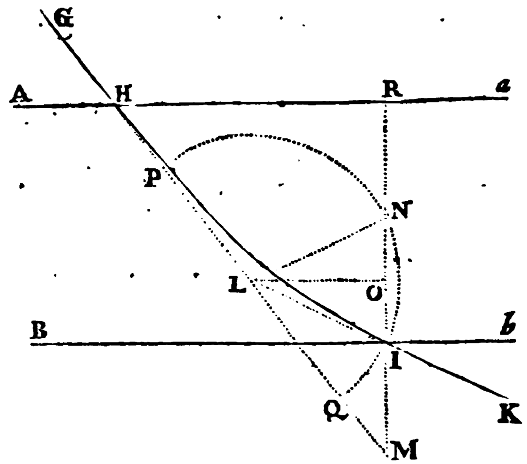
SECTIO XIV.

De motu corporum minimorum, quæ viribus centripetis ad ſingulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.

PROPOSITIO XCIV. THEOREMA XLVIII.

Si media duo ſimilaria, ſpatio planis parallelis utrinque terminato, diſtinguantur ab invicem, & corpus in tranſitu per hoc ſpatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter verſus medium alterutrum, neque ulla alia vi agitetur vel impediatur; ſit autem attractio, in æqualibus ab utroque plano diſtantiis ad eandem ipſius partem captis, ubique eadem: dico quod ſinus incidentiæ in planum alterutrum erit ad ſinum emergentiæ ex plano altero in ratione data.

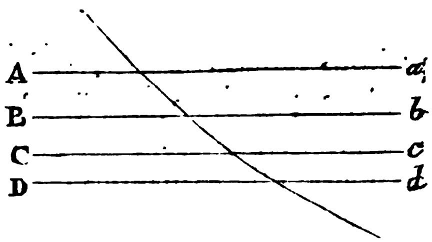
Caſ. 1. Sunto *Aa*, *Bb* plana duo parallela. Incidat corpus in planum prius *Aa* ſecundum lineam *GH*, ac toto ſuo per ſpatium intermedium tranſitu attrahatur vel impellatur verſus medium incidentiæ, eaque actione deſcribat lineam curvam *HI*, & emergat ſecundum lineam *IK*. Ad planum emergentiæ *Bb* erigatur perpendiculum *IM*, occurrens tum lineæ incidentiæ *GH* productæ in *M*, tum plano incidentiæ *Aa* in *R*; & linea emergentiæ *KI* producta occurrat *HM* in *L*. Centro



L intervallo *LI* deſcribatur circulus, ſecans tam *HM* in *P* & *Q*, quam *MI* productam in *N*; & primo ſi attractio vel impulſus ponatur

ponatur uniformis, erit (ex demonſtratis *Galilæi*) curva *HI* parabola, cujus hæc eſt proprietas, ut rectangulum ſub dato latere recto & linea *IM* æquale ſit *HM* quadrato; ſed & linea *HM* biſecabitur in *L*. Unde ſi ad *MI* demittatur perpendiculum *LO*, æquales erunt *MO*, *OR*; & additis æqualibus *ON*, *OI*, fient totæ æquales *MN*, *IR*. Proinde cum *IR* detur, datur etiam *MN*; eſtque rectangulum *NMI* ad rectangulum ſub latere recto & *IM*, hoc eſt, ad *HMq*, in data ratione. Sed rectangulum *NMI* æquale eſt rectangulo *PMQ*, id eſt, differentiæ quadratorum *MLq*, & *PLq* ſeu *LIq*; & *HMq* datam rationem habet ad ſui ipſius quartam partem *MLq*: ergo datur ratio *MLq*—*LIq* ad *MLq*, & convertendo ratio *LIq* ad *MLq*, & ratio dimidiata *LI* ad *ML*. Sed in omni triangulo *LMI*, ſinus angulorum ſunt proportionales lateribus oppoſitis. Ergo datur ratio ſinus anguli incidentiæ *LMR* ad ſinum anguli emergentiæ *LIR*. *Q. E. D.*

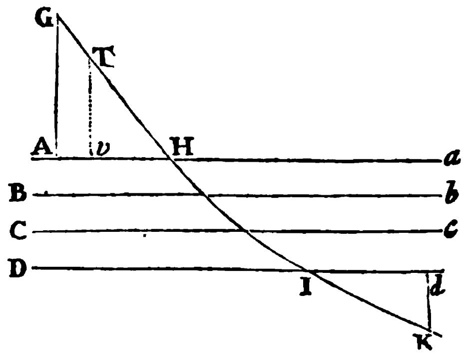
Caſ. 2. Tranſeat jam corpus ſucceſſive per ſpatia plura parallelis planis terminata, *AabB*, *BbcC*, &c. & agitetur vi quæ ſit in ſingulis ſeparatim uniformis, at in diverſis diverſa; & per jam demonſtrata, ſinus incidentiæ in planum primum *Aa* erit ad ſinum emergentiæ ex plano ſecundo *Bb*, in data ratione; & hic ſinus, qui eſt ſinus incidentiæ in planum ſecundum *Bb*, erit ad ſinum emergentiæ ex plano tertio *Cc*, in data ratione; & hic ſinus ad ſinum emergentiæ ex plano quarto *Dd*, in data ratione; & ſic in infinitum: & ex æquo, ſinus incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo in data ratione. Minuantur jam planorum intervalla & augeatur numerus in infinitum, eo ut attractionis vel impulſus actio, ſecundum legem quamcunque aſſignatam, continua reddatur; & ratio ſinus incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo, ſemper data exiſtens, etiamnum dabitur. *Q. E. D.*



PROPOSITIO XCV. THEOREMA XLIX.

Iiſdem poſitis; dico quod velocitas corporis ante incidentiam eſt ad ejus velocitatem poſt emergentiam, ut ſinus emergentiæ ad ſinum incidentiæ.

Capiantur *AH*, *Id* æquales, & erigantur perpendicula *AG*, *dK* occurrentia lineis incidentiæ & emergentiæ *GH*, *IK*, in *G* & *K*. In *GH* capiatur *TH* æqualis *IK*, & ad planum *Aa* demittatur normaliter *Tv*. Et (per legum. corol. 2.) diſtinguatur motus corporis in duos, unum planis *Aa*, *Bb*, *Cc*, &c. perpendicularem, alterum iiſdem parallelum. Vis attractionis vel impulſus, agendo ſecundum lineas perpendiculares, nil mutat motum ſecundum parallelas, & propterea corpus hoc motu conficiet æqualibus temporibus æqualia illa ſecundum parallelas intervalla, quæ



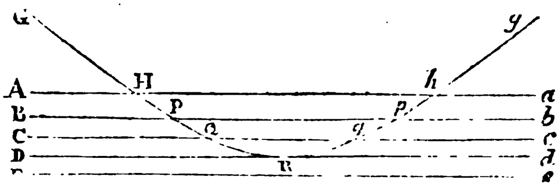
ſunt inter lineam *AG* & punctum *H*, interque punctum *I* & lineam *dK*; hoc eſt, æqualibus temporibus deſcribet lineas *GH*, *IK*. Proinde velocitas ante incidentiam eſt ad velocitatem poſt emergentiam, ut *GH* ad *IK* vel *TH*, id eſt, ut *AH* vel *Id* ad *vH*, hoc eſt (reſpectu radii *TH* vel *IK*) ut ſinus emergentiæ ad ſinum incidentiæ. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XCVI. THEOREMA L.

Iiſdem poſitis, & quod motus ante incidentiam velocior ſit quam poſtea: dico quod corpus, inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem, & angulus reflexionis fiet æqualis angulo incidentiæ.

Nam concipe corpus inter parallela plana *Aa*, *Bb*, *Cc*, &c. deſcribere arcus parabolicos, ut ſupra; ſintque arcus illi *HP*, *PQ*, *QR*, &c. Et ſit ea lineæ incidentiæ *GH* obliquitas ad planum primum

mum *Aa*, ut ſinus incidentiæ ſit ad radium circuli, cujus eſt ſinus, in ea ratione quam habet idem ſinus incidentiæ ad ſinum emergentiæ ex plano *Dd*, in ſpatium *DdeE*: & ob ſinum emergentiæ jam factum æqualem radio, angulus emergentiæ erit rectus, ideoque linea emergentiæ coincidet cum plano *Dd*. Perveniat corpus ad hoc planum in puncto *R*; & quoniam linea emergentiæ coincidit cum eodem plano, perſpicuum eſt quod corpus non poteſt ultra pergere verſus planum *Ee*. Sed nec poteſt idem pergere in linea emergentiæ *Rd*, propterea quod perpetuo attrahitur vel impellitur verſus medium incidentiæ. Revertetur itaque inter plana *Cc*, *Dd*, deſcribendo arcum parabolæ *QRq*, cujus vertex principalis (juxta demonſtrata *Galilæi*) eſt in *R*; ſecabit planum *Cc* in eodem angulo in *q*, ac prius in *Q*; dein pergendo in arcubus parabolicis *qp*, *ph*, &c. arcubus prioribus *QP*, *PH* ſimilibus & æqualibus, ſecabit reliqua plana in iiſdem angulis in *p*, *h*, &c. ac prius in *P*, *H*, &c. emergetque tandem eadem obliquitate in *h*, qua incidit in *H*. Concipe jam planorum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, &c. intervalla in infinitum minui & numerum augeri, eo ut actio attractionis vel impulſus ſecundum legem quamcunque aſſignatam continua reddatur; & angulus emergentiæ ſemper angulo incidentiæ æqualis exiſtens, eidem etiamnum manebit æqualis. *Q.E.D.*



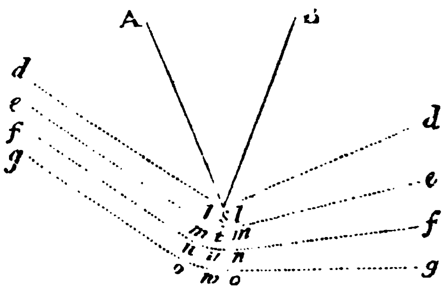
Scholium.

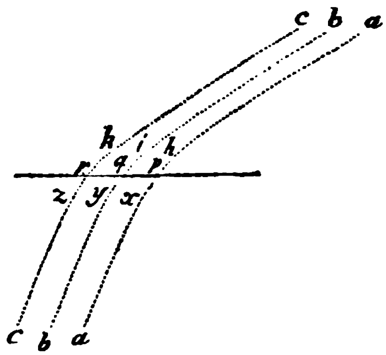
Harum attractionum haud multum diſſimiles ſunt lucis reflexiones & refractiones, factæ ſecundum datam ſecantium rationem, ut invenit *Snellius*, & per conſequens ſecundum datam ſinuum rationem, ut expoſuit *Carteſius*. Namque lucem ſucceſſive propagari & ſpatio quaſi ſeptem vel octo minutorum primorum a ſole ad terram venire, jam conſtat per phænomena ſatellitum *Jovis*, obſervationibus diverſorum aſtronomorum confirmata. Radii autem in aëre exiſtentes (uti dudum *Grimaldus*, luce per foramen in tenebroſum cubiculum admiſſa, invenit, & ipſe quoque expertus ſum) in tranſitu ſuo prope corporum vel opacorum vel perſpicuorum angulos (quales ſunt nummorum ex auro, argento & ære cuſorum termini

 rectanguli

De Motu Corporum

rectanguli circulares, & cultrorum, lapidum aut fractorum vitrorum acies) incurvantur circum corpora, quaſi attracti in eadem; & ex his radiis, qui in tranſitu illo propius accedunt ad corpora incurvantur magis, quaſi magis attracti, ut ipſe etiam diligenter obſervavi. Et qui tranſeunt ad majores diſtantias minus incurvantur; & ad diſtantias adhuc majores incurvantur aliquantulum ad partes contrarias, & tres colorum faſcias efformant. In figura deſignat *s* aciem cultri vel cunei cujuſvis *AsB*; & *gowog*, *fnunf*, *emtme*, *dlsld* ſunt radii, arcubus *owo*, *nun*, *mtm*, *lsl* verſus cultrum incurvati; idque magis vel minus pro diſtantia eorum a cultro. Cum autem talis incurvatio radiorum fiat in aere extra cultrum, debebunt etiam radii, qui incidunt in cultrum, prius incurvari in aere quam cultrum attingunt. Et par eſt ratio incidentium in vitrum. Fit igitur refractio, non in puncto incidentiæ, ſed paulatim per continuam incurvationem radiorum, factam partim in aere antequam attingunt vitrum, partim (ni fallor) in vitro, poſtquam illud ingreſſi ſunt: uti in radiis *ckzc*, *biyb*, *ahxa* incidentibus ad *r*, *q*, *p*, & inter *k* & *z*, *i* & *y*, *h* & *x* incurvatis, delineatum eſt. Igitur ob analogiam quæ eſt inter propagationem radiorum lucis & progreſſum corporum, viſum eſt propoſitiones ſequentes in uſus opticos ſubjungere; interea de natura radiorum (utrum ſint corpora necne) nihil omnino diſputans, ſed trajectorias corporum trajectoriis radiorum perſimiles ſolummodo determinans.



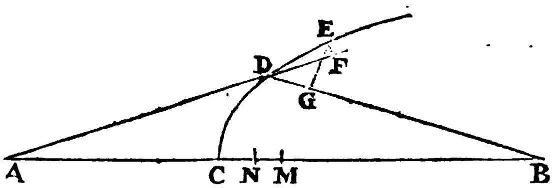


PROPO-

PROPOSITIO XCVII. PROBLEMA XLVII.

Poſito quod ſinus incidentiæ in ſuperficiem aliquam ſit ad ſinum emergentiæ in data ratione; quodque incurvatio viæ corporum juxta ſuperficiem illam fiat in ſpatio breviſſimo, quod ut punctum conſiderari poſſit: determinare ſuperficiem, quæ corpuſcula omnia de loco dato ſucceſſive manantia convergere faciat ad alium locum datum.

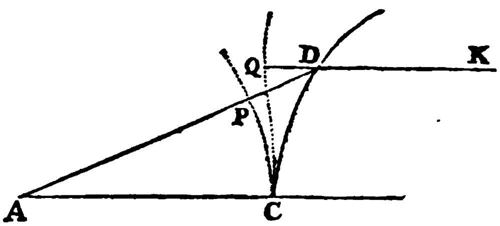
Sit *A* locus a quo corpuſcula divergunt; *B* locus in quem convergere debent; *CDE* curva linea quæ circa axem *AB* revoluta deſcribat ſuperficiem quæſitam; *D*, *E* curvæ illius puncta duo quævis; & *EF*, *EG* perpendicula in corporis vias *AD*, *DB* demiſſa. Accedat punctum *D* ad punctum *E*; & lineæ *DF*, qua *AD* augetur, ad lineam *DG*, qua *DB* diminuitur, ratio ultima erit eadem, quæ ſinus incidentiæ ad ſinum emergentiæ. Datur ergo ratio incrementi lineæ *AD* ad decrementum lineæ *DB*; & propterea ſi in axe *AB* ſumatur ubivis punctum *C*, per quod curva *CDE* tranſire debet, & capiatur ipſius *AC* incrementum *CM* ad ipſius *BC* decrementum *CN* in data illa ratione, centriſque *A*, *B*, & intervallis *AM*, *BN* deſcribantur circuli duo ſe mutuo ſecantes in *D*; punctum illud *D* tanget curvam quæſitam *CDE*, eandemque ubivis tangendo determinabit. *Q. E. I.*



Corol. 1. Faciendo autem ut punctum *A* vel *B* nunc abeat in infinitum, nunc migret ad alteras partes puncti *C*, habebuntur figuræ illæ omnes, quas *Carteſius* in optica & geometria ad refractiones expoſuit. Quarum inventionem cum *Carteſius* celaverit, viſum fuit hac propoſitione exponere.

Corol. 2. Si corpus in ſuperficiem quamvis *CD*, ſecundum lineam rectam *AD*, lege quavis ductam incidens, emergat ſecundum aliam quamvis rectam *DK*, & a puncto *C* duci intelligantur lineæ

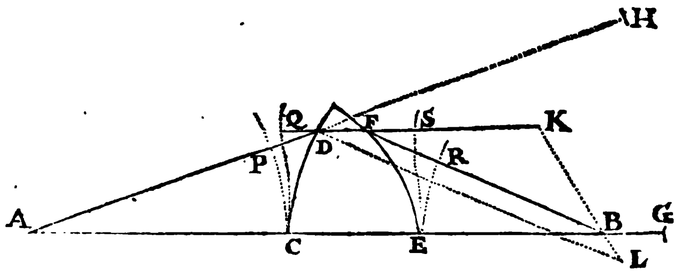
curvæ *CP*, *CQ* ipſis *AD*, *DK* ſemper perpendiculares: erunt incrementa linearum *PD*, *QD*, atque ideo lineæ ipſæ *PD*, *QD*, incrementis iſtis genitæ, ut ſinus incidentiæ & emergentiæ ad invicem: & contra.



PROPOSITIO XCVIII. PROBLEMA XLVIII.

Iiſdem poſitis, & circa axem AB *deſcripta ſuperficie quacunque attractiva* CD, *regulari vel irregulari, per quam corpora de loco dato* A *exeuntia tranſire debent: invenire ſuperficiem ſecundam attractivam* EF, *quæ corpora illa ad locum datum* B *convergere faciat.*

Juncta *AB* ſecet ſuperficiem primam in *C* & ſecundam in *E*, puncto *D* utcunque aſſumpto. Et poſito ſinu incidentiæ in ſuperficiem primam ad ſinum emergentiæ ex eadem, & ſinu emergentiæ e ſuperficie ſecunda ad ſinum incidentiæ in eandem, ut quantitas aliqua data M ad aliam datam N: produc tum *AB* ad *G*, ut ſit *BG*



ad *CE* ut M—N ad N; tum *AD* ad *H*, ut ſit *AH* æqualis *AG*; tum etiam *DF* ad *K*, ut ſit *DK* ad *DH* ut N ad M. Junge *KB*, & centro *D* intervallo *DH* deſcribe circulum occurrentem *KB* productæ in *L*, ipſique *DL* parallelam age *BF*: & punctum *F* tanget lineam *EF*, quæ circa axem *AB* revoluta deſcribet ſuperficiem quæſitam. *Q. E. F.*

Nam

Nam concipe lineas *CP*, *CQ* ipſis *AD*, *DF* reſpective, & lineas *ER*, *ES* ipſis *FB*, *FD* ubique perpendiculares eſſe, ideoque *QS* ipſi *CE* ſemper æqualem; & erit (per corol. 2. prop. xcvii.) *PD* ad *QD* ut M ad N, ideoque ut *DL* ad *DK* vel *FB* ad *FK*; & diviſim ut *DL*—*FB* ſeu *PH*—*PD*—*FB* ad *FD* ſeu *FQ*—*QD*; & compoſite ut *PH*—*FB* ad *FQ*, id eſt (ob æquales *PH* & *CG*, *QS* & *CE*) *CE*+*BG*—*FR* ad *CE*—*FS*. Verum (ob proportionales *BG* ad *CE* & M—N ad N) eſt etiam *CE*+*BG* ad *CE* ut M ad N; ideoque diviſim *FR* ad *FS* ut M ad N; & propterea (per corol. 2. prop. xcvii.) ſuperficies *EF* cogit corpus, in ipſam ſecundum lineam *DF* incidens, pergere in linea *FR* ad locum *B*. *Q. E. D.*

Scholium.

Eadem methodo pergere liceret ad ſuperficies tres vel plures. Ad uſus autem opticos maxime accommodatæ ſunt figuræ ſphæricæ. Si perſpicillorum vitra objectiva ex vitris duobus ſphærice figuratis & aquam inter ſe claudentibus conflentur; fieri poteſt ut a refractionibus aquæ errores refractionum, quæ fiunt in vitrorum ſuperficiebus extremis, ſatis accurate corrigantur. Talia autem vitra objectiva vitris ellipticis & hyperbolicis præferenda ſunt, non ſolum quod facilius & accuratius formari poſſint, ſed etiam quod penicillos radiorum extra axem vitri ſitos accuratius refringant. Veruntamen diverſa diverſorum radiorum refrangibilitas impedimento eſt, quo minus optica per figuras vel ſphæricas vel alias quaſcunque perfici poſſit. Niſi corrigi poſſint errores illinc oriundi, labor omnis in cæteris corrigendis imperite collocabitur.

DE
MOTU CORPORUM
LIBER SECUNDUS.

SECTIO I.

De motu corporum quibus reſiſtitur in ratione velocitatis.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Corporis, cui reſiſtitur in ratione velocitatis, motus ex reſiſtentia amiſſus eſt ut ſpatium movendo confectum.

NAM cum motus ſingulis temporis particulis æqualibus amiſſus ſit ut velocitas, hoc eſt, ut itineris confecti particula: erit, componendo, motus toto tempore amiſſus ut iter totum. *Q. E. D.*

Corol. Quare ſi corpus, gravitate omni deſtitutum, in ſpatiis liberis ſola vi inſita moveatur; ac detur tum motus totus ſub initio, tum etiam motus reliquus poſt ſpatium aliquod confectum: dabitur ſpatium totum quod corpus infinito tempore deſcribere poteſt. Erit enim ſpatium illud ad ſpatium jam deſcriptum, ut motus totus ſub initio ad motus illius partem amiſſam.

LEMMA I.

Quantitates differentiis ſuis proportionales ſunt continue proportionales.

Sit A ad A—B ut B ad B—C & C ad C—D, &c. & convertendo fiet A ad B ut B ad C & C ad D, &c. *Q. E. D.*

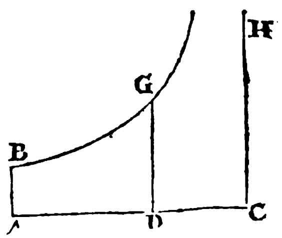
PROPO-

PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Si corpori reſiſtitur in ratione velocitatis, & idem ſola vi inſita per medium ſimilare moveatur, ſumantur autem tempora æqualia: velocitates in principiis ſingulorum temporum ſunt in progreſſione geometrica, & ſpatia ſingulis temporibus deſcripta ſunt ut velocitates.

Caſ. 1. Dividatur tempus in particulas æquales; & ſi ipſis particularum initiis agat vis reſiſtentiæ impulſu unico, quæ ſit ut velocitas: erit decrementum velocitatis ſingulis temporis particulis ut eadem velocitas. Sunt ergo velocitates differentiis ſuis proportionales, & propterea (per lem. 1. lib. II.) continue proportionales. Proinde ſi ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, erunt velocitates ipſis temporum initiis, ut termini in progreſſione continua, qui per ſaltum capiuntur, omiſſo paſſim æquali terminorum intermediorum numero. Componuntur autem horum terminorum rationes ex rationibus inter ſe iiſdem terminorum intermediorum æqualiter repetitis, & propterea eæ quoque rationes compoſitæ inter ſe eædem ſunt. Igitur velocitates, his terminis proportionales, ſunt in progreſſione geometrica. Minuantur jam æquales illæ temporum particulæ, & augeatur earum numerus in infinitum, eo ut reſiſtentiæ impulſus reddatur continuus; & velocitates in principiis æqualium temporum, ſemper continue proportionales, erunt in hoc etiam caſu continue proportionales. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Et diviſim velocitatum differentiæ, hoc eſt, earum partes ſingulis temporibus amiſſæ, ſunt ut totæ: ſpatia autem ſingulis temporibus deſcripta ſunt ut velocitatum partes amiſſæ (per prop. 1. lib. II.) & propterea etiam ut totæ. *Q. E. D.*



Corol. Hinc ſi aſymptotis rectangulis *AC*, *CH* deſcribatur hyperbola *BG*, ſintque *AB*, *DG* ad aſymptoton *AC* perpendiculares, & exponatur tum corporis velocitas tum reſiſtentia medii, ipſo motus initio, per lineam quamvis datam *AC*, elapſo autem tempore aliquo per lineam indefinitam *DC*: exponi poteſt tempus per aream *ABGD*, & ſpatium

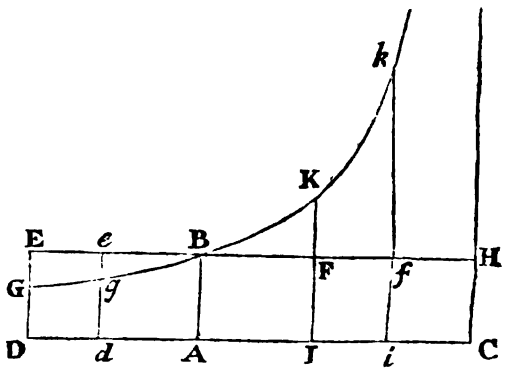
eo

eo tempore deſcriptum per lineam *AD*. Nam ſi area illa per motum puncti *D* augeatur uniformiter ad modum temporis, decreſcet recta *DC* in ratione geometrica ad modum velocitatis, & partes rectæ *AC* æqualibus temporibus deſcriptæ decreſcent in eadem ratione.

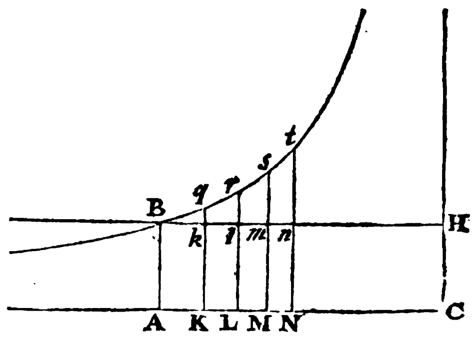
PROPOSITIO III. PROBLEMA I.

Corporis, cui, dum in medio ſimilari recta aſcendit vel deſcendit, reſiſtitur in ratione velocitatis, quodque ab uniformi gravitate urgetur, definire motum.

Corpore aſcendente, exponatur gravitas per datum quodvis rectangulum *BACH*, & reſiſtentia medii initio aſcenſus per rectangulum *BADE* ſumptum ad contrarias partes rectæ *AB*. Aſymptotis rectangulis *AC*, *CH*, per punctum *B* deſcribatur hyperbola ſecans perpendicula *DE*, *de* in *G*, *g*; & corpus aſcendendo tempore *DGgd* deſcribet ſpatium *EGge*, tempore *DGBA* ſpatium aſcenſus totius *EGB*; tempore *ABKI* ſpatium deſcenſus *BFK*, atque tempore *IKki* ſpatium deſcenſus *KFfk*; & velocitates corporis (reſiſtentiæ medii proportionales) in horum temporum periodis erunt *ABED*, *ABed*, nulla, *ABFI*, *ABfi* reſpective; atque maxima velocitas, quam corpus deſcendendo poteſt acquirere, erit *BACH*.



Reſolvatur enim rectangulum *BACH* in rectangula innumera *Ak*, *Kl*, *Lm*, *Mn*, &c. quæ ſint ut incrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta; & erunt nihil, *Ak*, *Al*, *Am*, *An*, &c. ut velocitates totæ, atque ideo (per hypotheſin) ut reſiſtentiæ medii principio ſingulorum temporum æquali-



um.

um. Fiat *AC* ad *AK* vel *ABHC* ad *ABkK* ut vis gravitatis ad reſiſtentiam in principio temporis ſecundi, deque vi gravitatis ſubducantur reſiſtentiæ, & manebunt *ABHC*, *KkHC*, *LlHC*, *MmHC*, &c. ut vires abſolutæ quibus corpus in principio ſingulorum temporum urgetur, atque ideo (per motus legem II.) ut incrementa velocitatum, id eſt, ut rectangula *Ak*, *Kl*, *Lm*, *Mn*, &c. & propterea (per lem. I. lib. II.) in progreſſione geometrica. Quare ſi rectæ *Kk*, *Ll*, *Mm*, *Nn*, &c. productæ occurrant hyperbolæ in *q*, *r*, *s*, *t*, &c. erunt areæ *ABqK*, *KqrL*, *LrsM*, *MstN*, &c. æquales, ideoque tum temporibus tum viribus gravitatis ſemper æqualibus analogæ. Eſt autem area *ABqK* (per corol. 3. lem. VII. & lem. VIII. lib. I.) ad aream *Bkq* ut *Kq* ad $\frac{1}{2}$*kq* ſeu *AC* ad $\frac{1}{2}$*AK*, hoc eſt, ut vis gravitatis ad reſiſtentiam in medio temporis primi. Et ſimili argumento areæ *qKLr*, *rLMs*, *sMNt*, &c. ſunt ad areas *qklr*, *rlms*, *smnt*, &c. ut vires gravitatis ad reſiſtentias in medio temporis ſecundi, tertii, quarti, &c. Proinde cum areæ æquales *BAKq*, *qKLr*, *rLMs*, *sMNt*, &c. ſint viribus gravitatis analogæ, erunt areæ *Bkq*, *qklr*, *rlms*, *smnt*, &c. reſiſtentiis in mediis ſingulorum temporum, hoc eſt (per hypotheſin) velocitatibus, atque ideo deſcriptis ſpatiis analogæ. Sumantur analogarum ſummæ, & erunt areæ *Bkq*, *Blr*, *Bms*, *Bnt*, &c. ſpatiis totis deſcriptis analogæ; necnon areæ *ABqK*, *ABrL*, *ABsM*, *ABtN*, &c. temporibus. Corpus igitur inter deſcendendum, tempore quovis *ABrL*, deſcribit ſpatium *Blr*, & tempore *LrtN* ſpatium *rlnt*. *Q. E. D.* Et ſimilis eſt demonſtratio motus expoſiti in aſcenſu. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur velocitas maxima, quam corpus cadendo poteſt acquirere, eſt ad velocitatem dato quovis tempore acquiſitam, ut vis data gravitatis, qua corpus illud perpetuo urgetur, ad vim reſiſtentiæ, qua in fine temporis illius impeditur.

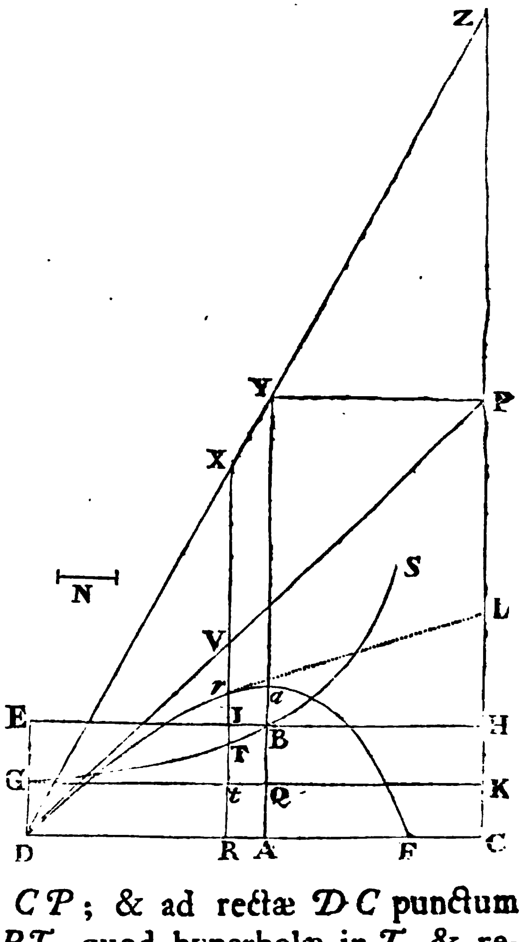
Corol. 2. Tempore autem aucto in progreſſione arithmetica, ſumma velocitatis illius maximæ ac velocitatis in aſcenſu, atque etiam earundem differentia in deſcenſu decreſcit in progreſſione geometrica.

Corol. 3. Sed & differentiæ ſpatiorum, quæ in æqualibus temporum differentiis deſcribuntur, decreſcunt in eadem progreſſione geometrica.

Corol. 4. Spatium vero a corpore deſcriptum differentia eſt duorum ſpatiorum, quorum alterum eſt ut tempus ſumptum ab initio deſcenſus, & alterum ut velocitas, quæ etiam ipſo deſcenſus initio æquantur inter ſe.

PROPOSITIO IV. PROBLEMA II.

Poſito quod vis gravitatis in medio aliquo ſimilari uniformis ſit, ac tendat perpendiculariter ad planum horizontis; definire motum projectilis in eodem, reſiſtentiam velocitati proportionalem patientis.



E loco quovis *D* egrediatur projectile ſecundum lineam quamvis rectam *DP*, & per longitudinem *DP* exponatur ejuſdem velocitas ſub initio motus. A puncto *P* ad lineam horizontalem *DC* demittatur perpendiculum *PC*, & ſecetur *DC* in *A*, ut ſit *DA* ad *AC* ut reſiſtentia medii, ex motu in altitudinem ſub initio orta, ad vim gravitatis; vel (quod perinde eſt) ut ſit rectangulum ſub *DA* & *DP* ad rectangulum ſub *AC* & *CP* ut reſiſtentia tota ſub initio motus ad vim gravitatis. Aſymptotis *DC*, *CP* deſcribatur hyperbola quævis *GTBS* ſecans perpendicula *DG*, *AB* in *G* & *B*; & compleatur parallelogrammum *DGKC*, cujus latus *GK* ſecet *AB* in *Q*. Capiatur linea N in ratione ad *QB* qua *DC* ſit ad *CP*; & ad rectæ *DC* punctum quodvis *R* erecto perpendiculo *RT*, quod hyperbolæ in *T*, & rectis *EH*, *GK*, *DP* in *I*, *t* & *V* occurrat; in eo cape *Vr* æqualem *tGT*,

$\frac{tGT}{N}$, vel quod perinde eſt, cape Rr æqualem $\frac{GTIE}{N}$; & projectile tempore $DRTG$ perveniet ad punctum r, deſcribens curvam lineam $DraF$, quam punctum r ſemper tangit, perveniens autem ad maximam altitudinem a in perpendiculo AB, & poſtea ſemper appropinquans ad aſymptoton PC. Eſtque velocitas ejus in puncto quovis r ut curvæ tangens rL. *Q. E. I.*

Eſt enim N ad QB ut DC ad CP ſeu DR ad RV, ideoque RV æqualis $\frac{DR \times QB}{N}$, & Rr (id eſt $RV - Vr$ ſeu $\frac{DR \times QB - tGT}{N}$) æqualis $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$. Exponatur jam tempus per aream $RDGT$, & (per legum corol. 2.) diſtinguatur motus corporis in duos, unum aſcenſus, alterum ad latus. Et cum reſiſtentia ſit ut motus, diſtinguetur etiam hæc in partes duas partibus motus proportionales & contrarias: ideoque longitudo, a motu ad latus deſcripta, erit (per prop. II. hujus) ut linea DR, altitudo vero (per prop. III. hujus) ut area $DR \times AB - RDGT$, hoc eſt, ut linea Rr. Ipſo autem motus initio area $RDGT$ æqualis eſt rectangulo $DR \times AQ$, ideoque linea illa Rr (ſeu $\frac{DR \times AB - DR \times AQ}{N}$) tunc eſt ad DR ut $AB - AQ$ ſeu QB ad N, id eſt, ut CP ad DC; atque ideo ut motus in altitudinem ad motum in longitudinem ſub initio. Cum igitur Rr ſemper ſit ut altitudo, ac DR ſemper ut longitudo, atque Rr ad DR ſub initio ut altitudo ad longitudinem: neceſſe eſt ut Rr ſemper ſit ad DR ut altitudo ad longitudinem, & propterea ut corpus moveatur in linea $DraF$, quam punctum r perpetuo tangit. *Q. E. D.*

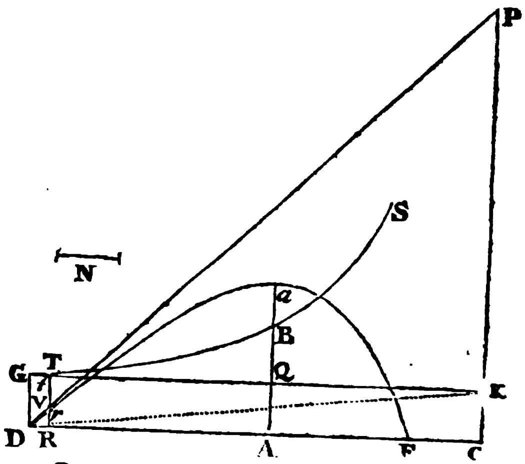
Corol. 1. Eſt igitur Rr æqualis $\frac{DR \times AB}{N} - \frac{RDGT}{N}$: ideoque ſi producatur RT ad X ut ſit RX æqualis $\frac{DR \times AB}{N}$; id eſt, ſi compleatur parallelogrammum $ACPY$, jungatur DY ſecans CP in Z, & producatur RT donec occurrat DY in X; erit Xr æqualis $\frac{RDGT}{N}$, & propterea tempori proportionalis.

Corol. 2. Unde ſi capiantur innumeræ CR, vel, quod perinde eſt, innumeræ ZX in progreſſione geometrica; erunt totidem Xr in

 progreſ-

progreſſione arithmetica. Et hinc curva *DraF* per tabulam logarithmorum facile delineatur.

Corol. 3. Si vertice *D*, diametro *DG* deorſum producta, & latere recto quod ſit ad 2 *DP* ut reſiſtentia tota ipſo motus initio ad vim gravitatis, parabola conſtruatur: velocitas quacum corpus exire debet de loco *D* ſecundum rectam *DP*, ut in medio uniformi reſiſtente deſcribat curvam *DraF*, ea ipſa erit quacum exire debet de eodem loco *D*, ſecundum eandem rectam *DP*, ut in ſpatio non reſiſtente deſcribat parabolam.

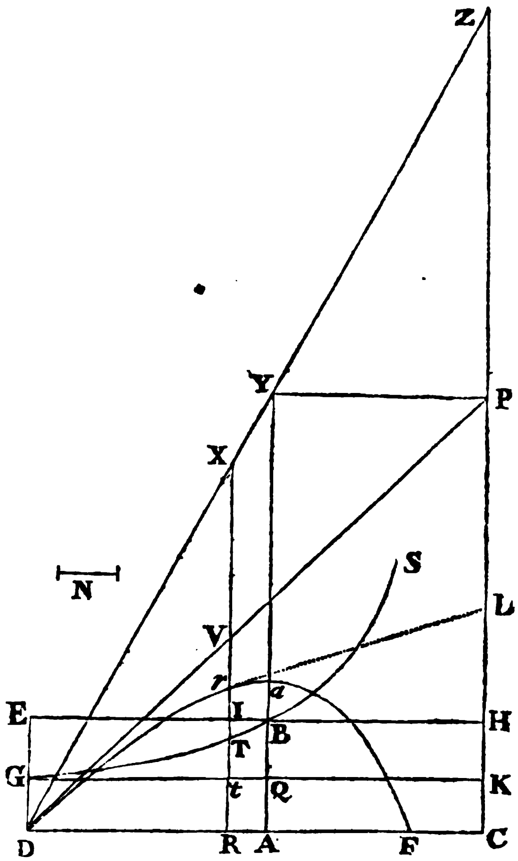


Nam latus rectum parabolæ hujus, ipſo motus initio, eſt $\frac{DV\ quad.}{Vr}$; & Vr eſt $\frac{tGT}{N}$ ſeu $\frac{DR \times Tt}{2N}$. Recta autem quæ, ſi duceretur, hyperbolam *GTS* tangeret in *G*, parallela eſt ipſi *DK*, ideoque Tt eſt $\frac{CK \times DR}{DC}$, & N erat $\frac{QB \times DC}{CP}$. Et propterea Vr eſt $\frac{DRq \times CK \times CP}{2DCq \times QB}$, id eſt (ob proportionales *DR* & *DC*, *DV* & *DP*) $\frac{DVq \times CK \times CP}{2DPq \times QB}$, & latus rectum $\frac{DV\ quad.}{Vr}$ prodit $\frac{2DPq \times QB}{CK \times CP}$, id eſt (ob proportionales *QB* & *CK*, *DA* & *AC*) $\frac{2DPq \times DA}{AC \times CP}$, ideoque ad 2 *DP*, ut $DP \times DA$ ad $CP \times AC$; hoc eſt, ut reſiſtentia ad gravitatem. *Q. E. D.*

Corol. 4. Unde ſi corpus de loco quovis *D*, data cum velocitate, ſecundum rectam quamvis poſitione datam *DP* projiciatur; & reſiſtentia medii ipſo motus initio detur: inveniri poteſt curva *DraF*, quam corpus idem deſcribet. Nam ex data velocitate datur latus rectum parabolæ, ut notum eſt. Et ſumendo 2 *DP* ad latus illud rectum, ut eſt vis gravitatis ad vim reſiſtentiæ, datur *DP*. Dein

ſecando

ſecando *DC* in *A*, ut ſit *CP*×*AC* ad *DP*×*DA* in eadem illa ratione gravitatis ad reſiſtentiam, dabitur punctum *A*. Et inde datur curva *DraF*.

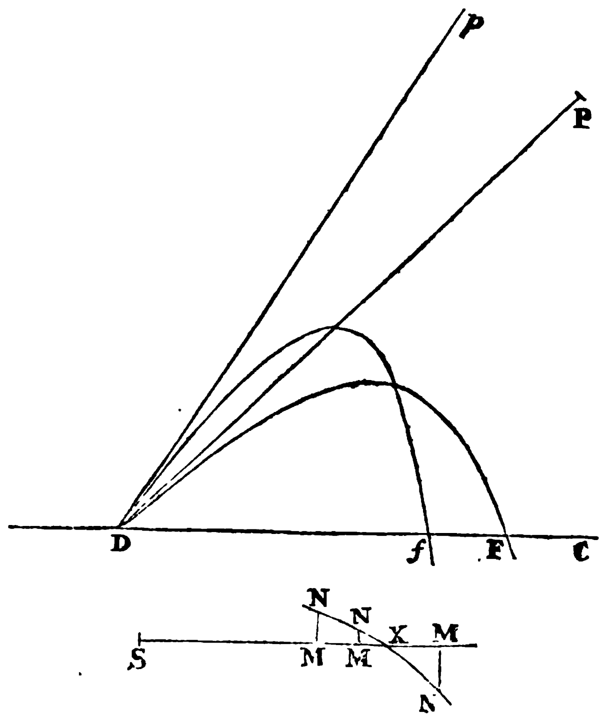


Corol. 5. Et contra, ſi datur curva *DraF*, dabitur & velocitas corporis & reſiſtentia medii in locis ſingulis *r*. Nam ex data ratione *CP*×*AC* ad *DP*×*DA*, datur tum reſiſtentia medii ſub initio motus, tum latus rectum parabolæ: & inde datur etiam velocitas ſub initio motus. Deinde ex longitudine tangentis *rL*, datur & huic proportionalis velocitas, & velocitati proportionalis reſiſtentia in loco quovis *r*.

Corol. 6. Cum autem longitudo 2*DP* ſit ad latus rectum parabolæ ut gravitas ad reſiſtentiam in *D*; & ex aucta velocitate augeatur reſiſtentia in eadem ratione, at latus rectum parabolæ augeatur in ratione illa duplicata: patet longitudinem 2*DP* augeri in ratione illa ſimplici, ideoque velocitati ſemper proportionalem eſſe, neque ex angulo *CDP* mutato augeri vel minui, niſi mutetur quoque velocitas.

Corol. 7. Unde liquet methodus determinandi curvam *DraF* ex phænomenis quamproxime, & inde colligendi reſiſtentiam & velocitatem quacum corpus projicitur. Projiciantur corpora duo ſimilia & æqualia eadem cum velocitate, de loco *D*, ſecundum angulos diverſos *CDP*, *CDp* & cognoſcantur loca *F*, *f*, ubi incidunt in horizontale planum *DC*. Tum, aſſumpta quacunque longitudine pro *DP* vel *Dp*, fingatur quod reſiſtentia in *D* ſit ad gravitatem in ratione qualibet, & exponatur ratio illa per longitudinem quamvis *SM*.
Deinde

Deinde per computationem, ex longitudine illa aſſumpta *DP*, inveniantur longitudines *DF*, *Df*, ac de ratione $\frac{Ff}{DF}$ per calculum inventa, auferatur ratio eadem per experimentum inventa, & exponatur differentia per perpendiculum *MN*. Idem fac iterum ac tertio, aſſumendo ſemper novam reſiſtentiæ ad gravitatem rationem *SM*, & colligendo novam differentiam *MN*. Ducantur autem differentiæ affirmativæ ad unam partem rectæ *SM*, & negativæ ad



alteram; & per puncta *N*, *N*, *N* agatur curva regularis *NNN* ſecans rectam *SMMM* in *X*, & erit *SX* vera ratio reſiſtentiæ ad gravitatem, quam invenire oportuit. Ex hac ratione colligenda eſt longitudo *DF* per calculum; & longitudo, quæ ſit ad aſſumptam longitudinem *DP*, ut longitudo *DF* per experimentum cognita ad longitudinem *DF* modo inventam, erit vera longitudo *DP*. Qua inventa, habetur tum curva linea *DraF* quam corpus deſcribit, tum corporis velocitas & reſiſtentia in locis ſingulis.

Scholium.

Scholium.

Cæterum, reſiſtentiam corporum eſſe in ratione velocitatis, hypotheſis eſt magis mathematica quam naturalis. In mediis, quæ rigore omni vacant, reſiſtentiæ corporum ſunt in duplicata ratione velocitatum. Etenim actione corporis velocioris communicatur eidem medii quantitati, tempore minore, motus major in ratione majoris velocitatis; ideoque tempore æquali, ob majorem medii quantitatem perturbatam, communicatur motus in duplicata ratione major; eſtque reſiſtentia (per motus leg. II. & III.) ut motus communicatus. Videamus igitur quales oriantur motus ex hac lege reſiſtentiæ.

SECTIO II.

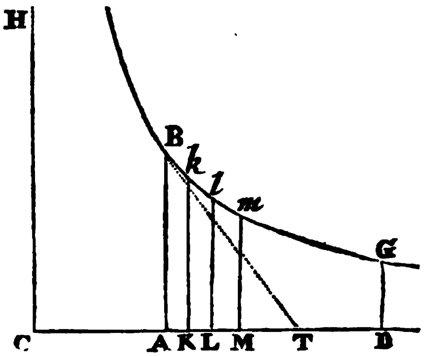
De motu corporum quibus reſiſtitur in duplicata ratione velocitatum.

PROPOSITIO V. THEOREMA III.

Si corpori reſiſtitur in velocitatis ratione duplicata, & idem ſola vi inſita per medium ſimilare movetur; tempora vero ſumantur in progreſſione geometrica a minoribus terminis ad majores pergente: dico quod velocitates initio ſingulorum temporum ſunt in eadem progreſſione geometrica inverſe; & quod ſpatia ſunt æqualia, quæ ſingulis temporibus deſcribuntur.

Nam quoniam quadrato velocitatis proportionalis eſt reſiſtentia medii, & reſiſtentiæ proportionale eſt decrementum velocitatis; ſi tempus in particulas innumeras æquales dividatur, quadrata velocitatum ſingulis temporum initiis erunt velocitatum earundem differentiis proportionalia. Sunto temporis particulæ illæ AK, KL, LM, &c. in recta CD ſumptæ, & erigantur perpendicula AB, Kk,

Kk, *Ll*, *Mm*, &c. hyperbolæ *BklmG*, centro *C* aſymptotis rectangulis *CD*, *CH* deſcriptæ, occurrentia in *B*, *k*, *l*, *m*, &c. & erit *AB* ad *Kk* ut *CK* ad *CA*, & diviſim *AB*—*Kk* ad *Kk* ut *AK* ad *CA*, & viciſſim *AB*—*Kk* ad *AK* ut *Kk* ad *CA*, ideoque ut *AB* × *Kk* ad *AB* × *CA*. Unde, cum *AK* & *AB* × *CA* dentur, erit *AB* —*Kk* ut *AB* × *Kk*; & ultimo, ubi coeunt *AB* & *Kk*, ut *ABq*. Et ſimili argumento erunt *Kk*—*Ll*, *Ll*—*Mm*, &c. ut *Kk quad.* *Ll quad.* &c. Linearum igitur *AB*, *Kk*, *Ll*, *Mm* quadrata ſunt ut earundem differentiæ; & idcirco cum quadrata velocitatum fuerint etiam ut ipſarum differentiæ, ſimilis erit ambarum progreſſio. Quo demonſtrato, conſequens eſt etiam ut areæ his lineis deſcriptæ ſint in progreſſione conſimili cum ſpatiis quæ velocitatibus deſcribuntur. Ergo ſi velocitas initio primi temporis *AK* exponatur per lineam *AB*, & velocitas initio ſecundi *KL* per lineam *Kk*, & longitudo primo tempore deſcripta per aream *AKkB*; velocitates omnes ſubſequentes exponentur per lineas ſubſequentes *Ll*, *Mm*, &c. & longitudines deſcriptæ per areas *Kl*, *Lm*, &c. Et compoſite, ſi tempus totum exponatur per ſummam partium ſuarum *AM*, longitudo tota deſcripta exponetur per ſummam partium ſuarum *AMmB*. Concipe jam tempus *AM* ita dividi in partes *AK*, *KL*, *LM*, &c. ut ſint *CA*, *CK*, *CL*, *CM*, &c. in progreſſione geometrica; & erunt partes illæ in eadem progreſſione, & velocitates *AB*, *Kk*, *Ll*, *Mm*, &c. in progreſſione eadem inverſa, atque ſpatia deſcripta *Ak*, *Kl*, *Lm*, &c. æqualia. *Q. E. D.*



Corol. 1. Patet ergo quod, ſi tempus exponatur per aſymptoti partem quamvis *AD*, & velocitas in principio temporis per ordinatim applicatam *AB*; velocitas in fine temporis exponetur per ordinatam *DG*, & ſpatium totum deſcriptum per aream hyperbolicam adjacentem *ABGD*; necnon ſpatium, quod corpus aliquod eodem tempore *AD*, velocitate prima *AB*, in medio non reſiſtente deſcribere poſſet, per rectangulum *AB* × *AD*.

Corol. 2. Unde datur ſpatium in medio reſiſtente deſcriptum, capiendo illud ad ſpatium quod velocitate uniformi *AB* in medio non

non reſiſtente ſimul deſcribi poſſet, ut eſt area hyperbolica *ABGD* ad rectangulum *AB* × *AD*.

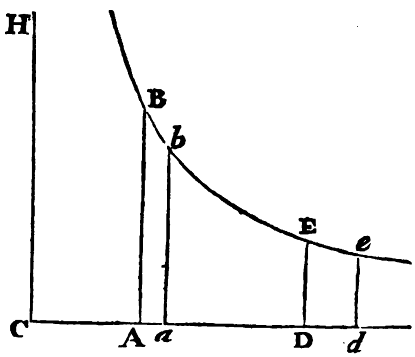
Corol 3. Datur etiam reſiſtentia medii, ſtatuendo eam ipſo motus initio æqualem eſſe vi uniformi centripetæ, quæ in cadente corpore, tempore *AC*, in medio non reſiſtente, generare poſſet velocitatem *AB*. Nam ſi ducatur *BT* quæ tangat hyperbolam in *B*, & occurrat aſymptoto in *T*; recta *AT* æqualis erit ipſi *AC*, & tempus exponet, quo reſiſtentia prima uniformiter continuata tollere poſſet velocitatem totam *AB*.

Corol. 4. Et inde datur etiam proportio hujus reſiſtentiæ ad vim gravitatis, aliamve quamvis datam vim centripetam.

Corol. 5. Et vice verſa, ſi datur proportio reſiſtentiæ ad datam quamvis vim centripetam; datur tempus *AC*, quo vis centripeta reſiſtentiæ æqualis generare poſſit velocitatem quamvis *AB*: & inde datur punctum *B* per quod hyperbola, aſymptotis *CH*, *CD*, deſcribi debet; ut & ſpatium *ABGD*, quod corpus incipiendo motum ſuum cum velocitate illa *AB*, tempore quovis *AD*, in medio ſimilari reſiſtente deſcribere poteſt.

PROPOSITIO VI. THEOREMA IV.

Corpora ſphærica homogenea & æqualia, reſiſtentiis in duplicata ratione velocitatum impedita, & ſolis viribus inſitis incitata, temporibus, quæ ſunt reciproce ut velocitates ſub initio, deſcribunt ſemper æqualia ſpatia, & amittunt partes velocitatum proportionales totis.



Aſymptotis rectangulis *CD*, *CH* deſcripta hyperbola quavis *BbEe* ſecante perpendicula *AB*, *ab*, *DE*, *de*, in *B*, *b*, *E*, *e*, exponantur velocitates initiales per perpendicula *AB*, *DE*, & tempora per lineas *Aa*, *Dd*. Eſt ergo ut *Aa* ad *Dd* ita (per hypotheſin) *DE* ad *AB*, & ita (ex natura hyperbolæ) *CA* ad *CD*; & componendo, ita *Ca* ad *Cd*. Ergo areæ *ABba*, *DEed*, hoc eſt, ſpatia deſcripta æquan-

tur inter ſe, & velocitates primæ *AB*, *DE* ſunt ultimis *ab*, *de*, & propterea dividendo partibus etiam ſuis amiſſis *AB—ab*, *DE—de* proportionales. *Q. E. D.*

PROPOSITIO VII. THEOREMA V.

Corpora ſphærica quibus reſiſtitur in duplicata ratione velocitatum, temporibus, quæ ſunt ut motus primi directe & reſiſtentiæ primæ inverſe, amittent partes motuum proportionales totis, & ſpatia deſcribent temporibus iſtis & velocitatibus primis conjunctim proportionalia.

Namque motuum partes amiſſæ ſunt ut reſiſtentiæ & tempora conjunctim. Igitur ut partes illæ ſint totis proportionales, debebit reſiſtentia & tempus conjunctim eſſe ut motus. Proinde tempus erit ut motus directe & reſiſtentia inverſe. Quare temporum particulis in ea ratione ſumptis, corpora amittent ſemper particulas motuum proportionales totis, ideoque retinebunt velocitates velocitatibus ſuis primis ſemper proportionales. Et ob datam velocitatum rationem, deſcribent ſemper ſpatia, quæ ſunt ut velocitates primæ & tempora conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur ſi æquivelocibus corporibus reſiſtitur in duplicata ratione diametrorum: globi homogenei quibuſcunque cum velocitatibus moti, deſcribendo ſpatia diametris ſuis proportionalia, amittent partes motuum proportionales totis. Motus enim globi cujuſque erit ut ejus velocitas & maſſa conjunctim, id eſt, ut velocitas & cubus diametri; reſiſtentia (per hypotheſin) erit ut quadratum diametri & quadratum velocitatis conjunctim; & tempus (per hanc propoſitionem) eſt in ratione priore directe & ratione poſteriore inverſe, id eſt, ut diameter directe & velocitas inverſe; ideoque ſpatium, tempori & velocitati proportionale, eſt ut diameter.

Corol. 2. Si æquivelocibus corporibus reſiſtitur in ratione ſeſquiplicata diametrorum: globi homogenei quibuſcunque cum velocitatibus moti, deſcribendo ſpatia in ſeſquiplicata ratione diametrorum, amittent partes motuum proportionales totis.

Corol. 3. Et univerſaliter, ſi æquivelocibus corporibus reſiſtitur in ratione dignitatis cujuſcunque diametrorum: ſpatia quibus globi homogenei, quibuſcunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum

motuum proportionales totis, erunt ut cubi diametrorum ad dignitatem illam applicati. Sunto diametri D & E; & ſi reſiſtentiæ, ubi velocitates æquales ponuntur, ſint ut D^n & E^n: ſpatia quibus globi, quibuſcunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut D^{3-n} & E^{3-n}. Et propterea globi homogenei deſcribendo ſpatia ipſis D^{3-n} & E^{3-n} proportionalia, retinebunt velocitates in eadem ratione ad invicem ac ſub initio.

Corol. 4. Quod ſi globi non ſint homogenei, ſpatium a globo denſiore deſcriptum augeri debet in ratione denſitatis. Motus enim, ſub pari velocitate, major eſt in ratione denſitatis, & tempus (per hanc propoſitionem) augetur in ratione motus directe, ac ſpatium deſcriptum in ratione temporis.

Corol. 5. Et ſi globi moveantur in mediis diverſis; ſpatium in medio, quod cæteris paribus magis reſiſtit, diminuendum erit in ratione majoris reſiſtentiæ. Tempus enim (per hanc propoſitionem) diminuetur in ratione reſiſtentiæ auctæ, & ſpatium in ratione temporis.

LEMMA II.

Momentum genitæ æquatur momentis laterum ſingulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum & coefficientia continue ductis.

Genitam voco quantitatem omnem, quæ ex lateribus vel terminis quibuſcunque in arithmetica per multiplicationem, diviſionem, & extractionem radicum; in geometria per inventionem vel contentorum & laterum, vel extremarum & mediarum proportionalium, ſine additione & ſubductione generatur. Ejuſmodi quantitates ſunt facti, quoti, radices, rectangula, quadrata, cubi, latera quadrata, latera cubica, & ſimiles. Has quantitates, ut indeterminatas & inſtabiles, & quaſi motu fluxuve perpetuo creſcentes vel decreſcentes, hic conſidero; & earum incrementa vel decrementa momentanea ſub nomine momentorum intelligo: ita ut incrementa pro momentis addititiis ſeu affirmativis, ac decrementa pro ſubductitiis ſeu negativis habeantur. Cave tamen intellexeris particulas finitas. Particulæ finitæ non ſunt momenta, ſed quantitates ipſæ ex momentis genitæ. Intelligenda ſunt principia jamjam naſcentia finita-

rum magnitudinum. Neque enim ſpectatur in hoc lemmate magnitudo momentorum, ſed prima naſcentium proportio. Eodem recidit ſi loco momentorum uſurpentur vel velocitates incrementorum ac decrementorum (quas etiam motus, mutationes & fluxiones quantitatum nominare licet) vel finitæ quævis quantitates velocitatibus hiſce proportionales. Lateris autem cujuſque generantis coefficiens eſt quantitas, quæ oritur applicando genitam ad hoc latus.

Igitur ſenſus lemmatis eſt, ut, ſi quantitatum quarumcunque perpetuo motu creſcentium vel decreſcentium A, B, C, &c. momenta, vel his proportionales mutationum velocitates dicantur a, b, c, &c. momentum vel mutatio geniti rectanguli AB fuerit $aB + bA$, & geniti contenti ABC momentum fuerit $aBC + bAC + cAB$: & genitarum dignitatum A^2, A^3, A^4, $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{3}{2}}$, $A^{\frac{1}{3}}$, $A^{\frac{2}{3}}$, A^{-1}, A^{-2}, & $A^{-\frac{1}{2}}$ momenta $2aA$, $3aA^2$, $4aA^3$, $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{3}{2}aA^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3}aA^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{3}aA^{-\frac{1}{3}}$, $-aA^{-2}$, $-2aA^{-3}$, & $-\frac{1}{2}aA^{-\frac{3}{2}}$ reſpective. Et generaliter, ut dignitatis cujuſcunque $A^{\frac{n}{m}}$ momentum fuerit $\frac{n}{m}aA^{\frac{n-m}{m}}$. Item ut genitæ A^2B momentum fuerit $2aAB + bA^2$; & genitæ $A^3B^4C^2$ momentum $3aA^2B^4C^2 + 4bA^3B^3C^2 + 2cA^3B^4C$; & genitæ $\frac{A^3}{B^2}$ ſive A^3B^{-2} momentum $3aA^2B^{-2} - 2bA^3B^{-3}$: & ſic in cæteris. Demonſtratur vero lemma in hunc modum.

Caſ. 1. Rectangulum quodvis motu perpetuo auctum AB, ubi de lateribus A & B deerant momentorum dimidia $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}b$, fuit $A - \frac{1}{2}a$ in $B - \frac{1}{2}b$, ſeu $AB - \frac{1}{2}aB - \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$; & quam primum latera A & B alteris momentorum dimidiis aucta ſunt, evadit $A + \frac{1}{2}a$ in $B + \frac{1}{2}b$ ſeu $AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$. De hoc rectangulo ſubducatur rectangulum prius, & manebit exceſſus $aB + bA$. Igitur laterum incrementis totis a & b generatur rectanguli incrementum $aB + bA$. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Ponatur AB ſemper æquale G, & contenti ABC ſeu GC momentum (per caſ. 1.) erit $gC + cG$, id eſt (ſi pro G & g ſcribantur AB & $aB + bA$) $aBC + bAC + cAB$. Et par eſt ratio contenti ſub lateribus quotcunque. *Q. E. D.*

Caſ.

Caſ. 3. Ponantur latera A, B, C ſibi mutuo ſemper æqualia; & ipſius A^2, id eſt rectanguli AB, momentum $aB+bA$ erit $2aA$, ipſius autem A^3, id eſt contenti ABC, momentum $aBC+bAC+cAB$ erit $3aA^2$. Et eodem argumento momentum dignitatis cujuſcunque A^n eſt naA^{n-1}. *Q. E. D.*

Caſ. 4. Unde cum $\frac{1}{A}$ in A ſit 1, momentum ipſius $\frac{1}{A}$ ductum in A, una cum $\frac{1}{A}$ ducto in a erit momentum ipſius 1, id eſt, nihil. Proinde momentum ipſius $\frac{1}{A}$ ſeu ipſius A^{-1} eſt $\frac{-a}{A^2}$. Et generaliter cum $\frac{1}{A^n}$ in A^n ſit 1, momentum ipſius $\frac{1}{A^n}$ ductum in A^n una cum $\frac{1}{A^n}$ in naA^{n-1} erit nihil. Et propterea momentum ipſius $\frac{1}{A^n}$ ſeu A^{-n} erit $-\frac{na}{A^{n+1}}$. *Q. E. D.*

Caſ. 5. Et cum $A^{\frac{1}{2}}$ in $A^{\frac{1}{2}}$ ſit A, momentum ipſius $A^{\frac{1}{2}}$ ductum in $2A^{\frac{1}{2}}$ erit a, per caſ. 3: ideoque momentum ipſius $A^{\frac{1}{2}}$ erit $\frac{a}{2A^{\frac{1}{2}}}$ ſive $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$. Et generaliter ſi ponatur $A^{\frac{m}{n}}$ æquale B, erit A^m æquale B^n, ideoque maA^{m-1} æquale nbB^{n-1}, & maA^{-1} æquale nbB^{-1} ſeu $nbA^{-\frac{m}{n}}$, ideoque $\frac{m}{n}aA^{\frac{m-n}{n}}$ æquale b; id eſt, æquale momento ipſius $A^{\frac{m}{n}}$. *Q. E. D.*

Caſ. 6. Igitur genitæ cujuſcunque $A^m B^n$ momentum eſt momentum ipſius A^m ductum in B^n, una cum momento ipſius B^n ducto in A^m, id eſt $maA^{m-1}B^n+nbB^{n-1}A^m$; idque ſive dignitatum indices m & n ſint integri numeri vel fracti, ſive affirmativi vel negativi. Et par eſt ratio contenti ſub pluribus dignitatibus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc in continue proportionalibus, ſi terminus unus datur, momenta terminorum reliquorum erunt ut iidem termini multiplicati

cati per numerum intervallorum inter ipſos & terminum datum. Sunto A, B, C, D, E, F continue proportionales; & ſi detur terminus C, momenta reliquorum terminorum erunt inter ſe ut — 2 A — B, D, 2 E, 3 F.

Corol 2. Et ſi in quatuor proportionalibus duæ mediæ dentur, momenta extremarum erunt ut eædem extremæ. Idem intelligendum eſt de lateribus rectanguli cujuſcunque dati.

Corol. 3. Et ſi ſumma vel differentia duorum quadratorum detur, momenta laterum erunt reciproce ut latera.

Scholium.

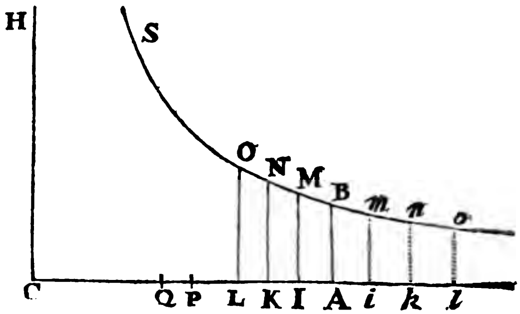
In epiſtola quadam ad D. *J. Collinium* noſtratem 10 Decem. 1672 data, cum deſcripſiſſem methodum tangentium quam ſuſpicabar eandem eſſe cum methodo *Sluſii* tum nondum communicata; ſubjunxi: *Hoc eſt unum particulare vel corollarium potius methodi generalis, quæ extendit ſe citra moleſtum ullum calculum, non modo ad ducendum tangentes ad quaſvis curvas ſive geometricas ſive mechanicas vel quomodocunque rectas lineas aliaſve curvas reſpicientes, verum etiam ad reſolvendum alia abſtruſiora problematum genera de curvitatibus, areis, longitudinibus, centris gravitatis curvarum &c. neque (quemadmodum* Huddenii *methodus de maximis & minimis) ad ſolas reſtringitur æquationes illas quæ quantitatibus ſurdis ſunt immunes. Hanc methodum intertexui alteri iſti qua æquationum exegeſin inſtituo reducendo eas ad ſeries infinitas.* Hactenus epiſtola. Et hæc ultima verba ſpectant ad tractatum quem anno 1671 de his rebus ſcripſeram. Methodi vero hujus generalis fundamentum continetur in lemmate præcedente.

PROPOSITIO VIII. THEOREMA VI.

Si corpus in medio uniformi, gravitate uniformiter agente, recta aſcendat vel deſcendat, & ſpatium totum deſcriptum diſtinguatur in partes æquales, inque principiis ſingularum partium (addendo reſiſtentiam medii ad vim gravitatis, quando corpus aſcendit, vel ſubducendo ipſam quando corpus

pus deſcendit) inveſtigentur vires abſolutæ; dico quod vires illæ abſolutæ ſunt in progreſſione geometrica.

Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam *AC*; reſiſtentia per lineam indefinitam *AK*; vis abſoluta in deſcenſu corporis per differentiam *KC*; velocitas corporis per lineam *AP*, quæ ſit media proportionalis inter *AK* & *AC*, ideoque in ſubduplicata ratione reſiſtentiæ; incrementum reſiſtentiæ data temporis particula factum per lineolam *KL*, & contemporaneum velocitatis incrementum per lineolam *PQ*; & centro *C* aſymptotis rectangulis *CA*, *CH* deſcribatur hyperbola quævis *BNS*, erectis perpendiculis *AB*, *KN*, *LO* occurrens in *B*, *N*, *O*. Quoniam *AK* eſt ut *APq*, erit hujus momentum *KL* ut illius momentum 2*APQ*: id eſt, ut *AP* in *KC*; nam velocitatis incrementum *PQ* (per motus leg. II.) proportionale eſt vi generanti *KC*. Componatur ratio ipſius *KL* cum ratione ipſius *KN*, & fiet rectangulum *KL*×*KN* ut *AP*×*KC*×*KN*; hoc eſt, ob datum rectangulum *KC*×*KN*, ut *AP*.



Atqui areæ hyperbolicæ *KNOL* ad rectangulum *KL*×*KN* ratio ultima, ubi coeunt puncta *K* & *L*, eſt æqualitatis. Ergo area illa hyperbolica evaneſcens eſt ut *AP*. Componitur igitur area tota hyperbolica *ABOL* ex particulis *KNOL* velocitati *AP* ſemper proportionalibus, & propterea ſpatio velocitate iſta deſcripto proportionalis eſt. Dividatur jam area illa in partes æquales *ABMI*, *IMNK*, *KNOL*, &c. & vires abſolutæ *AC*, *IC*, *KC*, *LC*, &c. erunt in progreſſione geometrica. *Q. E. D.* Et ſimili argumento, in aſcenſu corporis, ſumendo, ad contrariam partem puncti *A*, æquales areas *ABmi*, *imnk*, *knol*, &c. conſtabit quod vires abſolutæ *AC*, *iC*, *kC*, *lC*, &c. ſunt continue proportionales. Ideoque ſi ſpatia omnia in aſcenſu & deſcenſu capiantur æqualia; omnes vires abſolutæ *lC*, *kC*, *iC*, *AC*, *IC*, *KC*, *LC*, &c. erunt continue proportionales. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi ſpatium deſcriptum exponatur per aream hyperbolicam *ABNK*; exponi poſſunt vis gravitatis, velocitas corporis & re-

& reſiſtentia medii per lineas *AC*, *AP* & *AK* reſpective; & vice verſa.

Corol. 2. Et velocitatis maximæ, quam corpus in infinitum deſcendendo poteſt unquam acquirere, exponens eſt linea *AC*.

Corol. 3. Igitur ſi in data aliqua velocitate cognoſcatur reſiſtentia medii, invenietur velocitas maxima, ſumendo ipſam ad velocitatem illam datam in ſubduplicata ratione, quam habet vis gravitatis ad medii reſiſtentiam illam cognitam.

PROPOSITIO IX. THEOREMA VII.

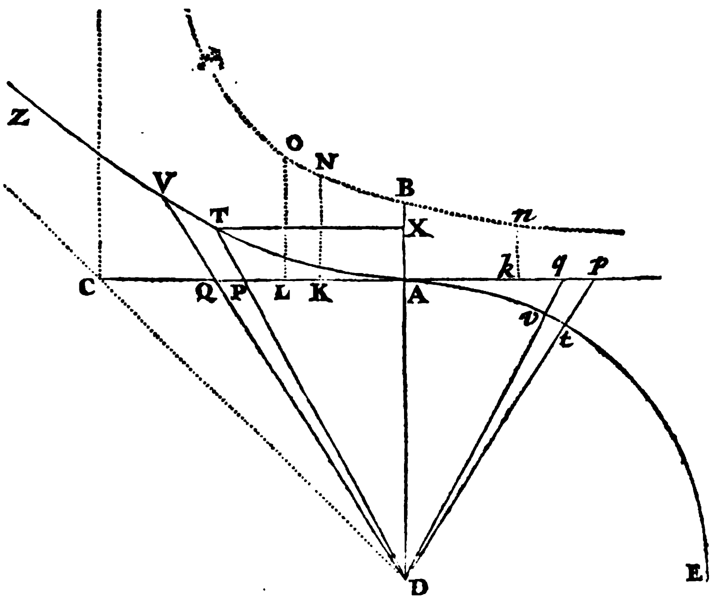
Poſitis jam demonſtratis, dico quod, ſi tangentes angulorum ſectoris circularis & ſectoris hyperbolici ſumantur velocitatibus proportionales, exiſtente radio juſtæ magnitudinis: erit tempus omne aſcendendi ad locum ſummum ut ſector circuli, & tempus omne deſcendendi a loco ſummo ut ſector hyperbolæ.

Rectæ *AC*, qua vis gravitatis exponitur, perpendicularis & æqualis ducatur *AD*. Centro *D* ſemidiametro *AD* deſcribatur tum circuli quadrans *AtE*; tum hyperbola rectangula *AVZ* axem habens *AX*, verticem principalem *A*, & aſymptoton *DC*. Ducantur *Dp*, *DP*, & erit ſector circularis *AtD* ut tempus omne aſcendendi ad locum ſummum; & ſector hyperbolicus *ATD* ut tempus omne deſcendendi a loco ſummo: Si modo ſectorum tangentes *Ap*, *AP* ſint ut velocitates.

Caſ. 1. Agatur enim *Dvq* abſcindens ſectoris *ADt* & trianguli *ADp* momenta, ſeu particulas quam minimas ſimul deſcriptas *tDv* & *qDp*. Cum particulæ illæ, ob angulum communem *D*, ſunt in duplicata ratione laterum, erit particula *tDv* ut $\frac{qDp \times tD\ quad.}{pD\ quad.}$, id eſt, ob datam *tD*, ut $\frac{qDp}{pD quad.}$. Sed *pD quad.* eſt *AD quad.* + *Ap quad.* id eſt, *AD quad.* + *AD* × *Ak*, ſeu *AD* × *Ck*; & *qDp* eſt $\frac{1}{2}$ *AD* × *pq*. Ergo ſectoris particula *tDv* eſt ut $\frac{pq}{Ck}$; id eſt, ut

ut velocitatis decrementum quam minimum pq directe, & vis illa Ck quæ velocitatem diminuit inverſe; atque ideo ut particula temporis decremento velocitatis reſpondens. Et componendo fit ſumma particularum omnium tDv in ſectore ADt, ut ſumma particularum temporis ſingulis velocitatis decreſcentis Ap particulis amiſſis pq reſpondentium, uſque dum velocitas illa in nihilum diminuta evanuerit; hoc eſt, ſector totus ADt eſt ut tempus totum aſcendendi ad locum ſummum. *Q. E. D.*

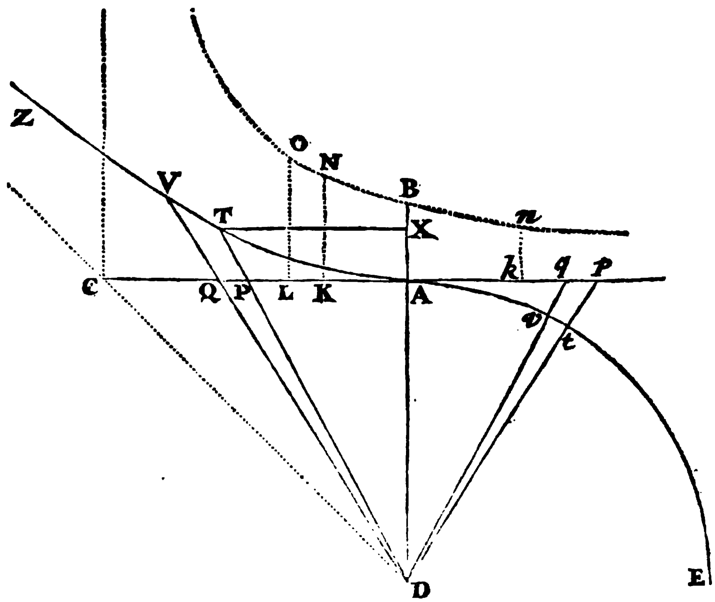
Caſ. 2. Agatur DQV abſcindens tum ſectoris DAV, tum trianguli DAQ particulas quam minimas TDV & PDQ; & erunt hæ particulæ ad invicem ut DTq ad DPq, id eſt (ſi TX & AP parallelæ ſint) ut DXq ad DAq vel TXq ad APq, & diviſim ut $DXq - TXq$ ad $DAq - APq$. Sed ex natura hyperbolæ DXq



$- TXq$ eſt ADq, & per hypotheſin APq eſt $AD \times AK$. Ergo particulæ ſunt ad invicem ut ADq ad $ADq - AD \times AK$; id eſt, ut AD ad $AD - AK$ ſeu AC ad CK: ideoque ſectoris particula TDV eſt $\frac{PDQ \times AC}{CK}$; atque ideo ob datas AC & AD, ut $\frac{PQ}{CK}$, id eſt, ut incrementum velocitatis directe, utque vis generans incrementum inverſe; atque ideo ut particula temporis incremen-

to reſpondens. Et componendo fit ſumma particularum temporis, quibus omnes velocitatis *AP* particulæ *PQ* generantur, ut ſumma particularum ſectoris *ATD*, id eſt, tempus totum ut ſector totus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi *AB* æquetur quartæ parti ipſius *AC*, ſpatium quod corpus tempore quovis cadendo deſcribit, erit ad ſpatium, quod corpus velocitate maxima *AC*, eodem tempore uniformiter progrediendo deſcribere poteſt, ut area *ABNK*, qua ſpatium cadendo deſcriptum exponitur, ad aream *ATD*, qua tempus exponitur. Nam cum ſit *AC* ad *AP* ut *AP* ad *AK*, erit (per corol. 1.



lem. 11. hujus) *LK* ad *PQ* ut 2*AK* ad *AP*, hoc eſt, ut 2*AP* ad *AC*, & inde *LK* ad $\frac{1}{2}$*PQ* ut *AP* ad $\frac{1}{4}$*AC* vel *AB*; eſt & *KN* ad *AC* vel *AD* ut *AB* ad *CK*; itaque ex æquo *LKNO* ad *DPQ* ut *AP* ad *CK*. Sed erat *DPQ* ad *DTV* ut *CK* ad *AC*. Ergo rurſus ex æquo *LKNO* eſt ad *DTV* ut *AP* ad *AC*; hoc eſt, ut velocitas corporis cadentis ad velocitatem maximam quam corpus cadendo poteſt acquirere. Cum igitur arearum *ABNK* & *ATD* momenta *LKNO* & *DTV* ſunt ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes ſimul genitæ ut ſpatia ſimul deſcripta, ideoque

areæ

areæ totæ ab initio genitæ *ABNK* & *ATD* ut ſpatia tota ab initio deſcenſus deſcripta. *Q. E. D.*

Corol. 2. Idem conſequitur etiam de ſpatio quod in aſcenſu deſcribitur. Nimirum quod ſpatium illud omne ſit ad ſpatium, uniformi cum velocitate *AC* eodem tempore deſcriptum, ut eſt area *ABnk* ad ſectorem *ADt*.

Corol. 3. Velocitas corporis tempore *ATD* cadentis eſt ad velocitatem, quam eodem tempore in ſpatio non reſiſtente acquireret, ut triangulum *APD* ad ſectorem hyperbolicum *ATD*. Nam velocitas in medio non reſiſtente foret ut tempus *ATD*, & in medio reſiſtente eſt ut *AP*, id eſt, ut triangulum *APD*. Et velocitates illæ initio deſcenſus æquantur inter ſe, perinde ut areæ illæ *ATD*, *APD*.

Corol. 4. Eodem argumento velocitas in aſcenſu eſt ad velocitatem, qua corpus eodem tempore in ſpatio non reſiſtente omnem ſuum aſcendendi motum amittere poſſet, ut triangulum *ApD* ad ſectorem circularem *AtD*; ſive ut recta *Ap* ad arcum *At*.

Corol. 5. Eſt igitur tempus, quo corpus in medio reſiſtente cadendo velocitatem *AP* acquirit, ad tempus, quo velocitatem maximam *AC* in ſpatio non reſiſtente cadendo acquirere poſſet, ut ſector *ADT* ad triangulum *ADC*: & tempus, quo velocitatem *Ap* in medio reſiſtente aſcendendo poſſit amittere, ad tempus quo velocitatem eandem in ſpatio non reſiſtente aſcendendo poſſet amittere, ut arcus *At* ad ejus tangentem *Ap*.

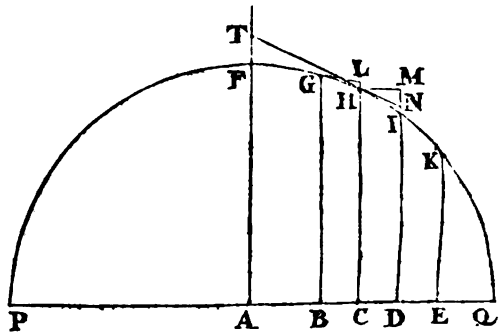
Corol. 6. Hinc ex dato tempore datur ſpatium aſcenſu vel deſcenſu deſcriptum. Nam corporis in infinitum deſcendentis datur velocitas maxima (per corol. 2. & 3. theor. VI. lib. II.) indeque datur tempus quo corpus velocitatem illam in ſpatio non reſiſtente cadendo poſſet acquirere. Et ſumendo ſectorem *ADT* vel *ADt* ad triangulum *ADC* in ratione temporis dati ad tempus modo inventum; dabitur tum velocitas *AP* vel *Ap*, tum area *ABNK* vel *ABnk*, quæ eſt ad ſectorem *ADT* vel *ADt* ut ſpatium quæſitum ad ſpatium, quod tempore dato, cum velocitate illa maxima jam ante inventa, uniformiter deſcribi poteſt.

Corol. 7. Et regrediendo, ex dato aſcenſus vel deſcenſus ſpatio *ABnk* vel *ABNK*, dabitur tempus *ADt* vel *ADT*.

PROPOSITIO X. PROBLEMA III.

Tendat uniformis vis gravitatis directe ad planum horizontis, ſitque reſiſtentia ut medii denſitas & quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum medii denſitas in locis ſingulis, quæ faciat ut corpus in data quavis linea curva moveatur; tum corporis velocitas & medii reſiſtentia in locis ſingulis.

Sit PQ planum illud plano ſchematis perpendiculare; $PFHQ$ linea curva plano huic occurrens in punctis P & Q; G, H, I, K loca quatuor corporis in hac curva ab F ad Q pergentis; & GB, HC, ID, KE ordinatæ quatuor parallelæ ab his punctis ad horizontem demiſſæ, & lineæ horizontali PQ ad puncta B, C, D, E inſiſtentes; & ſint BC, CD, DE diſtantiæ ordinatarum inter ſe æquales. A punctis G & H ducantur rectæ GL, HN curvam tangentes in G & H, & ordinatis CH, DI ſurſum productis occurrentes in L & N, & compleatur parallelogrammum $HCDM$. Et tempora, quibus corpus deſcribit arcus GH, HI, erunt in ſubduplicata ratione altitudinum LH, NI, quas corpus temporibus illis deſcribere poſſet, a tangentibus cadendo; & velocitates erunt ut longitudines deſcriptæ GH, HI directe & tempora inverſe. Exponantur tempora per T & t, & velocitates per $\frac{GH}{T}$ & $\frac{HI}{t}$; & decrementum velocitatis tempore t factum exponetur per $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Hoc decrementum oritur a reſiſtentia corpus retardante, & gravitate corpus accelerante. Gravitas, in corpore cadente & ſpatium NI cadendo deſcribente, generat velocitatem, qua duplum illud ſpatium eodem tempore deſcribi potuiſſet, ut *Galilæus* demonſtravit; id eſt, velocitatem $\frac{2NI}{t}$: at in corpore arcum HI deſcribente, auget arcum illum



ſola

ſola longitudine $HI - HN$ ſeu $\frac{MI \times NI}{HI}$; ideoque generat tantum velocitatem $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Addatur hæc velocitas ad decrementum prædictum, & habebitur decrementum velocitatis ex reſiſtentia ſola oriundum, nempe $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Proindeque cum gravitas eodem tempore in corpore cadente generet velocitatem $\frac{2NI}{t}$; reſiſtentia erit ad gravitatem ut $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$ ad $\frac{2NI}{t}$, ſive ut $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$ ad $2NI$.

Jam pro abſciſſis CB, CD, CE ſcribantur $-o$, o, $2o$. Pro ordinata CH ſcribatur P, & pro MI ſcribatur ſeries quælibet $Qo + Roo + So^3 + \&c.$ Et ſeriei termini omnes poſt primum, nempe $Roo + So^3 + \&c.$ erunt NI, & ordinatæ DI, EK, & BG erunt $P - Qo - Roo - So^3 - \&c.$ $P - 2Qo - 4Roo - 8So^3 - \&c.$ & $P + Qo - Roo + So^3 - \&c.$ reſpective. Et quadrando differentias ordinatarum $BG - CH$ & $CH - DI$, & ad quadrata prodeuntia addendo quadrata ipſarum BC, CD, habebuntur arcuum GH, HI quadrata $oo + QQoo - 2QRo^3 + \&c.$ & $oo + QQoo + 2QRo^3 + \&c.$ Quorum radices $o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$, & $o\sqrt{1+QQ} + \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ ſunt arcus GH & HI. Præterea ſi ab ordinata CH ſubducatur ſemiſumma ordinatarum BG ac DI, & ab ordinata DI ſubducatur ſemiſumma ordinatarum CH & EK, manebunt arcuum GI & HK ſagittæ Roo & $Roo + 3So^3$. Et hæ ſunt lineolis LH & NI proportionales, ideoque in duplicata ratione temporum infinite parvorum T & t: & inde ratio $\frac{t}{T}$ eſt $\sqrt{\frac{R + 3So}{R}}$ ſeu $\frac{R + \frac{3}{2}So}{R}$; & $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$, ſubſtituendo ipſorum $\frac{t}{T}$, GH, HI, MI & NI valores jam inventos, evadit $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$. Et cum $2NI$ ſit $2Roo$, reſi-

ſtentia

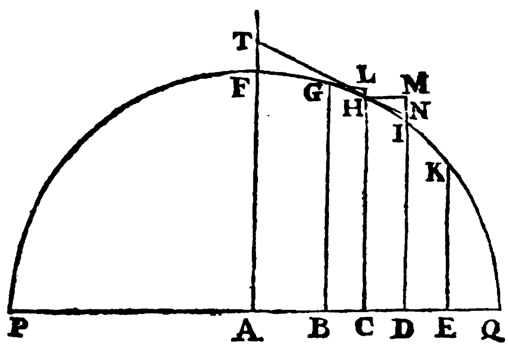
ſtentia jam erit ad gravitatem ut $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$ ad $2Roo$, id eſt, ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad $4RR$.

Velocitas autem ea eſt, quacum corpus de loco quovis *H*, ſecundum tangentem *HN* egrediens, in parabola diametrum *HC* & latus rectum $\frac{HNq}{NI}$ ſeu $\frac{1+QQ}{R}$ habente, deinceps in vacuo moveri poteſt.

Et reſiſtentia eſt ut medii denſitas & quadratum velocitatis conjunctim, & propterea medii denſitas eſt ut reſiſtentia directe & quadratum velocitatis inverſe, id eſt, ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$ directe & $\frac{1+QQ}{R}$ inverſe, hoc eſt, ut $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$. *Q. E. I.*

Corol. 1. Si tangens *HN* producatur utrinque donec occurrat ordinatæ cuilibet *AF* in *T*: erit $\frac{HT}{AC}$ æqualis $\sqrt{1+QQ}$, ideoque in ſuperioribus pro $\sqrt{1+QQ}$ ſcribi poteſt. Qua ratione reſiſtentia erit ad gravitatem ut $3S\times HT$ ad $4RR\times AC$, velocitas erit ut $\frac{HT}{AC\sqrt{R}}$, & medii denſitas erit ut $\frac{S\times AC}{R\times HT}$.

Corol. 2. Et hinc, ſi curva linea *PFHQ* definiatur per relationem inter baſem ſeu abſciſſam *AC* & ordinatim applicatam *CH*, ut moris eſt; & valor ordinatim applicatæ reſolvatur in ſeriem convergentem: Problema per primos ſeriei terminos expedite ſolvetur, ut in exemplis ſequentibus.



Exempl. 1. Sit linea *PFHQ* ſemicirculus ſuper diametro *PQ* deſcriptus, & requiratur medii denſitas quæ faciat ut projectile in hac linea moveatur.

Biſecetur diameter *PQ* in *A*; dic *AQ*, n; *AC*, a; *CH*, e; & *CD*, o: & erit DIq ſeu $AQq - ADq = nn - aa - 2ao - oo$, ſeu

ee

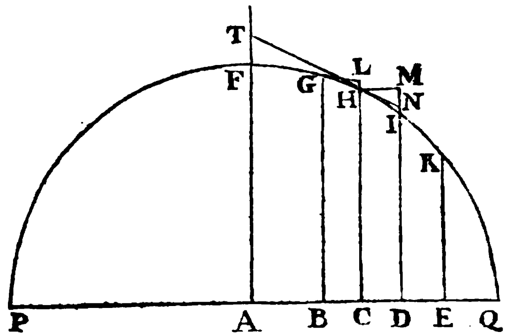
$ee - 2ao - oo$, & radice per methodum noſtram extracta, fiet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{oo}{2e} - \frac{aaoo}{2e^2} - \frac{ao^3}{2e^3} - \frac{a^3o^3}{2e^5}$ — &c. Hic ſcribatur nn pro $ee + aa$, & evadet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5}$ — &c.

Hujuſmodi ſeries diſtinguo in terminos ſucceſſivos in hunc modum. Terminum primum appello, in quo quantitas infinite parva o non extat; ſecundum, in quo quantitas illa eſt unius dimenſionis; tertium, in quo extat duarum; quartum, in quo trium eſt; & ſic in infinitum. Et primus terminus, qui hic eſt e, denotabit ſemper longitudinem ordinatæ *CH* inſiſtentis ad initium indefinitæ quantitatis o. Secundus terminus, qui hic eſt $\frac{ao}{e}$, denotabit differentiam inter *CH* & *DN*, id eſt, lineolam *MN*, quæ abſcinditur complendo parallelogrammum *HCDM*, atque ideo poſitionem tangentis *HN* ſemper determinat; ut in hoc caſu capiendo *MN* ad *HM* ut eſt $\frac{ao}{e}$ ad o, ſeu a ad e. Terminus tertius, qui hic eſt $\frac{nnoo}{2e^3}$, deſignabit lineolam *IN*, quæ jacet inter tangentem & curvam, ideoque determinat angulum contactus *IHN* ſeu curvaturam quam curva linea habet in *H*. Si lineola illa *IN* finitæ eſt magnitudinis, deſignabitur per terminum tertium una cum ſequentibus in infinitum. At ſi lineola illa minuatur in infinitum, termini ſubſequentes evadent infinite minores tertio, ideoque negligi poſſunt. Terminus quartus determinat variationem curvaturæ, quintus variationem variationis, & ſic deinceps. Unde obiter patet uſus non contemnendus harum ſerierum in ſolutione problematum, quæ pendent a tangentibus & curvatura curvarum.

Conferatur jam ſeries $e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5}$ — &c. cum ſerie $P - Qo - Roo - So^3$ — &c. & perinde pro P, Q, R & S ſcribatur e, $\frac{a}{e}$, $\frac{nn}{2e^3}$, & $\frac{ann}{2e^5}$, & pro $\sqrt{1+QQ}$ ſcribatur $\sqrt{1 + \frac{aa}{ee}}$ ſeu $\frac{n}{e}$, & prodibit medii denſitas ut $\frac{a}{ne}$, hoc eſt (ob datam n) ut $\frac{a}{e}$, ſeu

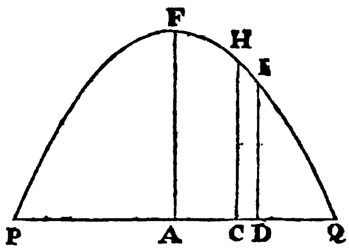
AC,

De Motu Corporum $\frac{AC}{CH}$, id eſt, ut tangentis longitudo illa *HT*, quæ ad ſemidiametrum *AF* ipſi *PQ* normaliter inſiſtentem terminatur: & reſiſtentia erit ad gravitatem ut $3a$ ad $2n$, id eſt, ut $3AC$ ad circuli diametrum *PQ*: velocitas autem erit ut $\sqrt{CH}$. Quare ſi corpus juſta cum velocitate ſecundum lineam ipſi *PQ* parallelam exeat de loco *F*, & medii denſitas in ſingulis locis *H* ſit ut longitudo tangentis *HT*, & reſiſtentia etiam in loco aliquo *H* ſit ad vim gravitatis ut $3AC$ ad *PQ*, corpus illud deſcribet circuli quadrantem *FHQ*. *Q. E. I.*



At ſi corpus idem de loco *P*, ſecundum lineam ipſi *PQ* perpendicularem egrederetur, & in arcu ſemicirculi *PFQ* moveri inciperet, ſumenda eſſet *AC* ſeu a ad contrarias partes centri *A*, & propterea ſignum ejus mutandum eſſet & ſcribendum $-a$ pro $+a$. Quo pacto prodiret medii denſitas ut $-\frac{a}{e}$. Negativam autem denſitatem, hoc eſt, quæ motus corporum accelerat, natura non admittit: & propterea naturaliter fieri non poteſt, ut corpus aſcendendo a *P* deſcribat circuli quadrantem *PF*. Ad hunc effectum deberet corpus a medio impellente accelerari, non a reſiſtente impediri.

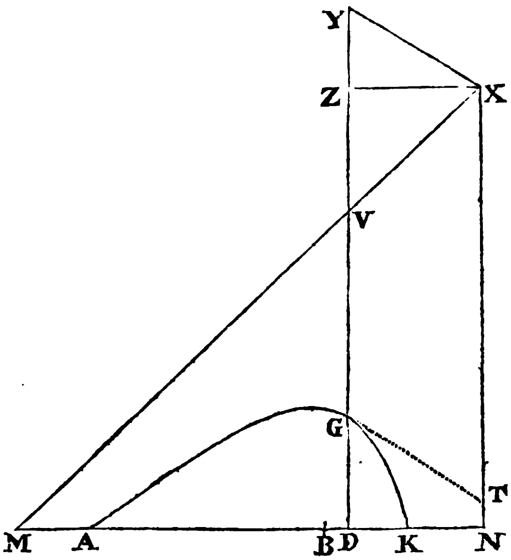
Exempl. 2. Sit linea *PFQ* parabola, axem habens *AF* horizonti *PQ* perpendicularem, & requiratur medii denſitas, quæ faciat ut projectile in ipſa moveatur.



Ex natura parabolæ, rectangulum *PDQ* æquale eſt rectangulo ſub ordinata *DI* & recta aliqua data: hoc eſt, ſi dicantur recta illa b; *PC*, a; *PQ*, c; *CH*, e; & *CD*, o; rectangulum $a+o$ in $c-a-o$ ſeu $ac-aa-2ao+co-oo$ æquale eſt rectangulo b in *DI*, ideoque *DI* æquale $\frac{ac-aa}{b}+\frac{c-2a}{b}o-\frac{oo}{b}$. Jam ſcribendus eſſet hujus ſeriei ſecundus terminus $\frac{c-2a}{b}o$ pro Qo, tertius

item

item terminus $\frac{oo}{b}$ pro Roo. Cum vero plures non ſint termini, debebit quarti coefficiens S evaneſcere, & propterea quantitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, cui medii denſitas proportionalis eſt, nihil erit. Nulla igitur medii denſitate movebitur projectile in parabola, uti olim demonſtravit *Galilæus*. *Q. E. I.*



Exempl. 3. Sit linea *AGK* hyperbola, aſymptoton habens *NX* plano horizontali *AK* perpendicularem; & quæratur medii denſitas, quæ faciat ut projectile moveatur in hac linea.

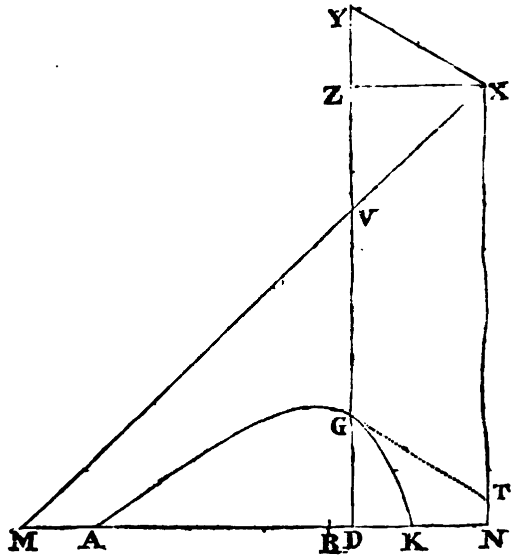
Sit *MX* aſymptotos altera, ordinatim applicatæ *DG* productæ occurrens in *V*; & ex natura hyperbolæ, rectangulum *XV* in *VG* dabitur. Datur autem ratio *DN* ad *VX*, & propterea datur etiam rectangulum *DN* in *VG*. Sit illud bb: & completo parallelogrammo *DNXZ*; dicatur *BN*, a; *BD*, o; *NX*, c; & ratio data *VZ* ad *ZX* vel *DN* ponatur eſſe $\frac{m}{n}$. Et erit *DN* æqualis $a-o$, *VG* æqualis $\frac{bb}{a-o}$, *VZ* æqualis $\frac{m}{n}\,\overline{a-o}$, & *GD* ſeu *NX*—*VZ*—*VG* æqualis $c - \frac{m}{n}a + \frac{m}{n}o - \frac{bb}{a-o}$. Reſolvatur terminus $\frac{bb}{a-o}$ in ſeriem convergentem $\frac{bb}{a} + \frac{bb}{aa}o + \frac{bb}{a^3}oo + \frac{bb}{a^4}o^3$ &c. & fiet *GD* æqualis $c - \frac{m}{n}a - \frac{bb}{a} + \frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o - \frac{bb}{a^3}o^2 - \frac{bb}{a^4}o^3$ &c. Hujus ſeriei terminus ſecundus $\frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o$ uſurpandus eſt pro Qo, tertius cum ſigno mutato $\frac{bb}{a^3}o^2$ pro Ro^2, & quartus cum ſigno etiam mutato $\frac{bb}{a^4}o^3$

 pro

pro So^3, eorumque coefficientes $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa}$, $\frac{bb}{a^3}$ & $\frac{bb}{a^4}$ ſcribendæ ſunt in regula ſuperiore pro Q, R & S. Quo facto prodit medii denſitas

$$\text{ut } \frac{\frac{bb}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}\sqrt{1 + \frac{mm}{nn} - \frac{2mbb}{naa} + \frac{b^4}{a^4}}} \text{ ſeu } \frac{1}{\sqrt{aa + \frac{mm}{nn}aa - \frac{2mbb}{n} + \frac{b^4}{aa}}} \text{ id}$$

eſt, ſi in VZ ſumatur VY æqualis VG, ut $\frac{1}{XY}$. Namque aa & $\frac{mm}{nn}aa - \frac{2mbb}{n} + \frac{b^4}{aa}$ ſunt ipſarum XZ & ZY quadrata. Reſiſtentia autem invenitur in ratione ad gravitatem quam habet $3XY$ ad $2YG$; & velocitas ea eſt, quacum corpus in parabola pergeret verticem G, diametrum DG, & latus rectum $\frac{XY\ quad.}{VG}$ habente. Ponatur itaque quod medii denſitates in locis ſingulis G ſint reciproce ut diſtantiæ XY, quodque reſiſtentia in loco aliquo G ſit ad gravitatem ut $3XY$ ad $2YG$; & corpus de loco A, juſta cum velocitate emiſſum, deſcribet hyperbolam illam AGK. *Q. E. I.*



Exempl. 4. Ponatur indefinite, quod linea AGK hyperbola ſit, centro X, aſymptotis MX, NX ea lege deſcripta, ut conſtructo rectangulo $XZDN$ cujus latus ZD ſecet hyperbolam in G & aſymptoton ejus in V, fuerit VG reciproce ut ipſius ZX vel DN dignitas aliqua DN^n, cujus index eſt numerus n: & quæratur medii denſitas, qua projectile progrediatur in hac curva.

Pro BN, BD, NX ſcribantur A, O, C reſpective, ſitque VZ ad XZ vel DN ut d ad e, & VG æqualis $\frac{bb}{DN^n}$, & erit DN æqualis

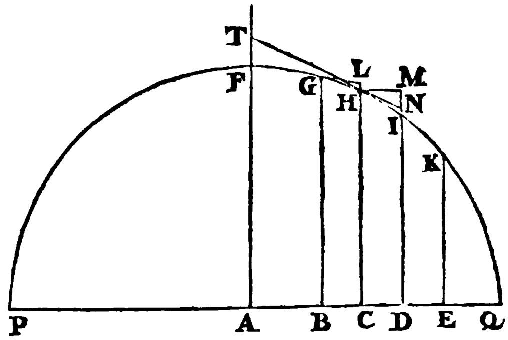
lis $A - O$, $VG = \frac{bb}{\overline{A-O}|^{n}}$, $VZ = \frac{d}{e}\overline{A-O}$, & $G\mathcal{D}$ ſeu $NX - VZ$
$- VG$ æqualis $C - \frac{d}{e}A + \frac{d}{e}O - \frac{bb}{\overline{A-O}|^{n}}$. Reſolvatur terminus ille $\frac{bb}{\overline{A-O}|^{n}}$ in ſeriem infinitam $\frac{bb}{A^{n}} + \frac{nbb}{A^{n+1}}O + \frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^{2} + \frac{n^{3}+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^{3}$ &c. ac fiet $G\mathcal{D}$ æqualis $C - \frac{d}{e}A - \frac{bb}{A^{n}} + \frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O - \frac{+nn+n}{2A^{n+2}}bbO^{2} - \frac{+n^{3}+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^{3}$ &c. Hujus ſeriei terminus ſecundus $\frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O$ uſurpandus eſt pro Qo, tertius $\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^{2}$ pro Ro^{2}, quartus $\frac{n^{3}+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^{3}$ pro So^{3}. Et inde medii denſitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, in loco quovis G, fit $\frac{n+2}{3\sqrt{A^{2}+\frac{dd}{ee}A^{2}-\frac{2dnbb}{eA^{n}}A+\frac{nnb^{4}}{A^{2n}}}}$, ideoque ſi in VZ capiatur VY æqualis $n \times VG$, denſitas illa eſt reciproce ut XY. Sunt enim A^{2} & $\frac{dd}{ee}A^{2} - \frac{2dnbb}{eA^{n}}A + \frac{nnb^{4}}{A^{2n}}$ ipſarum XZ & ZY quadrata. Reſiſtentia autem in eodem loco G fit ad gravitatem ut $3S$ in $\frac{XY}{A}$ ad $4RR$, id eſt, ut XY ad $\frac{2nn+2n}{n+2}VG$. Et velocitas ibidem ea ipſa eſt, quacum corpus projectum in parabola pergeret, verticem G, diametrum $G\mathcal{D}$ & latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ ſeu $\frac{2XY\ quad.}{nn+n \text{ in } VG}$ habente. *Q. E. I.*

Scholium.

Eadem ratione qua prodiit denſitas medii ut $\frac{S \times AC}{R \times HT}$ in corollario primo, ſi reſiſtentia ponatur ut velocitatis V dignitas quæli-

De Motu Corporum

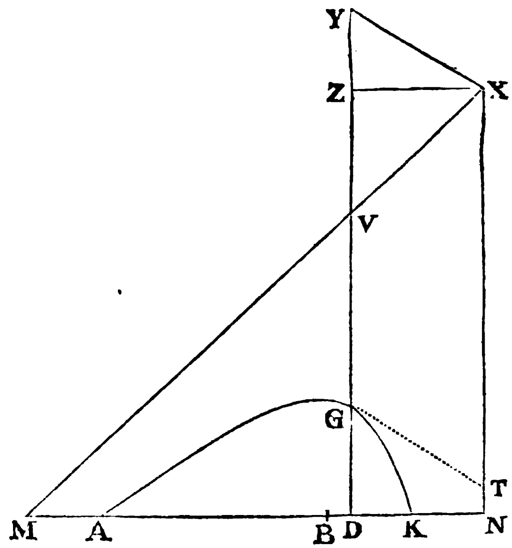
bet V^n, prodibit denſitas medii ut $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \times \overline{\frac{AC}{HT}}\Big|^{n-1}$. Et propterea ſi curva inveniri poteſt ea lege, ut data fuerit ratio $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad



$\overline{\frac{HT}{AC}}\Big|^{n-1}$, vel $\frac{S^2}{R^{4-n}}$ ad $\overline{1+QQ}|^{n-1}$: corpus movebitur in hac curva in uniformi medio cum reſiſtentia quæ ſit ut velocitatis dignitas V^n. Sed redeamus ad curvas ſimpliciores.

Quoniam motus non fit in parabola niſi in medio non reſiſtente, in hyperbolis vero hic deſcriptis fit per reſiſtentiam perpetuam; perſpicuum eſt quod linea, quam projectile in medio uniformiter reſiſtente deſcribit, propius accedit ad hyperbolas haſce quam ad parabolam. Eſt utique linea illa hyperbolici generis, ſed quæ circa verticem magis diſtat ab aſymptotis; in partibus a vertice remotioribus propius ad ipſas accedit quam pro ratione hyperbolarum quas hic deſcripſi. Tanta vero non eſt inter has & illam differentia, quin illius loco poſſint hæ in rebus practicis non incommode adhiberi. Et utiliores forſan futuræ ſunt hæ, quam hyperbola magis accurata & ſimul magis compoſita. Ipſæ vero in uſum ſic deducentur.

Compleatur parallelogrammum *XYGT*, & recta *GT* tanget hyperbolam in *G*, ideoque denſitas medii in *G* eſt reciproce ut tangens *GT*, & velocitas ibidem ut $\sqrt{\frac{GTq}{GV}}$, reſiſtentia autem ad vim gravitatis ut *GT* ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ in *GV*.

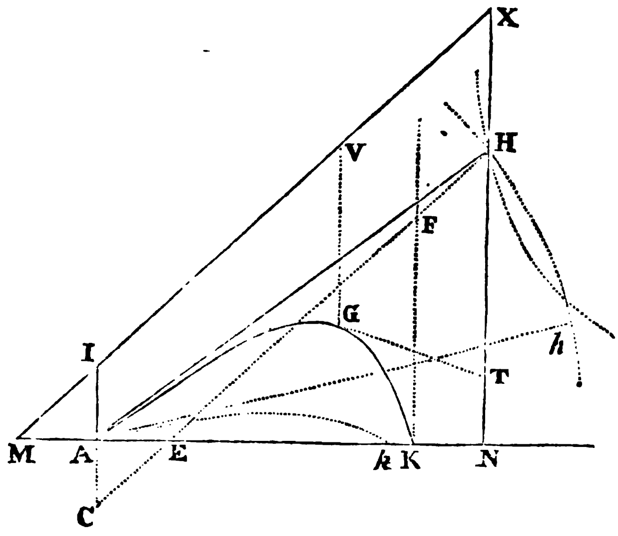


Proinde

Proinde ſi corpus de loco *A* ſecundum rectam *AH* projectum deſcribat hyperbolam *AGK*, & *AH* producta occurrat aſymptoto *NX* in *H*, actaque *AI* eidem parallela occurrat alteri aſymptoto *MX* in *I*: erit medii denſitas in *A* reciproce ut *AH*, & corporis velocitas ut $\sqrt{\frac{AHq}{AI}}$, ac reſiſtentia ibidem ad gravitatem ut *AH* ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ in *AI*. Unde prodeunt ſequentes regulæ.

Reg. 1. Si ſervetur tum medii denſitas in *A*, tum velocitas quacum corpus projicitur, & mutetur angulus *NAH*; manebunt longitudines *AH*, *AI*, *HX*. Ideoque ſi longitudines illæ in aliquo caſu inveniantur, hyperbola deinceps ex dato quovis angulo *NAH* expedite determinari poteſt.

Reg. 2. Si ſervetur tum angulus *NAH*, tum medii denſitas in *A*, & mutetur velocitas quacum corpus projicitur; ſervabitur longitudo *AH*, & mutabitur *AI* in duplicata ratione velocitatis reciproce.

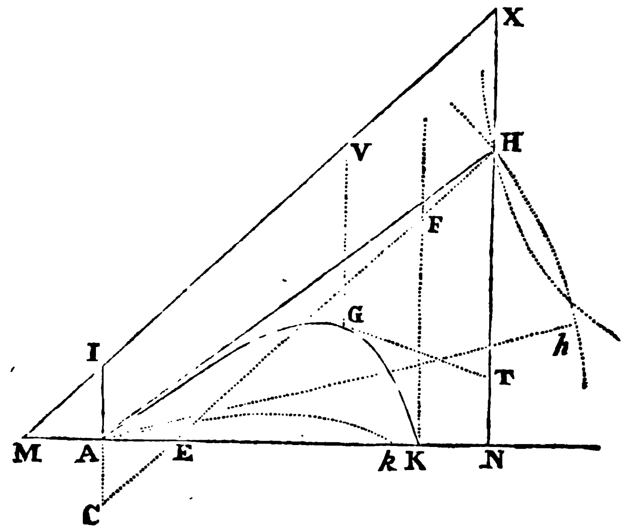


Reg. 3. Si tam angulus *NAH*, quam corporis velocitas in *A*, gravitaſque acceleratrix ſervetur, & proportio reſiſtentiæ in *A* ad gravitatem motricem augeatur in ratione quacunque; augebitur proportio *AH* ad *AI* in eadem ratione, manente parabolæ prædictæ latere recto, eique proportionali longitudine $\frac{AHq}{AI}$: & propterea

terea minuetur *AH* in eadem ratione, & *AI* minuetur in ratione illa duplicata. Augetur vero proportio reſiſtentiæ ad pondus, ubi vel gravitas ſpecifica ſub æquali magnitudine ſit minor, vel medii denſitas major, vel reſiſtentia, ex magnitudine diminuta, diminuitur in minore ratione quam pondus.

Reg. 4. Quoniam denſitas medii prope verticem hyperbolæ major eſt quam in loco *A*; ut habeatur denſitas mediocris, debet ratio minimæ tangentium *GT* ad tangentem *AH* inveniri, & denſitas in *A* augeri in ratione paulo majore quam ſemiſummæ harum tangentium ad minimam tangentium *GT*.

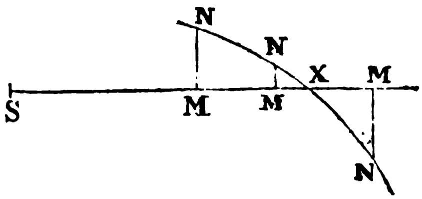
Reg. 5. Si dantur longitudines *AH*, *AI*, & deſcribenda ſit figura *AGK*: produc *HN* ad *X*, ut ſit *HX* ad *AI* ut $n+1$ ad 1, centroque *X* & aſymptotis *MX*, *NX* per punctum *A* deſcribatur hyperbola, ea lege, ut ſit *AI* ad quamvis *VG* ut XV^n ad XI^n.



Reg. 6. Quo major eſt numerus *n*, eo magis accuratæ ſunt hæ hyperbolæ in aſcenſu corporis ab *A*, & minus accuratæ in ejus deſcenſu ad *K*; & contra. Hyperbola conica mediocrem rationem tenet, eſtque cæteris ſimplicior. Igitur ſi hyperbola ſit hujus generis, & punctum *K*, ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis *AN* per punctum *A* tranſeuntem, quæratur: occurrat producta *AN* aſymptotis *MX*, *NX* in *M* & *N*, & ſumatur *NK* ipſi *AM* æqualis.

Reg. 7. Et hinc liquet methodus expedita determinandi hanc hyper-

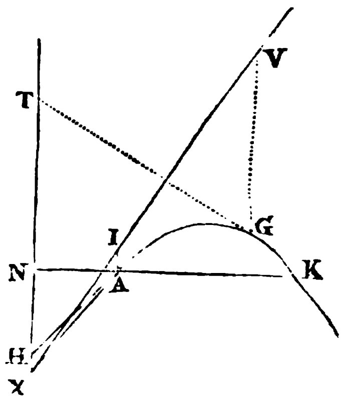
hyperbolam ex phænomenis. Projiciantur corpora duo ſimilia & æqualia, eadem velocitate, in angulis diverſis *HAK*, *hAk*, incidantque in planum horizontis in *K* & *k*; & notetur proportio *AK* ad *Ak*. Sit ea *d* ad *e*. Tum erecto cujuſvis longitudinis perpendiculo *AI*, aſſume utcunque longitudinem *AH* vel *Ah*, & inde collige graphice longitudines *AK*, *Ak*, per reg. 6. Si ratio *AK* ad *Ak* ſit eadem cum ratione *d* ad *e*, longitudo *AH* recte aſſumpta fuit. Sin minus cape in recta infinita *SM* longitudinem *SM* æqualem aſſumptæ *AH*, & erige perpendiculum *MN* æquale rationum differentiæ $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e}$ ductæ in rectam quamvis datam. Simili methodo ex aſſumptis pluribus longitudinibus *AH* invenienda ſunt plura puncta *N*, & per omnia agenda curva linea regularis *NNXN*, ſecans rectam *SMMM* in *X*. Aſſumatur demum *AH* æqualis abſciſſæ *SX*, & inde denuo inveniatur longitudo *AK*; & longitudines, quæ ſint ad aſſumptam longitudinem *AI* & hanc ultimam *AH*, ut longitudo *AK* per experimentum cognita ad ultimo inventam longitudinem *AK*, erunt veræ illæ longitudines *AI* & *AH*, quas invenire oportuit. Hiſce vero datis dabitur & reſiſtentia medii in loco *A*, quippe quæ ſit ad vim gravitatis ut *AH* ad 2*AI*. Augenda eſt autem denſitas medii per reg. 4. & reſiſtentia modo inventa, ſi in eadem ratione augeatur, fiet accuratior.



Reg. 8. Inventis longitudinibus *AH*, *HX*; ſi jam deſideretur poſitio rectæ *AH*, ſecundum quam projectile, data illa cum velocitate emiſſum, incidit in punctum quodvis *K*: ad puncta *A* & *K* erigantur rectæ *AC*, *KF* horizonti perpendiculares, quarum *AC* deorſum tendat, & æquetur ipſi *AI* ſeu $\frac{1}{2}HX$. Aſymptotis *AK*, *KF* deſcribatur hyperbola, cujus conjugata tranſeat per punctum *C*, centroque *A* & intervallo *AH* deſcribatur circulus ſecans hyperbolam illam in puncto *H*; & projectile ſecundum rectam *AH* emiſſum incidet in punctum *K*. *Q. E. I.* Nam punctum *H*, ob datam longitudinem *AH*, locatur alicubi in circulo deſcripto. Agatur *CH* occurrens ipſis *AK* & *KF*, illi in *E*, huic in *F*; & ob parallelas *CH*, *MX* & æquales *AC*, *AI*, erit *AE* æqualis *AM*, & prop-

& propterea etiam æqualis *KN*. Sed *CE* eſt ad *AE* ut *FH* ad *KN*, & propterea *CE* & *FH* æquantur. Incidit ergo punctum *H* in hyperbolam aſymptotis *AK*, *KF* deſcriptam, cujus conjugata tranſit per punctum *C*, atque ideo reperitur in communi interſectione hyperbolæ hujus & circuli deſcripti. *Q. E. D.* Notandum eſt autem quod hæc operatio perinde ſe habet, ſive recta *AKN* horizonti parallela ſit, ſive ad horizontem in angulo quovis inclinata: quodque ex duabus interſectionibus *H*, *H* duo prodeunt anguli *NAH*, *NAH*; & quod in praxi mechanica ſufficit circulum ſemel deſcribere, deinde regulam interminatam *CH* ita applicare ad punctum *C*, ut ejus pars *FH*, circulo & rectæ *FK* interjecta, æqualis ſit ejus parti *CE* inter punctum *C* & rectam *AK* ſitæ.

Quæ de hyperbolis dicta ſunt facile applicantur ad parabolas. Nam ſi *XAGK* parabolam deſignet quam recta *XV* tangat in vertice *X*, ſintque ordinatim applicatæ *IA*, *VG* ut quælibet abſciſſarum *XI*, *XV* dignitates XI^n, XV^n; agantur *XT*, *GT*, *AH*, quarum *XT* parallela ſit *VG*, & *GT*, *AH* parabolam tangant in *G* & *A*: & corpus de loco quovis *A*, ſecundum rectam *AH* productam, juſta cum velocitate projectum, deſcribet hanc parabolam, ſi modo denſitas medii, in locis ſingulis *G*, ſit reciproce ut tangens *GT*. Velocitas autem in *G* ea erit quacum projectile pergeret, in ſpatio non reſiſtente, in parabola conica verticem *G*, diametrum *VG* deorſum productam, & latus rectum $\frac{2GTq}{nn-n \times VG}$ habente. Et reſiſtentia in *G* erit ad vim gravitatis ut *GT* ad $\frac{2nn-2n}{n-2} VG$. Unde ſi *NAK* lineam horizontalem deſignet, & manente tum denſitate medii in *A*, tum velocitate quacum corpus projicitur, mutetur utcunque angulus *NAH*; manebunt longitudines *AH*, *AI*, *HX*, & inde datur parabolæ vertex *X*, & poſitio rectæ *XI*, & ſumendo *VG* ad *IA* ut XV^n ad XI^n, dantur omnia parabolæ puncta *G*, per quæ projectile tranſibit.



SECTIO

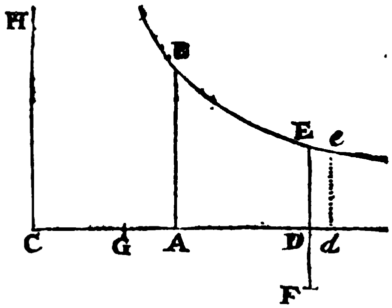
SECTIO III.

De motu corporum quibus reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicata.

PROPOSITIO XI. THEOREMA VIII.

Si corpori reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione duplicata, & idem ſola vi inſita in medio ſimilari movetur: ſumantur autem tempora in progreſſione arithmetica; quantitates velocitatibus reciproce proportionales, data quadam quantitate auctæ, erunt in progreſſione geometrica.

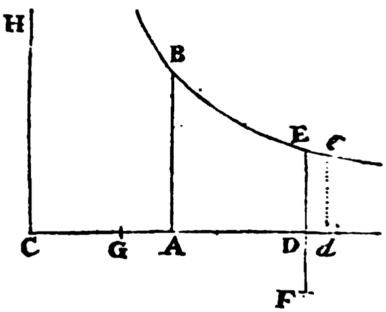
Centro *C*, aſymptotis rectangulis *CADd* & *CH*, deſcribatur hyperbola *BEe*, & aſymptoto *CH* parallelæ ſint *AB*, *DE*, *de*. In aſymptoto *CD* dentur puncta *A*, *G*: Et ſi tempus exponatur per aream hyperbolicam *ABED* uniformiter creſcentem; dico quod velocitas exponi poteſt per longitudinem *DF*, cujus reciproca *GD* una cum data *CG* componat longitudinem *CD* in progreſſione geometrica creſcentem.



Sit enim areola *DEed* datum temporis incrementum quam minimum, & erit *Dd* reciproce ut *DE*, ideoque directe ut *CD*. Ipſius autem $\frac{1}{GD}$ decrementum, quod (per hujus lem. II.) eſt $\frac{Dd}{GDq}$, erit ut $\frac{CD}{GDq}$ ſeu $\frac{CG+GD}{GDq}$, id eſt, ut $\frac{1}{GD}+\frac{CG}{GDq}$. Igitur tempore *ABED* per additionem datarum particularum *EDde* uniformiter creſcente, decreſcit $\frac{1}{GD}$ in eadem ratione cum velocitate. Nam decrementum velocitatis eſt ut reſiſtentia, hoc

 eſt

eſt (per hypotheſin) ut ſumma duarum quantitatum, quarum una eſt ut velocitas, altera ut quadratum velocitatis; & ipſius $\frac{1}{G\mathcal{D}}$ decrementum eſt ut ſumma quantitatum $\frac{1}{G\mathcal{D}}$ & $\frac{CG}{G\mathcal{D}q}$, quarum prior eſt ipſa $\frac{1}{G\mathcal{D}}$, & poſterior $\frac{CG}{G\mathcal{D}q}$ eſt ut $\frac{1}{G\mathcal{D}q}$: proinde $\frac{1}{G\mathcal{D}}$, ob analogum decrementum, eſt ut velocitas. Et ſi quantitas $G\mathcal{D}$, ipſi $\frac{1}{G\mathcal{D}}$ reciproce proportionalis, quantitate data *CG* augeatur; ſumma *C𝒟*, tempore *ABE𝒟* uniformiter creſcente, creſcet in progreſſione geometrica. *Q. E. D.*

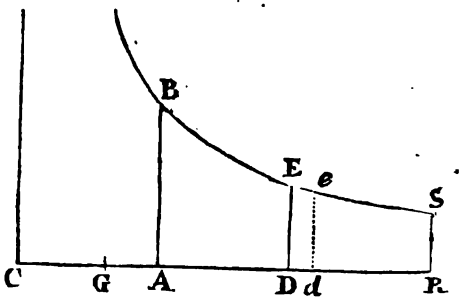


Corol. 1. Igitur ſi, datis punctis *A*, *G*, exponatur tempus per aream hyperbolicam *ABE𝒟*, exponi poteſt velocitas per ipſius *G𝒟* reciprocam $\frac{1}{G\mathcal{D}}$.

Corol. 2. Sumendo autem *GA* ad *G𝒟* ut velocitatis reciproca ſub initio, ad velocitatis reciprocam in fine temporis cujuſvis *ABE𝒟*, invenietur punctum *G*. Eo autem invento, velocitas ex dato quovis alio tempore inveniri poteſt.

PROPOSITIO XII. THEOREMA IX.

Iiſdem poſitis, dico quod ſi ſpatia deſcripta ſumantur in progreſſione arithmetica, velocitates data quadam quantitate auctæ erunt in progreſſione geometrica.



In aſymptoto *C𝒟* detur punctum *R*, & erecto perpendiculo *RS*, quod occurrat hyperbolæ in *S*, exponatur deſcriptum ſpatium per aream hyperbolicam *RSE𝒟*; & velocitas erit ut longitudo *G𝒟*, quæ cum data *CG* componit longitudinem *C𝒟* in progreſſione geometrica decreſcentem, interea dum ſpatium *RSE𝒟* augetur in arithmetica.

Etenim

Etenim ob datum ſpatii incrementum *EDde*, lineola *Dd*, quæ decrementum eſt ipſius *GD*, erit reciproce ut *ED*, ideoque directe ut *CD*, hoc eſt, ut ſumma ejuſdem *GD* & longitudinis datæ *CG*. Sed velocitatis decrementum, tempore ſibi reciproce proportionali, quo data ſpatii particula *DdeE* deſcribitur, eſt ut reſiſtentia & tempus conjunctim, id eſt, directe ut ſumma duarum quantitatum, quarum una eſt ut velocitas, altera ut velocitatis quadratum, & inverſe ut velocitas; ideoque directe ut ſumma duarum quantitatum, quarum una datur, altera eſt ut velocitas. Decrementum igitur tam velocitatis quam lineæ *GD*, eſt ut quantitas data & quantitas decreſcens conjunctim, & propter analoga decrementa, analogæ ſemper erunt quantitates decreſcentes; nimirum velocitas & linea *GD*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Si velocitas exponatur per longitudinem *GD*, ſpatium deſcriptum erit ut area hyperbolica *DESR*.

Corol. 2. Et ſi utcunque aſſumatur punctum *R*, invenietur punctum *G* capiendo *GR* ad *GD*, ut eſt velocitas ſub initio ad velocitatem poſt ſpatium quodvis *RSED* deſcriptum. Invento autem puncto *G*, datur ſpatium ex data velocitate, & contra.

Corol. 3. Unde cum (per prop. XI.) detur velocitas ex dato tempore, & per hanc propoſitionem detur ſpatium ex data velocitate; dabitur ſpatium ex dato tempore: & contra.

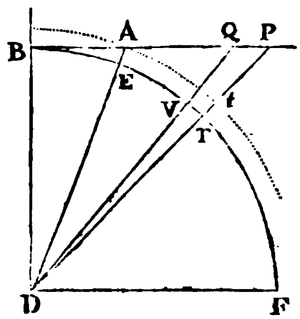
PROPOSITIO XIII. THEOREMA X.

Poſito quod corpus ab uniformi gravitate deorſum attractum recta aſcendit vel deſcendit; & quod eidem reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicata: dico quod, ſi circuli & hyperbolæ diametris parallelæ rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, & velocitates ſint ut ſegmenta quædam parallelarum a dato puncto ducta; tempora erunt ut arearum ſectores, rectis a centro ad ſegmentorum terminos ductis abſciſſi: & contra.

Caſ. 1. Ponamus primo quod corpus aſcendit, centroque *D* & ſemidiametro quovis *DB* deſcribatur circuli quadrans *BETF*, &

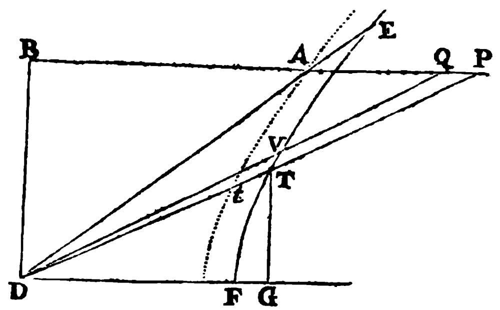
 per

per ſemidiametri DB terminum B agatur infinita BAP, ſemidiametro DF parallela. In ea detur punctum A, & capiatur ſegmentum AP velocitati proportionale. Et cum reſiſtentiæ pars altera ſit ut velocitas & pars altera ut velocitatis quadratum; ſit reſiſtentia tota ut AP *quad.* $+ 2BAP$. Jungantur DA, DP circulum ſecantes in E ac T, & exponatur gravitas per DA *quad.* ita ut ſit gravitas ad reſiſtentiam in P ut DAq ad $APq + 2BAP$: & tempus aſcenſus totius erit ut circuli ſector EDT.



Agatur enim DVQ, abſcindens & velocitatis AP momentum PQ, & ſectoris DET momentum DTV dato temporis momento reſpondens; & velocitatis decrementum illud PQ erit ut ſumma virium gravitatis DAq & reſiſtentiæ $APq + 2BAP$, id eſt (per prop. 12. lib. 2. elem.) ut DP *quad.* Proinde area DPQ, ipſi PQ proportionalis, eſt ut DP *quad.* & area DTV, quæ eſt ad aream DPQ ut DTq ad DPq, eſt ut datum DTq. Decreſcit igitur area EDT uniformiter ad modum temporis futuri, per ſubductionem datarum particularum DTV, & propterea tempori aſcenſus totius proportionalis eſt. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Si velocitas in aſcenſu corporis exponatur per longitudinem AP ut prius, & reſiſtentia ponatur eſſe ut $APq + 2BAP$, & ſi vis gravitatis minor ſit quam quæ per DAq exponi poſſit; capiatur BD ejus longitudinis, ut ſit $ABq - BDq$ gravitati proportionale, ſitque DF ipſi DB perpendicularis & æqualis, & per verticem F deſcribatur hyperbola $FTVE$, cujus ſemidiametri conjugatæ ſint DB & DF, quæque ſecet DA in E, & DP, DQ in T & V; & erit tempus aſcenſus totius ut hyperbolæ ſector TDE.

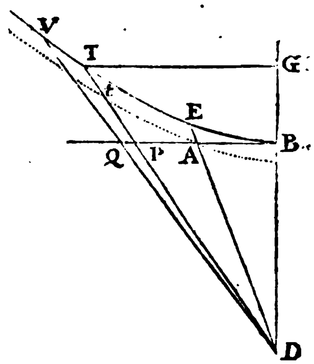


Nam velocitatis decrementum PQ, in data temporis particula factum, eſt ut ſumma reſiſtentiæ $APq + 2BAP$ & gravitatis $ABq - BDq$, id eſt, ut $BPq - BDq$. Eſt autem area DTV ad aream DPQ ut DTq ad DPq; ideoque, ſi ad DF demittatur perpendiculum GT, ut GTq ſeu $GDq - DFq$

ad

ad BDq, utque GDq ad BPq, & diviſim ut DFq ad $BPq - BDq$. Quare cum area DPQ ſit ut PQ, id eſt, ut $BPq - BDq$; erit area DTV ut datum DFq. Decreſcit igitur area EDT uniformiter ſingulis temporis particulis æqualibus, per ſubductionem particularum totidem datarum DTV, & propterea tempori proportionalis eſt. *Q. E. D.*

Caſ. 3. Sit AP velocitas in deſcenſu corporis, & $APq + 2BAP$ reſiſtentia, & $BDq - ABq$ vis gravitatis, exiſtente angulo DBA recto. Et ſi centro D, vertice principali B, deſcribatur hyperbola rectangula $BETV$ ſecans productas DA, DP & DQ in E, T & V; erit hyperbolæ hujus ſector DET ut tempus totum deſcenſus.



Nam velocitatis incrementum PQ, eique proportionalis area DPQ, eſt ut exceſſus gravitatis ſupra reſiſtentiam, id eſt, ut $BDq - ABq - 2BAP - APq$ ſeu $BDq - BPq$. Et area DTV eſt ad aream DPQ ut DTq ad DPq, ideoque ut GTq ſeu $GDq - BDq$ ad BPq, utque GDq ad BDq, & diviſim ut BDq ad $BDq - BPq$. Quare cum area DPQ ſit ut $BDq - BPq$, erit area DTV ut datum BDq. Creſcit igitur area EDT uniformiter ſingulis temporis particulis æqualibus, per additionem totidem datarum particularum DTV, & propterea tempori deſcenſus proportionalis eſt. *Q.E.D.*

Corol. Si centro D ſemidiametro DA per verticem A ducatur arcus At ſimilis arcui ET, & ſimiliter ſubtendens angulum ADT: velocitas AP erit ad velocitatem, quam corpus tempore EDT, in ſpatio non reſiſtente, aſcendendo amittere vel deſcendendo acquirere poſſet, ut area trianguli DAP ad aream ſectoris DAt; ideoque ex dato tempore datur. Nam velocitas, in medio non reſiſtente, tempori, atque ideo ſectori huic proportionalis eſt; in medio reſiſtente eſt ut triangulum; & in medio utroque, ubi quam minima eſt, accedit ad rationem æqualitatis, pro more ſectoris & trianguli.

Scholium.

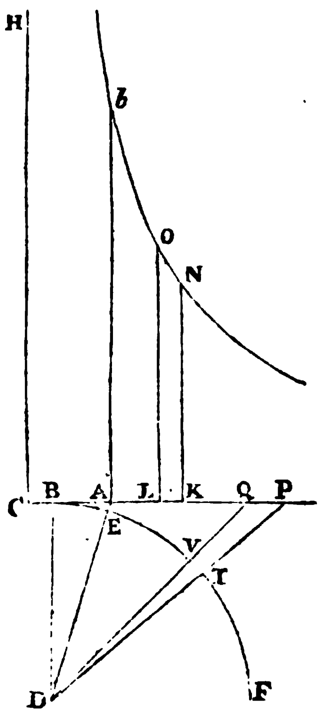
Demonſtrari etiam poſſet caſus in aſcenſu corporis, ubi vis gravitatis minor eſt quam quæ exponi poſſit per DAq ſeu $ABq + BDq$, &

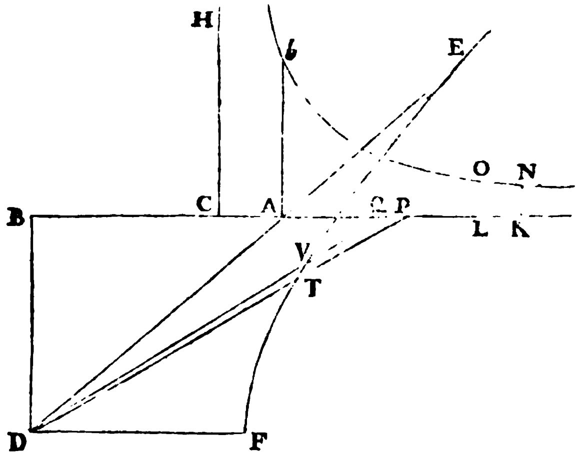
& major quam quæ exponi poſſit per $ABq - BDq$, & exponi debet per ABq. Sed propero ad alia.

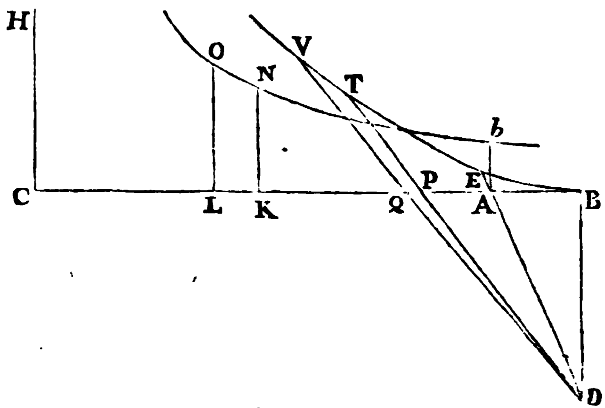
PROPOSITIO XIV. THEOREMA XI.

Iiſdem poſitis, dico quod ſpatium aſcenſu vel deſcenſu deſcriptum, eſt ut differentia areæ per quam tempus exponitur, & areæ cujuſdam alterius quæ augetur vel diminuitur in progreſſione arithmetica; ſi vires ex reſiſtentia & gravitate compoſitæ ſumantur in progreſſione geometrica.

Capiatur *AC* (in fig. tribus ultimis) gravitati, & *AK* reſiſtentiæ







proportionalis. Capiantur autem ad eaſdem partes puncti *A* ſi corpus

pus deſcendit, aliter ad contrarias. Erigatur Ab, quæ ſit ad DB ut DBq ad $4BAC$: & deſcripta ad aſymptotos rectangulas CK, CH hyperbola bN, erectaque KN ad CK perpendiculari, area $AbNK$ augebitur vel diminuetur in progreſſione arithmetica, dum vires CK in progreſſione geometrica ſumuntur. Dico igitur quod diſtantia corporis ab ejus altitudine maxima ſit ut exceſſus areæ $AbNK$ ſupra aream DET.

Nam cum AK ſit ut reſiſtentia, id eſt, ut $APq + 2BAP$; aſſumatur data quævis quantitas Z, & ponatur AK æqualis $\frac{APq + 2BAP}{Z}$; & (per hujus lemma II.) erit ipſius AK momentum KL æquale $\frac{2APQ + 2BA \times PQ}{Z}$ ſeu $\frac{2BPQ}{Z}$, & areæ $AbNK$ momentum $KLON$ æquale $\frac{2BPQ \times LO}{Z}$ ſeu $\frac{BPQ \times BD\,cub.}{2Z \times CK \times AB}$.

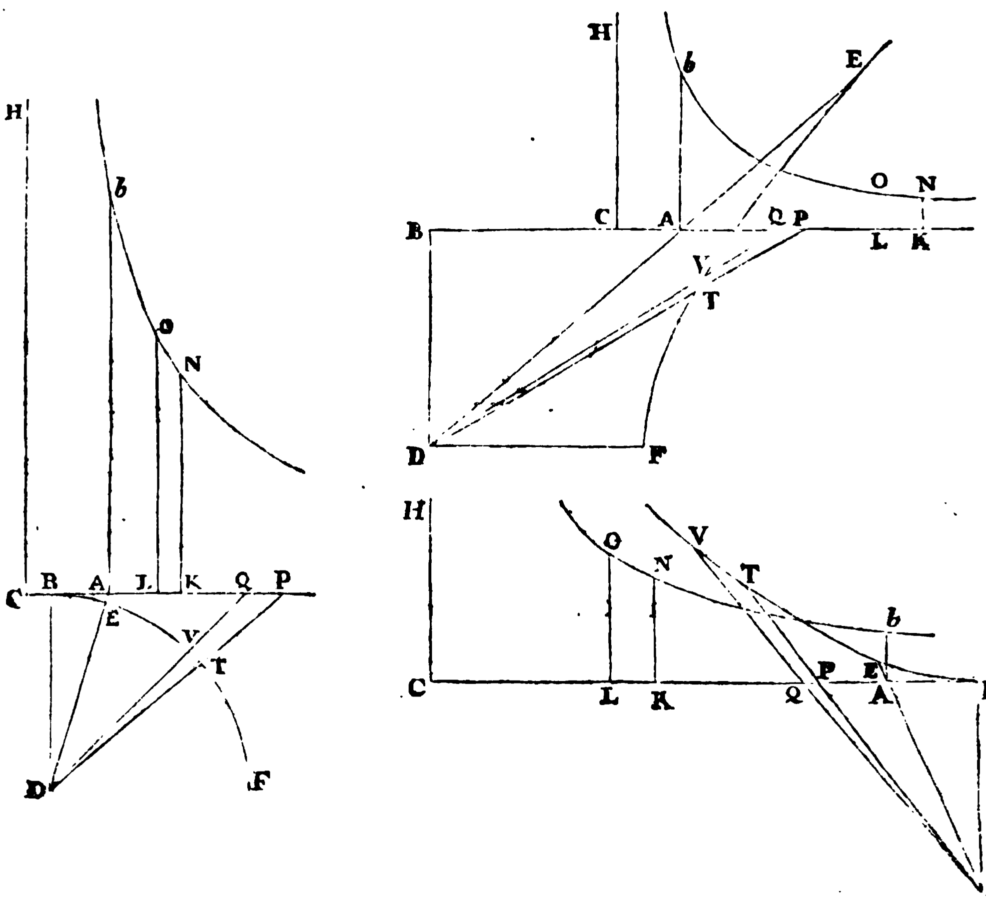
Caſ. 1. Jam ſi corpus aſcendit, ſitque gravitas ut $ABq + BDq$, exiſtente BET circulo (in figura prima) linea AC, quæ gravitati proportionalis eſt, erit $\frac{ABq + BDq}{Z}$, & DPq ſeu $APq + 2BAP + ABq + BDq$ erit $AK \times Z + AC \times Z$ ſeu $CK \times Z$; ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DTq vel DBq ad $CK \times Z$.

Caſ. 2. Sin corpus aſcendit, & gravitas ſit ut $ABq - BDq$, linea AC (in figura ſecunda) erit $\frac{ABq - BDq}{Z}$, & DTq erit ad DPq ut DFq ſeu DBq ad $BPq - BDq$ ſeu $APq + 2BAP + ABq - BDq$, id eſt, ad $AK \times Z + AC \times Z$ ſeu $CK \times Z$. Ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DBq ad $CK \times Z$.

Caſ. 3. Et eodem argumento, ſi corpus deſcendit, & propterea gravitas ſit ut $BDq - ABq$, & linea AC (in figura tertia) æquetur $\frac{BDq - ABq}{Z}$ erit area DTV ad aream DPQ ut DBq ad $CK \times Z$: ut ſupra.

Cum igitur areæ illæ ſemper ſint in hac ratione; ſi pro area DTV, qua momentum temporis ſibimet ipſi ſemper æquale exponitur, ſcribatur determinatum quodvis rectangulum, puta $BD \times m$, erit

erit area DPQ, id eſt, $\frac{1}{2}BD \times PQ$; ad $BD \times m$ ut $CK \times Z$ ad BDq. Atque inde fit $PQ \times BD$ *cub.* æquale $2BD \times m \times CK \times Z$, & areæ $AbNK$ momentum $KLON$ ſuperius inventum fit $\frac{BP \times BD \times m}{AB}$. Auferatur areæ DET momentum DTV ſeu $BD \times m$, & reſtabit $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$. Eſt igitur differentia momentorum, id eſt, momentum differentiæ arearum, æqualis $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$; & propterea



ob datum $\frac{BD \times m}{AB}$ ut velocitas AP, id eſt, ut momentum ſpatii quod corpus aſcendendo vel deſcendendo deſcribit. Ideoque differentia arearum & ſpatium illud, proportionalibus momentis creſcen-

tia

tia vel decreſcentia & ſimul incipientia vel ſimul evaneſcentia, ſunt proportionalia. *Q. E. D.*

Corol. Si longitudo, quæ oritur applicando aream *DET* ad lineam *BD*, dicatur *M*; & longitudo alia *V* ſumatur in ea ratione ad longitudinem *M*, quam habet linea *DA* ad lineam *DE*: ſpatium, quod corpus aſcenſu vel deſcenſu toto in medio reſiſtente deſcribit, erit ad ſpatium, quod corpus in medio non reſiſtente e quiete cadendo eodem tempore deſcribere poteſt, ut arearum prædictarum differentia ad $\frac{BD \times V^2}{AB}$: ideoque ex dato tempore datur. Nam ſpatium in medio non reſiſtente eſt in duplicata ratione temporis, ſive ut V^2; & ob datas *BD* & *AB* ut $\frac{BD \times V^2}{AB}$. Hæc area æqualis eſt areæ $\frac{DAq \times BD \times M^2}{DEq \times AB}$, & ipſius *M* momentum eſt *m*; & propterea hujus areæ momentum eſt $\frac{DAq \times BD \times 2M \times m}{DEq \times AB}$. Hoc autem momentum eſt ad momentum differentiæ arearum prædictarum *DET* & *AbNK*, viz. ad $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$, ut $\frac{DAq \times BD \times M}{DEq}$ ad $\frac{1}{2}BD \times AP$, ſive ut $\frac{DAq}{DEq}$ in *DET* ad *DAP*; ideoque, ubi areæ *DET* & *DAP* quam minimæ ſunt, in ratione æqualitatis. Area igitur $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & differentia arearum *DET* & *AbNK*, quando omnes hæ areæ quam minimæ ſunt, æqualia habent momenta; ideoque ſunt æquales. Unde cum velocitates, & propterea etiam ſpatia in medio utroque in principio deſcenſus vel fine aſcenſus ſimul deſcripta accedant ad æqualitatem; ideoque tunc ſint ad invicem ut area $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & arearum *DET* & *AbNK* differentia; & præterea cum ſpatium in medio non reſiſtente ſit perpetuo ut $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & ſpatium in medio reſiſtente ſit perpetuo ut arearum *DET* & *AbNK* differentia: neceſſe eſt, ut ſpatia in medio utroque, in æqualibus quibuſcunque temporibus deſcripta, ſint ad invicem ut area

Nn illa

 illa $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & arearum *DET* & *AbNK* differentia. *Q. E. D.*

Scholium.

Reſiſtentia corporum ſphæricorum in fluidis oritur partim ex tenacitate, partim ex frictione, & partim ex denſitate medii. Et reſiſtentiæ partem illam, quæ oritur ex denſitate fluidi diximus eſſe in duplicata ratione velocitatis; pars altera, quæ oritur ex tenacitate fluidi, eſt uniformis, ſive ut momentum temporis: ideoque jam pergere liceret ad motum corporum, quibus reſiſtitur partim vi uniformi ſeu in ratione momentorum temporis, & partim in ratione duplicata velocitatis. Sed ſufficit aditum patefeciſſe ad hanc ſpeculationem in propoſitionibus VIII. & IX. quæ præcedunt, & eorum corollariis. In iiſdem utique pro corporis aſcendentis reſiſtentia uniformi, quæ ex ejus gravitate oritur, ſubſtitui poteſt reſiſtentia uniformis, quæ oritur ex tenacitate medii, quando corpus ſola vi inſita movetur; & corpore recta aſcendente addere licet hanc uniformem reſiſtentiam vi gravitatis; eandemque ſubducere, quando corpus recta deſcendit. Pergere etiam liceret ad motum corporum, quibus reſiſtitur partim uniformiter, partim in ratione velocitatis, & partim in ratione duplicata velocitatis. Et viam aperui in propoſitionibus præcedentibus XIII. & XIV. in quibus etiam reſiſtentia uniformis, quæ oritur ex tenacitate medii pro vi gravitatis ſubſtitui poteſt, vel cum eadem, ut prius, componi. Sed propero ad alia.

SECTIO IV.

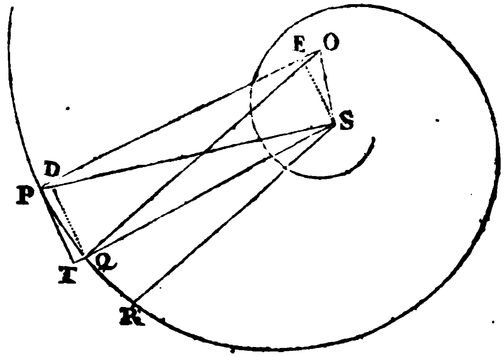
De corporum circulari motu in mediis reſiſtentibus.

LEMMA III.

Sit PQR *ſpiralis quæ ſecet radios omnes* SP, SQ, SR, *&c. in æqualibus angulis. Agatur recta* PT *quæ tangat eandem in puncto quovis* P, *ſecetque radium* SQ *in* T; *& ad ſpiralem erectis perpendiculis* PO, QO *concurrentibus in* O, *jun-*

O, jungatur SO. *Dico quod ſi puncta* P *&* Q *accedant ad invicem & coeant, angulus* PSO *evadet rectus, & ultima ratio rectanguli* TQ×2PS *ad* PQ *quad. erit ratio æqualitatis.*

Etenim de angulis rectis *OPQ*, *OQR* ſubducantur anguli æquales *SPQ*, *SQR*, & manebunt anguli æquales *OPS*, *OQS*. Ergo circulus qui tranſit per puncta *O*, *S*, *P* tranſibit etiam per punctum *Q*. Coeant puncta *P* & *Q*, & hic circulus in loco coitus *PQ* tanget ſpiralem, ideoque perpendiculariter ſecabit rectam *OP*. Fiet igitur *OP* diameter circuli hujus, & angulus *OSP* in ſemicirculo rectus. *Q. E. D.*



Ad *OP* demittantur perpendicula *QD*, *SE*, & linearum rationes ultimæ erunt hujuſmodi: *TQ* ad *PD* ut *TS* vel *PS* ad *PE*, ſeu 2*PO* ad 2*PS*; item *PD* ad *PQ* ut *PQ* ad 2*PO*; & ex æquo perturbate *TQ* ad *PQ* ut *PQ* ad 2*PS*. Unde fit *PQq* æquale *TQ*× 2*PS*. *Q. E. D.*

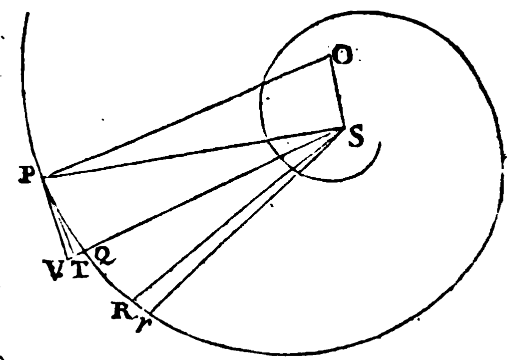
PROPOSITIO XV. THEOREMA XII.

Si medii denſitas in locis ſingulis ſit reciproce ut diſtantia locorum a centro immobili, ſitque vis centripeta in duplicata ratione denſitatis: dico quod corpus gyrari poteſt in ſpirali, quæ radios omnes a centro illo ductos interſecat in angulo dato.

Ponantur quæ in ſuperiore lemmate, & producatur *SQ* ad *V*, ut ſit *SV* æqualis *SP*. Tempore quovis, in medio reſiſtente, deſcribat corpus arcum quam minimum *PQ*, & tempore duplo arcum quam minimum *PR*; & decrementa horum arcuum ex reſiſtentia oriunda, ſive defectus ab arcubus, qui in medio non reſiſtente iiſdem

 temporibus

temporibus deſcriberentur, erunt ad invicem ut quadrata temporum in quibus generantur: Eſt itaque decrementum arcus PQ pars quarta decrementi arcus PR. Unde etiam, ſi areæ PSQ æqualis capiatur area QSr, erit decrementum arcus PQ æquale dimidio lineolæ Rr; ideoque vis reſiſtentiæ & vis centripeta ſunt ad invicem ut lineolæ $\frac{1}{2}Rr$ & TQ quas ſimul generant. Quoniam vis centripeta, qua corpus urgetur in P, eſt reciproce ut SPq, & (per lem. x. lib. 1.) lineola TQ, quæ vi illa generatur, eſt in ratione compoſita



ex ratione hujus vis & ratione duplicata temporis quo arcus PQ deſcribitur (nam reſiſtentiam in hoc caſu, ut infinite minorem quam vis centripeta, negligo) erit $TQ \times SPq$; id eſt (per lemma noviſſimum) $\frac{1}{2}PQq \times SP$, in ratione duplicata temporis, ideoque tempus eſt ut $PQ \times \sqrt{SP}$; & corporis velocitas, qua arcus PQ illo tempore deſcribitur, ut $\frac{PQ}{PQ \times \sqrt{SP}}$ ſeu $\frac{1}{\sqrt{SP}}$, hoc eſt, in ſubduplicata ratione ipſius SP reciproce. Et ſimili argumento, velocitas qua arcus QR deſcribitur, eſt in ſubduplicata ratione ipſius SQ reciproce. Sunt autem arcus illi PQ & QR ut velocitates deſcriptrices ad invicem, id eſt, in ſubduplicata ratione SQ ad SP, ſive ut SQ ad $\sqrt{SP \times SQ}$; & ob æquales angulos SPQ, SQr & æquales areas PSQ, QSr, eſt arcus PQ ad arcum Qr ut SQ ad SP. Sumantur proportionalium conſequentium differentiæ, & fiet arcus PQ ad arcum Rr ut SQ ad $SP - \sqrt{SP \times SQ}$, ſeu $\frac{1}{2}VQ$. Nam punctis P & Q coeuntibus, ratio ultima $SP - \sqrt{SP \times SQ}$ ad $\frac{1}{2}VQ$ eſt æqualitatis. Quoniam decrementum arcus PQ, ex reſiſtentia oriundum, ſive hujus duplum Rr, eſt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim; erit reſiſtentia ut $\frac{Rr}{PQq \times SP}$. Erat autem PQ ad Rr, ut SQ ad $\frac{1}{2}VQ$, & inde $\frac{Rr}{PQq \times SP}$ fit ut $\frac{\frac{1}{2}VQ}{PQ \times SP \times SQ}$ ſive ut $\frac{\frac{1}{2}OS}{OP \times SPq}$. Namque punctis P & Q coeuntibus, SP & SQ coincidunt, & angulus PVQ fit rectus; & ob ſimilia triangula PVQ, PSO, fit PQ

ad

ad $\frac{1}{2}VQ$ ut OP ad $\frac{1}{2}OS$. Eſt igitur $\frac{OS}{OP \times SPq}$ ut reſiſtentia, id eſt, in ratione denſitatis medii in P & ratione duplicata velocitatis conjunctim. Auferatur duplicata ratio velocitatis, nempe ratio $\frac{1}{SP}$, & manebit medii denſitas in P ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Detur ſpiralis, & ob datam rationem OS ad OP, denſitas medii in P erit ut $\frac{1}{SP}$. In medio igitur cujus denſitas eſt reciproce ut diſtantia a centro SP, corpus gyrari poteſt in hac ſpirali. *Q. E. D.*

Corol. 1. Velocitas in loco quovis P ea ſemper eſt, quacum corpus in medio non reſiſtente eadem vi centripeta gyrari poteſt in circulo, ad eandem a centro diſtantiam SP.

Corol. 2. Medii denſitas, ſi datur diſtantia SP, eſt ut $\frac{OS}{OP}$, ſin diſtantia illa non datur, ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Et inde ſpiralis ad quamlibet medii denſitatem aptari poteſt.

Corol. 3. Vis reſiſtentiæ in loco quovis P, eſt ad vim centripetam in eodem loco ut $\frac{1}{2}OS$ ad OP. Nam vires illæ ſunt ad invicem ut $\frac{1}{2}Rr$ & TQ ſive ut $\frac{\frac{1}{4}VQ \times PQ}{SQ}$ & $\frac{\frac{1}{2}PQq}{SP}$, hoc eſt, ut $\frac{1}{2}VQ$ & PQ, ſeu $\frac{1}{2}OS$ & OP. Data igitur ſpirali datur proportio reſiſtentiæ ad vim centripetam, & vice verſa ex data illa proportione datur ſpiralis.

Corol 4. Corpus itaque gyrari nequit in hac ſpirali, niſi ubi vis reſiſtentiæ minor eſt quam dimidium vis centripetæ. Fiat reſiſtentia æqualis dimidio vis centripetæ, & ſpiralis conveniet cum linea recta PS, inque hac recta corpus deſcendet ad centrum ea cum velocitate, quæ ſit ad velocitatem, qua probavimus in ſuperioribus in caſu parabolæ (theor. x. lib. 1.) deſcenſum in medio non reſiſtente fieri, in ſubduplicata ratione unitatis ad numerum binarium. Et tempora deſcenſus hic erunt reciproce ut velocitates, atque ideo dantur.

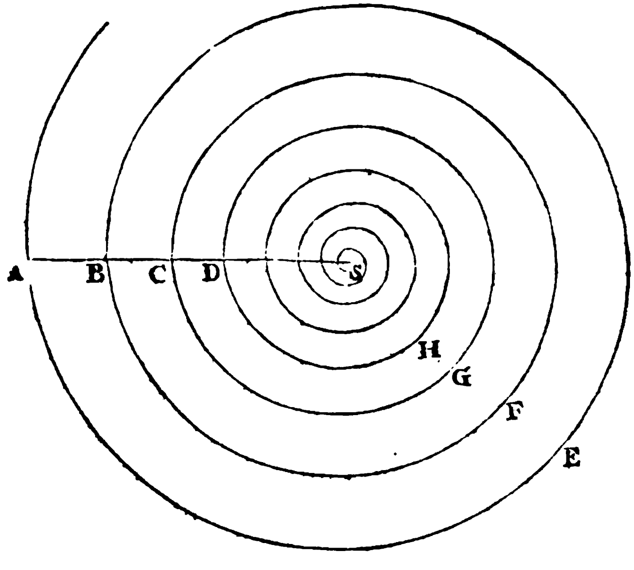
Corol. 5. Et quoniam in æqualibus a centro diſtantiis velocitas eadem eſt in ſpirali PQR atque in recta SP, & longitudo ſpiralis ad longitudinem rectæ PS eſt in data ratione, nempe in ratione OP ad

OS;

OS; tempus deſcenſus in ſpirali erit ad tempus deſcenſus in recta *SP* in eadem illa data ratione, proindeque datur.

Corol. 6. Si centro *S* intervallis duobus quibuſcunque datis deſcribantur duo circuli; & manentibus hiſce circulis, mutetur utcunque angulus quem ſpiralis continet cum radio *PS*: numerus revolutionum quas corpus intra circulorum circumferentias, pergendo in ſpirali a circumferentia ad circumferentiam, complere poteſt, eſt ut $\frac{PS}{OS}$, ſive ut tangens anguli illius quem ſpiralis continet cum radio *PS*; tempus vero revolutionum earundem ut $\frac{OP}{OS}$, id eſt, ut ſecans anguli ejuſdem, vel etiam reciproce ut medii denſitas.

Corol. 7. Si corpus in medio, cujus denſitas eſt reciproce ut diſtantia locorum a centro, revolutionem in curva quacunque *AEB* circa centrum illud fecerit, & radium primum *AS* in eodem angulo ſecuerit in *B* quo prius in *A*, idque cum velocitate quæ fuerit ad velocitatem ſuam primam in *A* reciproce in ſubduplicata ratione diſtantiarum a centro (id eſt, ut *AS* ad mediam proportionalem inter *AS*



& *BS*) corpus illud perget innumeras conſimiles revolutiones *BFC*, *CGD*, &c. facere, & interſectionibus diſtinguet radium *AS* in partes *AS*, *BS*, *CS*, *DS*, &c. continue proportionales. Revolutionum vero

vero tempora erunt ut perimetri orbitarum *AEB*, *BFC*, *CGD*, &c. directe, & velocitates in principiis *A*, *B*, *C*, inverſe; id eſt, ut $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$. Atque tempus totum, quo corpus perveniet ad centrum, erit ad tempus revolutionis primæ, ut ſumma omnium continue proportionalium $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$, pergentium in infinitum, ad terminum primum $AS^{\frac{3}{2}}$; id eſt, ut terminus ille primus $AS^{\frac{3}{2}}$ ad differentiam duorum primorum $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$, ſive ut $\frac{2}{3}AS$ ad *AB* quam proxime. Unde tempus illud totum expedite invenitur.

Corol. 8. Ex his etiam præter propter colligere licet motus corporum in mediis, quorum denſitas aut uniformis eſt, aut aliam quamcunque legem aſſignatam obſervat. Centro *S*, intervallis continue proportionalibus *SA*, *SB*, *SC*, &c. deſcribe circulos quotcunque, & ſtatue tempus revolutionum inter perimetros duorum quorumvis ex his circulis, in medio de quo egimus, eſſe ad tempus revolutionum inter eoſdem in medio propoſito, ut medii propoſiti denſitas mediocris inter hos circulos ad medii, de quo egimus, denſitatem mediocrem inter eoſdem quam proxime: Sed & in eadem quoque ratione eſſe ſecantem anguli quo ſpiralis præfinita, in medio de quo egimus, ſecat radium *AS*, ad ſecantem anguli quo ſpiralis nova ſecat radium eundem in medio propoſito: Atque etiam ut ſunt eorundem angulorum tangentes ita eſſe numeros revolutionum omnium inter circulos eoſdem duos quam proxime. Si hæc fiant paſſim inter circulos binos, continuabitur motus per circulos omnes. Atque hoc pacto haud difficulter imaginari poſſimus quibus modis ac temporibus corpora in medio quocunque regulari gyrari debebunt.

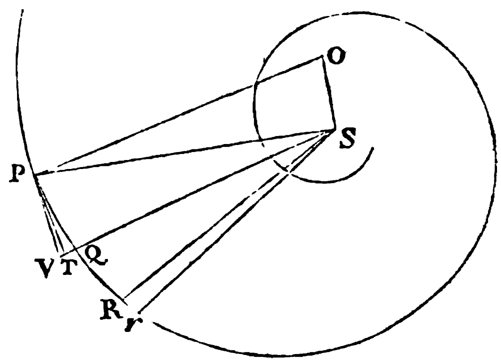
Corol. 9. Et quamvis motus excentrici in ſpiralibus ad formam ovalium accedentibus peragantur; tamen concipiendo ſpiralium illarum ſingulas revolutiones iiſdem ab invicem intervallis diſtare, iiſdemque gradibus ad centrum accedere cum ſpirali ſuperius deſcripta, intelligemus etiam quomodo motus corporum in hujuſmodi ſpiralibus peragantur.

PROPO-

De Motu Corporum

PROPOSITIO XVI. THEOREMA XIII.

Si medii denſitas in locis ſingulis ſit reciproce ut diſtantia locorum a centro immobili, ſitque vis centripeta reciproce ut dignitas quælibet ejuſdem diſtantiæ: dico quod corpus gyrari poteſt in ſpirali quæ radios omnes a centro illo ductos interſecat in angulo dato.



Demonſtratur eadem methodo cum propoſitione ſuperiore. Nam ſi vis centripeta in P ſit reciproce ut diſtantiæ SP, dignitas quælibet SP^{n+1} cujus index eſt $n+1$: colligetur ut ſupra, quod tempus, quo corpus deſcribit arcum quemvis PQ, erit ut $PQ \times PS^{\frac{1}{2}n}$; & reſiſtentia in P ut $\frac{Rr}{PQq \times SP^{n}}$, ſive ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times VQ}{PQ \times SP^{n} \times SQ}$, ideoque ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS}{OP \times SP^{n+1}}$, hoc eſt, ob datum $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS}{OP}$, reciproce ut SP^{n+1}. Et propterea, cum velocitas ſit reciproce ut $SP^{\frac{1}{2}n}$, denſitas in P erit reciproce ut SP.

Corol. 1. Reſiſtentia eſt ad vim centripetam ut $\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS$ ad OP.

Corol. 2. Si vis centripeta ſit reciproce ut SP *cub.* erit $1-\frac{1}{2}n=0$; ideoque reſiſtentia & denſitas medii nulla erit, ut in propoſitione nona libri primi.

Corol. 3. Si vis centripeta ſit reciproce ut dignitas aliqua radii SP cujus index eſt major numero 3, reſiſtentia affirmativa in negativam mutabitur.

Scholium.

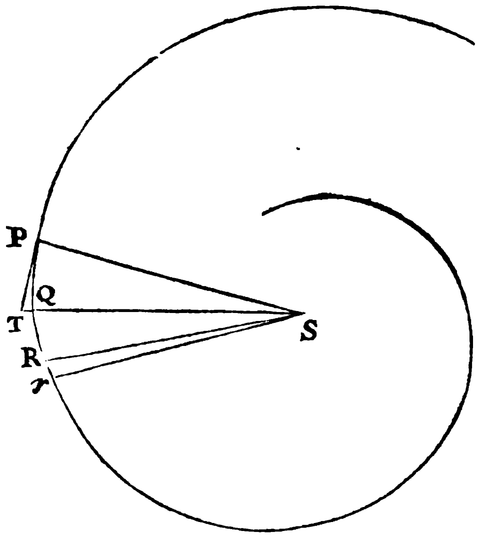
Cæterum hæc propoſitio & ſuperiores, quæ ad media inæqualiter denſa ſpectant, intelligendæ ſunt de motu corporum adeo parvorum, ut

ut medii ex uno corporis latere major denſitas quam ex altero non conſideranda veniat. Reſiſtentiam quoque cæteris paribus denſitati proportionalem eſſe ſuppono. Unde in mediis, quorum vis reſiſtendi non eſt ut denſitas, debet denſitas eo uſque augeri vel diminui, ut reſiſtentiæ vel tollatur exceſſus vel defectus ſuppleatur.

PROPOSITIO XVII. PROBLEMA IV.

Invenire & vim centripetam & medii reſiſtentiam, qua corpus in data ſpirali, data velocitatis lege, revolvi poteſt.

Sit ſpiralis illa *PQR*. Ex velocitate, qua corpus percurrit arcum quam minimum *PQ*, dabitur tempus, & ex altitudine *TQ*, quæ eſt ut vis centripeta & quadratum temporis, dabitur vis. Deinde ex



arearum, æqualibus temporum particulis confectarum *PSQ* & *QSR*, differentia *RSr*, dabitur corporis retardatio, & ex retardatione invenietur reſiſtentia ac denſitas medii.

PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA V.

Data lege vis centripetæ, invenire medii denſitatem in locis ſingulis, qua corpus datam ſpiralem deſcribet.

Ex vi centripeta invenienda eſt velocitas in locis ſingulis, deinde

ex velocitatis retardatione quærenda medii denſitas; ut in propoſitione ſuperiore.

Methodum vero tractandi hæc problemata aperui in hujus propoſitione decima, & lemmate ſecundo; & lectorem in hujuſmodi perplexis diſquiſitionibus diutius detinere nolo. Addenda jam ſunt aliqua de viribus corporum ad progrediendum, deque denſitate & reſiſtentia mediorum, in quibus motus hactenus expoſiti & his affines peraguntur.

SECTIO V.

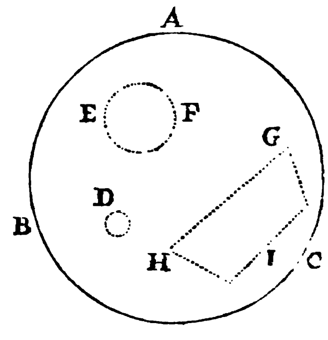
De denſitate & compreſſione fluidorum, deque hydroſtatica.

Definitio Fluidi.

Fluidum eſt corpus omne, cujus partes cedunt vi cuicunque illatæ, & cedendo facile moventur inter ſe.

PROPOSITIO XIX. THEOREMA XIV.

Fluidi homogenei & immoti, quod in vaſe quocunque immoto clauditur & undique comprimitur, partes omnes (ſepoſita condenſationis, gravitatis, & virium omnium centripetarum conſideratione) æqualiter premuntur undique, & ſine omni motu a preſſione illa orto permanent in locis ſuis.



Caſ. 1. In vaſe ſphærico *ABC* claudatur & uniformiter comprimatur fluidum undique: dico quod ejuſdem pars nulla ex illa preſſione movebitur. Nam ſi pars aliqua *D* moveatur, neceſſe eſt ut omnes hujuſmodi partes, ad eandem a centro diſtantiam undique conſiſtentes, ſimili motu ſimul moveantur; atque hoc ideo quia ſimilis & æqualis eſt omnium preſſio, & motus omnis excluſus ſupponitur, niſi qui a preſſione illa oriatur. Atqui non poſſunt omnes ad centrum propius accedere, niſi fluidum ad centrum condenſetur;

denſetur; contra hypotheſin. Non poſſunt longius ab eo recedere, niſi fluidum ad circumferentiam condenſetur; etiam contra hypotheſin. Non poſſunt ſervata ſua a centro diſtantia moveri in plagam quamcunque, quia pari ratione movebuntur in plagam contrariam; in plagas autem contrarias non poteſt pars eadem, eodem tempore, moveri. Ergo fluidi pars nulla de loco ſuo movebitur. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Dico jam, quod fluidi hujus partes omnes ſphæricæ æqualiter premuntur undique. Sit enim *EF* pars ſphærica fluidi, & ſi hæc undique non premitur æqualiter, augeatur preſſio minor, uſque dum ipſa undique prematur æqualiter; & partes ejus, per caſum primum, permanebunt in locis ſuis. Sed ante auctam preſſionem permanebunt in locis ſuis, per caſum eundem primum, & additione preſſionis novæ movebuntur de locis ſuis, per definitionem fluidi. Quæ duo repugnant. Ergo falſo dicebatur quod ſphæra *EF* non undique premebatur æqualiter. *Q. E. D.*

Caſ. 3. Dico præterea quod diverſarum partium ſphæricarum æqualis ſit preſſio. Nam partes ſphæricæ contiguæ ſe mutuo premunt æqualiter in puncto contactus, per motus legem III. Sed &, per caſum ſecundum, undique premuntur eadem vi. Partes igitur duæ quævis ſphæricæ non contiguæ, quia pars ſphærica intermedia tangere poteſt utramque, prementur eadem vi. *Q. E. D.*

Caſ. 4. Dico jam quod fluidi partes omnes ubique premuntur æqualiter. Nam partes duæ quævis tangi poſſunt a partibus ſphæricis in punctis quibuſcunque, & ibi partes illas ſphæricas æqualiter premunt, per caſum 3. & viciſſim ab illis æqualiter premuntur, per motus legem tertiam. *Q. E. D.*

Caſ. 5. Cum igitur fluidi pars quælibet *GHI* in fluido reliquo tanquam in vaſe claudatur, & undique prematur æqualiter, partes autem ejus ſe mutuo æqualiter premant & quieſcant inter ſe; manifeſtum eſt quod fluidi cujuſcunque *GHI*, quod undique premitur æqualiter, partes omnes ſe mutuo premunt æqualiter, & quieſcunt inter ſe. *Q. E. D.*

Caſ. 6. Igitur ſi fluidum illud in vaſe non rigido claudatur, & undique non prematur æqualiter; cedet idem preſſioni fortiori, per definitionem fluiditatis.

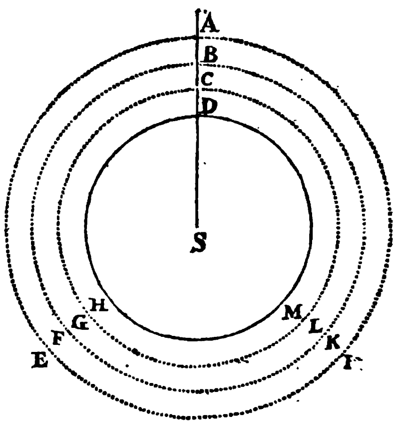
Caſ. 7. Ideoque in vaſe rigido fluidum non ſuſtinebit preſſionem forti-

fortiorem ex uno latere quam ex alio, ſed eidem cedet, idque in momento temporis, quia latus vaſis rigidum non perſequitur liquorem cedentem. Cedendo autem urgebit latus oppoſitum, & ſic preſſio undique ad æqualitatem verget. Et quoniam fluidum, quam primum a parte magis preſſa recedere conatur, inhibetur per reſiſtentiam vaſis ad latus oppoſitum; reducetur preſſio undique ad æqualitatem, in momento temporis, ſine motu locali: & ſubinde partes fluidi, per caſum quintum, ſe mutuo prement æqualiter, & quieſcent inter ſe. *Q. E. D.*

Corol. Unde nec motus partium fluidi inter ſe, per preſſionem fluido ubivis in externa ſuperficie illatam, mutari poſſunt, niſi quatenus aut figura ſuperficiei alicubi mutatur, aut omnes fluidi partes intenſius vel remiſſius ſeſe premendo difficilius vel facilius labuntur inter ſe.

PROPOSITIO XX. THEOREMA XV.

Si fluidi ſphærici, & in æqualibus a centro diſtantiis homogenei, fundo ſphærico concentrico incumbentis partes ſingulæ verſus centrum totius gravitent; ſuſtinet fundum pondus cylindri, cujus baſis æqualis eſt ſuperficiei fundi, & altitudo eadem quæ fluidi incumbentis.



Sit *DHM* ſuperficies fundi, & *AEI* ſuperficies ſuperior fluidi. Superficiebus ſphæricis innumeris *BFK*, *CGL* diſtinguatur fluidum in orbes concentricos æqualiter craſſos; & concipe vim gravitatis agere ſolummodo in ſuperficiem ſuperiorem orbis cujuſque, & æquales eſſe actiones in æquales partes ſuperficierum omnium. Premitur ergo ſuperficies ſuprema *AE* vi ſimplici gravitatis propriæ, qua & omnes orbis ſupremi partes & ſuperficies ſecunda *BFK* (per prop. XIX.) pro menſura ſua æqualiter premuntur. Premitur præterea ſuperficies ſecunda *BFK* vi propriæ gravitatis, quæ

addita vi priori facit preſſionem duplam. Hac preſſione, pro menſura ſua, & inſuper vi propriæ gravitatis, id eſt, preſſione tripla, urgetur ſuperficies tertia *CGL*. Et ſimiliter preſſione quadrupla urgetur ſuperficies quarta, quintupla quinta, & ſic deinceps. Preſſio igitur qua ſuperficies unaquæque urgetur, non eſt ut quantitas ſolida fluidi incumbentis, ſed ut numerus orbium ad uſque ſummitatem fluidi; & æquatur gravitati orbis infimi multiplicatæ per numerum orbium: hoc eſt, gravitati ſolidi cujus ultima ratio ad cylindrum præfinitum (ſi modò orbium augeatur numerus & minuatur craſſitudo in infinitum, ſic ut actio gravitatis a ſuperficie infima ad ſupremam continua reddatur) fiet ratio æqualitatis. Suſtinet ergo ſuperficies infima pondus cylindri præfiniti. *Q. E. D.* Et ſimili argumentatione patet propoſitio, ubi gravitas decreſcit in ratione quavis aſſignata diſtantiæ a centro, ut & ubi fluidum ſurſum rarius eſt, deorſum denſius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur fundum non urgetur a toto fluidi incumbentis pondere, ſed eam ſolummodo ponderis partem ſuſtinet quæ in propoſitione deſcribitur; pondere reliquo a fluidi figura fornicata ſuſtentato.

Corol. 2. In æqualibus autem a centro diſtantiis eadem ſemper eſt preſſionis quantitas, ſive ſuperficies preſſa ſit horizonti parallela vel perpendicularis vel obliqua; ſive fluidum, a ſuperficie preſſa ſurſum continuatum, ſurgat perpendiculariter ſecundum lineam rectam, vel ſerpit oblique per tortas cavitates & canales, eaſque regulares vel maxime irregulares, amplas vel anguſtiſſimas. Hiſce circumſtantiis preſſionem nil mutari colligitur, applicando demonſtrationem theorematis hujus ad caſus ſingulos fluidorum.

Corol. 3. Eadem demonſtratione colligitur etiam (per prop. XIX.) quod fluidi gravis partes nullum, ex preſſione ponderis incumbentis, acquirunt motum inter ſe; ſi modo excludatur motus qui ex condenſatione oriatur.

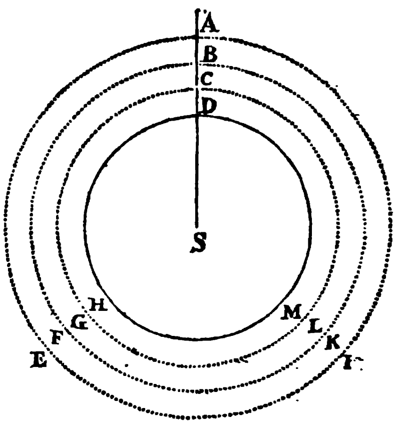
Corol. 4. Et propterea ſi aliud ejuſdem gravitatis ſpecificæ corpus, quod ſit condenſationis expers, ſubmergatur in hoc fluido, id ex preſſione ponderis incumbentis nullum acquiret motum: non deſcendet, non aſcendet, non cogetur figuram ſuam mutare. Si ſphæricum eſt manebit ſphæricum, non obſtante preſſione; ſi quadratum eſt manebit quadratum: idque ſive molle ſit, ſive fluidiſſimum; ſive

De Motu Corporum fortiorem ex uno latere quam ex alio, ſed eidem cedet, idque in momento temporis, quia latus vaſis rigidum non perſequitur liquorem cedentem. Cedendo autem urgebit latus oppoſitum, & ſic preſſio undique ad æqualitatem verget. Et quoniam fluidum, quam primum a parte magis preſſa recedere conatur, inhibetur per reſiſtentiam vaſis ad latus oppoſitum; reducetur preſſio undique ad æqualitatem, in momento temporis, ſine motu-locali: & ſubinde partes fluidi, per caſum quintum, ſe mutuo prement æqualiter, & quieſcent inter ſe. *Q. E. D.*

Corol. Unde nec motus partium fluidi inter ſe, per preſſionem fluido ubivis in externa ſuperficie illatam, mutari poſſunt, niſi quatenus aut figura ſuperficiei alicubi mutatur, aut omnes fluidi partes intenſius vel remiſſius ſeſe premendo difficilius vel facilius labuntur inter ſe.

PROPOSITIO XX. THEOREMA XV.

Si fluidi ſphærici, & in æqualibus a centro diſtantiis homogenei, fundo ſphærico concentrico incumbentis partes ſingulæ verſus centrum totius gravitent; ſuſtinet fundum pondus cylindri, cujus baſis æqualis eſt ſuperficiei fundi, & altitudo eadem quæ fluidi incumbentis.



Sit *DHM* ſuperficies fundi, & *AEI* ſuperficies ſuperior fluidi. Superficiebus ſphæricis innumeris *BFK*, *CGL* diſtinguatur fluidum in orbes concentricos æqualiter craſſos; & concipe vim gravitatis agere ſolummodo in ſuperficiem ſuperiorem orbis cujuſque, & æquales eſſe actiones in æquales partes ſuperficierum omnium. Premitur ergo ſuperficies ſuprema *AE* vi ſimplici gravitatis propriæ, qua & omnes orbis ſupremi partes & ſuperficies ſecunda *BFK* (per prop. XIX.) pro menſura ſua æqualiter premuntur. Premitur præterea ſuperficies ſecunda *BFK* vi propriæ gravitatis, quæ addita

addita vi priori facit preſſionem duplam. Hac preſſione, pro menſura ſua, & inſuper vi propriæ gravitatis, id eſt, preſſione tripla, urgetur ſuperficies tertia *CGL*. Et ſimiliter preſſione quadrupla urgetur ſuperficies quarta, quintupla quinta, & ſic deinceps. Preſſio igitur qua ſuperficies unaquæque urgetur, non eſt ut quantitas ſolida fluidi incumbentis, ſed ut numerus orbium ad uſque ſummitatem fluidi; & æquatur gravitati orbis infimi multiplicatæ per numerum orbium: hoc eſt, gravitati ſolidi cujus ultima ratio ad cylindrum præfinitum (ſi modo orbium augeatur numerus & minuatur craſſitudo in infinitum, ſic ut actio gravitatis a ſuperficie infima ad ſupremam continua reddatur) fiet ratio æqualitatis. Suſtinet ergo ſuperficies infima pondus cylindri præfiniti. *Q. E. D.* Et ſimili argumentatione patet propoſitio, ubi gravitas decreſcit in ratione quavis aſſignata diſtantiæ a centro, ut & ubi fluidum ſurſum rarius eſt, deorſum denſius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur fundum non urgetur a toto fluidi incumbentis pondere, ſed eam ſolummodo ponderis partem ſuſtinet quæ in propoſitione deſcribitur; pondere reliquo a fluidi figura fornicata ſuſtentato.

Corol. 2. In æqualibus autem a centro diſtantiis eadem ſemper eſt preſſionis quantitas, ſive ſuperficies preſſa ſit horizonti parallela vel perpendicularis vel obliqua; ſive fluidum, a ſuperficie preſſa ſurſum continuatum, ſurgat perpendiculariter ſecundum lineam rectam, vel ſerpit oblique per tortas cavitates & canales, eaſque regulares vel maxime irregulares, amplas vel anguſtiſſimas. Hiſce circumſtantiis preſſionem nil mutari colligitur, applicando demonſtrationem theorematis hujus ad caſus ſingulos fluidorum.

Corol. 3. Eadem demonſtratione colligitur etiam (per prop. XIX.) quod fluidi gravis partes nullum, ex preſſione ponderis incumbentis, acquirunt motum inter ſe; ſi modo excludatur motus qui ex condenſatione oriatur.

Corol. 4. Et propterea ſi aliud ejuſdem gravitatis ſpecificæ corpus, quod ſit condenſationis expers, ſubmergatur in hoc fluido, id ex preſſione ponderis incumbentis nullum acquiret motum: non deſcendet, non aſcendet, non cogetur figuram ſuam mutare. Si ſphæricum eſt manebit ſphæricum, non obſtante preſſione; ſi quadratum eſt manebit quadratum: idque ſive molle ſit, ſive fluidiſſimum; ſive

ſive fluido libere innatet, ſive fundo incumbat. Habet enim fluidi pars quælibet interna rationem corporis ſubmerſi, & par eſt ratio omnium ejuſdem magnitudinis, figuræ & gravitatis ſpecificæ ſubmerſorum corporum. Si corpus ſubmerſum ſervato pondere liqueſceret & indueret formam fluidi; hoc, ſi prius aſcenderet vel deſcenderet vel ex preſſione figuram novam indueret, etiam nunc aſcenderet vel deſcenderet vel figuram novam induere cogeretur: id adeo quia gravitas ejus cæteræque motuum cauſæ permanent. Atqui (per caſ. 5. prop. XIX.) jam quieſceret & figuram retineret. Ergo & prius.

Corol. 5. Proinde corpus quod ſpecifice gravius eſt quam fluidum ſibi contiguum ſubſidebit, & quod ſpecifice levius eſt aſcendet, motumque & figuræ mutationem conſequetur, quantum exceſſus ille vel defectus gravitatis efficere poſſit. Namque exceſſus ille vel defectus rationem habet impulſus, quo corpus, alias in æquilibrio cum fluidi partibus conſtitutum, urgetur; & comparari poteſt cum exceſſu vel defectu ponderis in lance alterutra libræ.

Corol. 6. Corporum igitur in fluidis conſtitutorum duplex eſt gravitas: altera vera & abſoluta, altera apparens, vulgaris & comparativa. Gravitas abſoluta eſt vis tota qua corpus deorſum tendit: relativa & vulgaris eſt exceſſus gravitatis quo corpus magis tendit deorſum quam fluidum ambiens. Prioris generis gravitate partes fluidorum & corporum omnium gravitant in locis ſuis: ideoque conjunctis ponderibus componunt pondus totius. Nam totum omne grave eſt, ut in vaſis liquorum plenis experiri licet; & pondus totius æquale eſt ponderibus omnium partium, ideoque ex iiſdem componitur. Alterius generis gravitate corpora non gravitant in locis ſuis, id eſt, inter ſe collata non prægravant, ſed mutuos ad deſcendendum conatus impedientia permanent in locis ſuis, perinde ac ſi gravia non eſſent. Quæ in aëre ſunt & non prægravant, vulgus gravia non judicat. Quæ prægravant vulgus gravia judicat, quatenus ab aëris pondere non ſuſtinentur. Pondera vulgi nihil aliud ſunt quam exceſſus verorum ponderum ſupra pondus aëris. Unde & vulgo dicuntur levia, quæ ſunt minus gravia, aërique prægravanti cedendo ſuperiora petunt. Comparative levia ſunt, non vere, quia deſcendunt in vacuo. Sic & in aqua corpora, quæ ob majorem vel minorem gravitatem deſcendunt vel aſcendunt, ſunt comparative & appa-

apparenter gravia vel levia, & eorum gravitas vel levitas comparativa & apparens eſt exceſſus vel defectus quo vera eorum gravitas vel ſuperat gravitatem aquæ vel ab ea ſuperatur. Quæ vero nec prægravando deſcendunt, nec prægravanti cedendo aſcendunt, etiamſi veris ſuis ponderibus adaugeant pondus totius, comparative tamen & in ſenſu vulgi non gravitant in aqua. Nam ſimilis eſt horum caſuum demonſtratio.

Corol. 7. Quæ de gravitate demonſtrantur, obtinent in aliis quibuſcunque viribus centripetis.

Corol. 8. Proinde ſi medium, in quo corpus aliquod movetur, urgeatur vel a gravitate propria, vel ab alia quacunque vi centripeta, & corpus ab eadem vi urgeatur fortius; differentia virium eſt vis illa motrix, quam in præcedentibus propoſitionibus ut vim centripetam conſideravimus. Sin corpus a vi illa urgeatur levius, differentia virium pro vi centrifuga haberi debet.

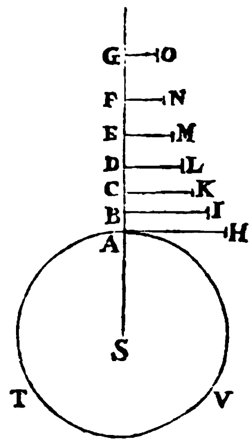
Corol. 9. Cum autem fluida premendo corpora incluſa non mutent eorum figuras externas, patet inſuper (per corollarium prop. XIX.) quod non mutabunt ſitum partium internarum inter ſe: proindeque, ſi animalia immergantur, & ſenſatio omnis a motu partium oriatur; nec lædent corpora immerſa, nec ſenſationem ullam excitabunt, niſi quatenus hæc corpora a compreſſione condenſari poſſunt. Et par eſt ratio cujuſcunque corporum ſyſtematis fluido comprimente circundati. Syſtematis partes omnes iiſdem agitabuntur motibus, ac ſi in vacuo conſtituerentur, ac ſolam retinerent gravitatem ſuam comparativam, niſi quatenus fluidum vel motibus earum nonnihil reſiſtat, vel ad eaſdem compreſſione conglutinandas requiratur.

PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVI.

Sit fluidi cujuſdam denſitas compreſſioni proportionalis, & partes ejus a vi centripeta diſtantiis ſuis a centro reciproce proportionali deorſum trahantur: dico quod, ſi diſtantiæ illæ ſumantur continue proportionales, denſitates fluidi in iiſdem diſtantiis erunt etiam continue proportionales.

Deſignet *ATV* fundum ſphæricum cui fluidum incumbit, *S* centrum, *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE*, *SF*, &c. diſtantias continue proportionales.

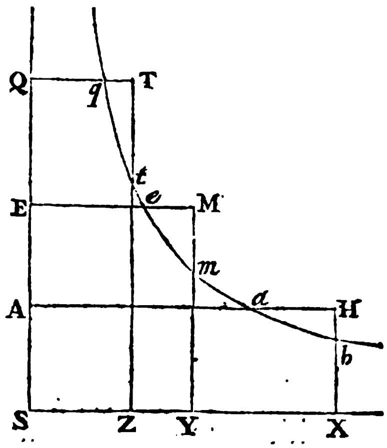
tionales. Erigantur perpendicula *AH, BI, CK, DL, EM, FN,* &c. quæ ſint ut denſitates medii in locis *A, B, C, D, E, F*; & ſpecificæ gravitates in iiſdem locis erunt ut $\frac{AH}{AS}$, $\frac{BI}{BS}$, $\frac{CK}{CS}$, &c. vel, quod perinde eſt, ut $\frac{AH}{AB}$, $\frac{BI}{BC}$, $\frac{CK}{CD}$, &c. Finge primum has gravitates uniformiter continuari ab *A* ad *B*, a *B* ad *C*, a *C* ad *D*, &c. factis per gradus decrementis in punctis *B, C, D*, &c. Et hæ gravitates ductæ in altitudines *AB, BC, CD*, &c. conficient preſſiones *AH, BI, CK*, &c. quibus fundum *ATV* (juxta theorema xv.) urgetur. Suſtinet ergo particula *A* preſſiones omnes *AH, BI, CK, DL*, pergendo in infinitum; & particula *B* preſſiones omnes præter primam *AH*; & particula *C* omnes præter duas primas *AH, BI*; & ſic deinceps: ideoque particulæ primæ *A* denſitas *AH* eſt ad particulæ ſecundæ *B* denſitatem *BI* ut ſumma omnium *AH+BI+CK+DL*, in infinitum, ad ſummam omnium *BI+CK+DL*, &c.



Et *BI* denſitas ſecundæ *B* eſt ad *CK* denſitatem tertiæ *C*, ut ſumma omnium *BI+CK+DL*, &c. ad ſummam omnium *CK+DL*, &c. Sunt igitur ſummæ illæ differentiis ſuis *AH, BI, CK*, &c. proportionales, atque ideo continue proportionales (per hujus lem. 1.) proindeque differentiæ *AH, BI, CK*, &c. ſummis proportionales, ſunt etiam continue proportionales. Quare cum denſitates in locis *A, B, C*, &c. ſint ut *AH, BI, CK*, &c. erunt etiam hæ continue proportionales. Pergatur per ſaltum, & ex æquo in diſtantiis *SA, SC, SE* continue proportionalibus, erunt denſitates *AH, CK, EM* continue proportionales. Et eodem argumento, in diſtantiis quibuſvis continue proportionalibus *SA, SD, SG*, denſitates *AH, DL, GO* erunt continue proportionales. Coeant jam puncta *A, B, C, D, E*, &c. eo ut progreſſio gravitatum ſpecificarum a fundo *A* ad ſummitatem fluidi continua reddatur, & in diſtantiis quibuſvis continue proportionalibus *SA, SD, SG*, denſitates *AH, DL, GO*, ſemper exiſtentes continue proportionales, manebunt etiamnum continue proportionales. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ſi detur denſitas fluidi in duobus locis, puta *A* & *E*, col-

E, colligi poteſt ejus denſitas in alio quovis loco *Q*. Centro *S*, aſymptotis rectangulis *SQ*, *SX* deſcribatur hyperbola ſecans perpendicula *AH*, *EM*, *QT* in *a*, *e*, *q*, ut & perpendicula *HX*, *MY*, *TZ*, ad aſymptoton *SX* demiſſa, in *b*, *m* & *t*. Fiat area *YmtZ* ad aream datam *YmbX* ut area data *EeqQ* ad aream datam *EeaA*; & linea *Zt* producta abſcindet lineam *QT* denſitati proportionalem. Namque ſi lineæ *SA*, *SE*, *SQ* ſunt continue proportionales, erunt areæ *EeqQ*, *EeaA* æquales, & inde areæ his proportionales *YmtZ*, *XbmY* etiam æquales, & lineæ *SX*, *SY*, *SZ*, id eſt, *AH*, *EM*, *QT* continue proportionales, ut oportet. Et ſi lineæ *SA*, *SE*, *SQ* obtinent alium quemvis ordinem in ſerie continue proportionalium, lineæ *AH*, *EM*, *QT*, ob proportionales areas hyperbolicas, obtinebunt eundem ordinem in alia ſerie quantitatum continue proportionalium.



PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVII.

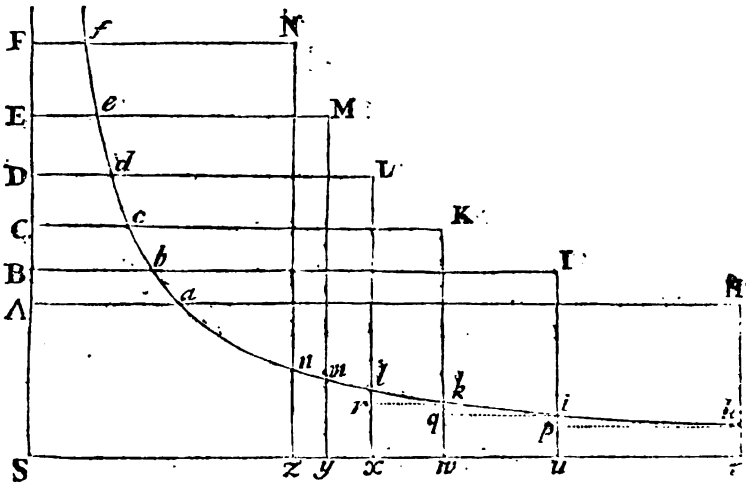
Sit fluidi cujuſdam denſitas compreſſioni proportionalis, & partes ejus a gravitate quadratis diſtantiarum ſuarum a centro reciproce proportionali deorſum trahantur: dico quod, ſi diſtantiæ ſumantur in progreſſione muſica, denſitates fluidi in his diſtantiis erunt in progreſſione geometrica.

Deſignet *S* centrum, & *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE* diſtantias in progreſſione geometrica. Erigantur perpendicula *AH*, *BI*, *CK*, &c. quæ ſint ut fluidi denſitates in locis *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, &c. & ipſius gravitates ſpecificæ in iiſdem locis erunt $\frac{AH}{SAq}$, $\frac{BI}{SBq}$, $\frac{CK}{SCq}$, &c. Finge has gravitates uniformiter continuari, primam ab *A* ad *B*, ſecundam a *B* ad *C*, tertiam a *C* ad *D*, &c. Et hæ ductæ in altitudines *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, &c. vel, quod perinde eſt, in diſtantias *SA*, *SB*, *SC*, &c. altitudinibus illis proportionales, conficient exponentes preſſio-

 num

DE MOTU CORPORUM

num $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. Quare cum denſitates ſint ut harum preſſionum ſummæ, differentiæ denſitatum $AH - BI$, $BI - CK$, &c. erunt ut ſummarum differentiæ $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. Centro S, aſymptotis SA, Sx deſcribatur hyperbola quævis, quæ ſecet perpendicula AH, BI, CK, &c. in a, b, c, &c. ut & perpendicula ad aſymptoton Sx demiſſa Ht, Iu, Kw in h, i, k; & denſitatum differentiæ tu, uw, &c. erunt ut $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, &c. Et rectangula $tu \times th$, $uw \times ui$, &c. ſeu tp, uq, &c. ut $\frac{AH \times th}{SA}$, $\frac{BI \times ui}{SB}$, &c. id eſt, ut Aa, Bb, &c. Eſt enim, ex natura hyperbolæ, SA ad AH vel St, ut th ad Aa, ideoque $\frac{AH \times th}{SA}$ æquale Aa. Et ſimili argumento eſt $\frac{BI \times ui}{SB}$



æquale Bb, &c. Sunt autem Aa, Bb, Cc, &c. continue proportionales, & propterea differentiis ſuis $Aa - Bb$, $Bb - Cc$, &c. proportionales; ideoque differentiis hiſce proportionalia ſunt rectangula tp, uq, &c. ut & ſummis differentiarum $Aa - Cc$ vel $Aa - Dd$ ſummæ rectangulorum $tp + uq$ vel $tp + uq + wr$. Sunto ejuſmodi termini quam plurimi, & ſumma omnium differentiarum, puta $Aa - Ff$, erit ſummæ omnium rectangulorum, puta $zthn$, proportionalis. Augeatur numerus terminorum & minuantur diſtantiæ punctorum A, B, C, &c.

&c. in infinitum, & rectangula illa evadent æqualia areæ hyperbolicæ *ztbn*, ideoque huic areæ proportionalis eſt differentia *Aa*—*Ff*.
Sumantur jam diſtantiæ quælibet, puta *SA*, *SD*, *SF* progreſſione muſica, & differentiæ *Aa*—*Dd*, *Dd*—*Ff* erunt æquales; & propterea differentiis hiſce proportionales areæ *thlx*, *xlnz* æquales erunt inter ſe, & denſitates *St*, *Sx*, *Sz*, id eſt, *AH*, *DL*, *FN*, continue proportionales. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ſi dentur fluidi denſitates duæ quævis, puta *AH* & *BI*, dabitur area *thiu*, harum differentiæ *tu* reſpondens; & inde invenietur denſitas *FN* in altitudine quacunque *SF*, ſumendo aream *tbnz* ad aream illam datam *thiu* ut eſt differentia *Aa*—*Ff* ad differentiam *Aa*—*Bb*.

Scholium.

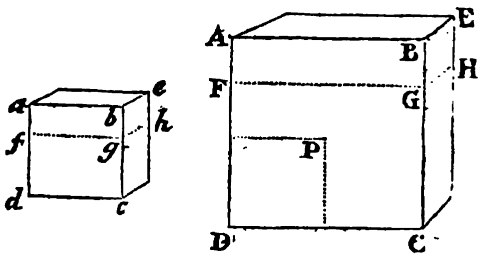
Simili argumentatione probari poteſt, quod ſi gravitas particularum fluidi diminuatur in triplicata ratione diſtantiarum a centro, & quadratorum diſtantiarum *SA*, *SB*, *SC*, &c. reciproca (nempe $\frac{SA\,cub.}{SAq}$, $\frac{SA\,cub.}{SBq}$, $\frac{SA\,cub.}{SCq}$) ſumantur in progreſſione arithmetica; denſitates *AH*, *BI*, *CK*, &c. erunt in progreſſione geometrica. Et ſi gravitas diminuatur in quadruplicata ratione diſtantiarum, & cuborum diſtantiarum reciproca (puta $\frac{SAqq}{SA\,cub.}$, $\frac{SAqq}{SB\,cub.}$, $\frac{SAqq}{SC\,cub.}$, &c.) ſumantur in progreſſione arithmetica; denſitates *AH*, *BI*, *CK*, &c. erunt in progreſſione geometrica. Et ſic in infinitum. Rurſus ſi gravitas particularum fluidi in omnibus diſtantiis eadem ſit, & diſtantiæ ſint in progreſſione arithmetica, denſitates erunt in progreſſione geometrica, uti Vir Cl. *Edmundus Halleius* invenit. Si gravitas ſit ut diſtantia, & quadrata diſtantiarum ſint in progreſſione arithmetica, denſitates erunt in progreſſione geometrica. Et ſic in infinitum. Hæc ita ſe habent ubi fluidi compreſſione condenſati denſitas eſt ut vis compreſſionis, vel, quod perinde eſt, ſpatium a fluido occupatum reciproce ut hæc vis. Fingi poſſunt aliæ condenſationis leges, ut quod cubus vis comprimentis ſit ut quadrato-quadratum denſitatis, ſeu triplicata ratio vis eadem cum quadruplicata ratione denſitatis. Quo in caſu, ſi gravitas eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ a centro, denſitas erit reciproce ut cubus diſtantiæ. Fingatur

gatur quod cubus vis comprimentis ſit ut quadrato-cubus denſitatis, & ſi gravitas eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ, denſitas erit reciproce in ſeſquiplicata ratione diſtantiæ. Fingatur quod vis comprimens ſit in duplicata ratione denſitatis, & gravitas reciproce in ratione duplicata diſtantiæ, & denſitas erit reciproce ut diſtantia. Caſus omnes percurrere longum eſſet. Cæterum per experimenta conſtat quod denſitas aëris ſit ut vis comprimens vel accurate vel ſaltem quam proxime: & propterea denſitas aëris in atmoſphæra terræ eſt ut pondus aëris totius incumbentis, id eſt, ut altitudo mercurii in barometro.

PROPOSITIO XXIII. THEOREMA XVIII.

Si fluidi ex particulis ſe mutuo fugientibus compoſiti denſitas ſit ut compreſſio, vires centrifugæ particularum ſunt reciproce proportionales diſtantiis centrorum ſuorum. Et vice verſa, particulæ viribus quæ ſunt reciproce proportionales diſtantiis centrorum ſuorum ſe mutuo fugientes componunt fluidum elaſticum, cujus denſitas eſt compreſſioni proportionalis.

Includi intelligatur fluidum in ſpatio cubico *ACE*, dein compreſſione redigi in ſpatium cubicum minus *ace*; & particularum, ſimilem ſitum inter ſe in utroque ſpatio obtinentium, diſtantiæ erunt ut cuborum latera *AB*, *ab*; & mediorum denſitates reciproce ut ſpatia continentia *AB cub.* & *ab cub.* In cubi majoris latere plano *ABCD* capiatur quadratum *DP* æquale lateri plano cubi minoris *db*; & ex hypotheſi, preſſio, qua quadratum *DP* urget fluidum incluſum, erit ad preſſionem, qua illud quadratum *db* urget fluidum incluſum, ut medii denſitates ad invicem, hoc eſt, ut *ab cub.* ad *AB cub.*



Sed preſſio, qua quadratum *DB* urget fluidum incluſum, eſt ad preſſionem, qua quadratum *DP* urget idem fluidum, ut quadratum *DB* ad quadratum *DP*, hoc eſt, ut *AB quad.* ad *ab quad.* Ergo, ex

ex æquo, preſſio qua quadratum *DB* urget fluidum, eſt ad preſſionem qua quadratum *db* urget fluidum, ut *ab* ad *AB*. Planis *FGH*, *fgh*, per media cuborum ductis, diſtinguatur fluidum in duas partes, & hæ ſe mutuo prement iiſdem viribus, quibus premuntur a planis *AC*, *ac*, hoc eſt, in proportione *ab* ad *AB*: ideoque vires centrifugæ, quibus hæ preſſiones ſuſtinentur, ſunt in eadem ratione. Ob eundem particularum numerum ſimilemque ſitum in utroque cubo, vires quas particulæ omnes ſecundum plana *FGH*, *fgh* exercent in omnes, ſunt ut vires quas ſingulæ exercent in ſingulas. Ergo vires, quas ſingulæ exercent in ſingulas ſecundum planum *FGH* in cubo majore, ſunt ad vires, quas ſingulæ exercent in ſingulas ſecundum planum *fgh* in cubo minore, ut *ab* ad *AB*, hoc eſt, reciproce ut diſtantiæ particularum ad invicem. *Q. E. D.*

Et vice verſa, ſi vires particularum ſingularum ſunt reciproce ut diſtantiæ, id eſt, reciproce ut cuborum latera *AB*, *ab*; ſummæ virium erunt in eadem ratione, & preſſiones laterum *DB*, *db* ut ſummæ virium; & preſſio quadrati *DP* ad preſſionem lateris *DB* ut *ab quad.* ad *AB quad.* Et, ex æquo, preſſio quadrati *DP* ad preſſionem lateris *db* ut *ab cub.* ad *AB cub.* id eſt, vis compreſſionis ad vim compreſſionis ut denſitas ad denſitatem. *Q. E. D.*

Scholium.

Simili argumento, ſi particularum vires centrifugæ ſint reciproce in duplicata ratione diſtantiarum inter centra, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-quadrata denſitatum. Si vires centrifugæ ſint reciproce in triplicata vel quadruplicata ratione diſtantiarum, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-cubi vel cubo-cubi denſitatum. Et univerſaliter, ſi D ponatur pro diſtantia, & E pro denſitate fluidi compreſſi, & vires centrifugæ ſint reciproce ut diſtantiæ dignitas quælibet D^n, cujus index eſt numerus *n*; vires comprimentes erunt ut latera cubica dignitatis E^{n+2}, cujus index eſt numerus $n+2$: & contra. Intelligenda vero ſunt hæc omnia de particularum viribus centrifugis quæ terminantur in particulis proximis, aut non longe ultra diffunduntur. Exemplum habemus in corporibus magneticis. Horum virtus attractiva terminatur fere in ſui generis corporibus ſibi proximis. Magnetis virtus per interpoſitam

laminam

DE MOTU CORPORUM laminam ferri contrahitur, & in lamina fere terminatur. Nam corpora ulteriora non tam a magnete quam a lamina trahuntur. Ad eundem modum ſi particulæ fugant alias ſui generis particulas ſibi proximas, in particulas autem remotiores virtutem nullam exerceant, ex hujuſmodi particulis componentur fluida de quibus actum eſt in hac propoſitione. Quod ſi particulæ cujuſque virtus in infinitum propagetur, opus erit vi majori ad æqualem condenſationem majoris quantitatis fluidi. An vero fluida elaſtica ex particulis ſe mutuo fugantibus conſtent, quæſtio phyſica eſt. Nos proprietatem fluidorum ex ejuſmodi particulis conſtantium mathematice demonſtravimus, ut philoſophis anſam præbeamus quæſtionem illam tractandi.

SECTIO VI.

De motu & reſiſtentia corporum funependulorum.

PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XIX.

Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oſcillationum a centro ſuſpenſionis æqualiter diſtant, ſunt in ratione compoſita ex ratione ponderum & ratione duplicata temporum oſcillationum in vacuo.

Nam velocitas, quam data vis in data materia, dato tempore generare poteſt, eſt ut vis & tempus directe, & materia inverſe. Quo major eſt vis vel majus tempus vel minor materia, eo major generabitur velocitas. Id quod per motus legem ſecundam manifeſtum eſt. Jam vero ſi pendula ejuſdem ſint longitudinis, vires motrices in locis a perpendiculo æqualiter diſtantibus ſunt ut pondera: ideoque ſi corpora duo oſcillando deſcribant arcus æquales, & arcus illi dividantur in partes æquales; cum tempora quibus corpora deſcribant ſingulas arcuum partes correſpondentes ſint ut tempora oſcillationum totarum, erunt velocitates ad invicem in correſpondentibus oſcillationum partibus, ut vires motrices & tota oſcillationum tempora directe & quantitates materiæ reciproce: ideoque quantitates materiæ ut vires & oſcillationum tempora directe & velocitates reciproce. Sed velocitates reciproce ſunt ut tempora, atque ideo

ideo tempora directe & velocitates reciproce ſunt ut quadrata temporum, & propterea quantitates materiæ ſunt ut vires motrices & quadrata temporum, id eſt, ut pondera & quadrata temporum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ideoque ſi tempora ſunt æqualia, quantitates materiæ in ſingulis corporibus erunt ut pondera.

Corol. 2. Si pondera ſunt æqualia, quantitates materiæ erunt ut quadrata temporum.

Corol. 3. Si quantitates materiæ æquantur, pondera erunt reciproce ut quadrata temporum.

Corol. 4. Unde cum quadrata temporum, cæteris paribus, ſint ut longitudines pendulorum; ſi & tempora & quantitates materiæ æqualia ſunt, pondera erunt ut longitudines pendulorum.

Corol. 5. Et univerſaliter, quantitas materiæ pendulæ eſt ut pondus & quadratum temporis directe, & longitudo penduli inverſe.

Corol. 6. Sed & in medio non reſiſtente quantitas materiæ pendulæ eſt ut pondus comparativum & quadratum temporis directe & longitudo penduli inverſe. Nam pondus comparativum eſt vis motrix corporis in medio quovis gravi, ut ſupra explicui; ideoque idem præſtat in tali medio non reſiſtente atque pondus abſolutum in vacuo.

Corol. 7. Et hinc liquet ratio tum comparandi corpora inter ſe, quoad quantitatem materiæ in ſingulis; tum comparandi pondera ejuſdem corporis in diverſis locis, ad cognoſcendam variationem gravitatis. Factis autem experimentis quam accuratiſſimis inveni ſemper quantitatem materiæ in corporibus ſingulis eorum ponderi proportionalem eſſe.

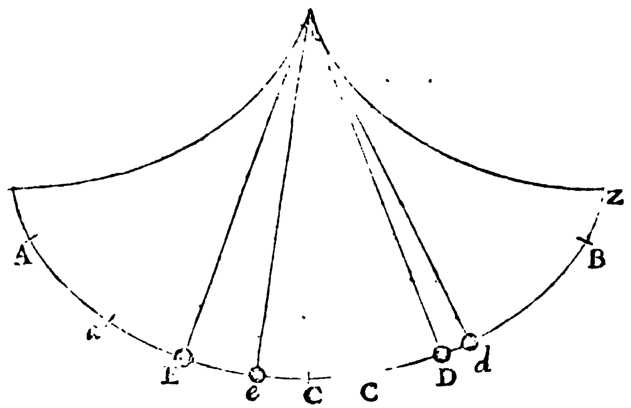
PROPOSITIO XXV. THEOREMA XX.

Corpora Funependula quibus, in medio quovis, reſiſtitur in ratione momentorum temporis, & corpora funependula quæ in ejuſdem gravitatis ſpecificæ medio non reſiſtente moventur, oſcillationes in cycloide eodem tempore peragunt, & arcuum partes proportionales ſimul deſcribunt.

Sit *AB* cycloidis arcus, quem corpus *D* tempore quovis in medio non reſiſtente oſcillando deſcribit. Biſecetur idem in *C*, ita ut *C* ſit

infimum

infimum ejus punctum; & erit vis acceleratrix qua corpus urgetur in loco quovis *D* vel *d* vel *E* ut longitudo arcus *CD* vel *Cd* vel *CE*. Exponatur vis illa per eundem arcum; & cum reſiſtentia ſit ut momentum temporis, ideoque detur, exponatur eadem per datam arcus cycloidis partem *CO*, & ſumatur arcus *Od* in ratione ad arcum *CD* quam habet arcus *OB* ad arcum *CB*: & vis qua corpus in *d* urgetur in medio reſiſtente, cum ſit exceſſus vis *Cd* ſupra reſiſtentiam *CO*, exponetur per arcum *Od*, ideoque erit ad vim, qua corpus *D* urgetur in medio non reſiſtente in loco *D*, ut arcus *Od* ad arcum *CD*; & propterea etiam in loco *B* ut arcus *OB* ad arcum *CB*. Proinde ſi corpora duo, *D*, *d* exeant de loco *B*, & his viribus urgeantur: cum vires ſub initio ſint ut arcus *CB* & *OB*, erunt velocitates primæ & arcus primo deſcripti in eadem ratione. Sunto arcus illi *BD* & *Bd*, & arcus reliqui *CD*, *Od* erunt in eadem ratione. Proinde vires, ipſis *CD*, *Od* proportionales manebunt



in eadem ratione ac ſub initio, & propterea corpora pergent arcus in eadem ratione ſimul deſcribere. Igitur vires & velocitates & arcus reliqui *CD*, *Od* ſemper erunt ut arcus toti *CB*, *OB*, & propterea arcus illi reliqui ſimul deſcribentur. Quare corpora duo *D*, *d* ſimul pervenient ad loca *C* & *O*, alterum quidem in medio non reſiſtente ad locum *C*, & alterum in medio reſiſtente ad locum *O*. Cum autem velocitates in *C* & *O* ſint ut arcus *CB*, *OB*; erunt arcus, quos corpora ulterius pergendo ſimul deſcribunt, in eadem ratione. Sunto illi *CE* & *Oe*. Vis qua corpus *D* in medio non reſiſtente retardatur in *E* eſt ut *CE*, & vis qua corpus *d* in medio reſiſtente

ſiſtente

ſiſtente retardatur in *e* eſt ut ſumma vis *Ce* & reſiſtentiæ *CO*, id eſt ut *Oe*; ideoque vires, quibus corpora retardantur, ſunt ut arcubus *CE*, *Oe* proportionales arcus *CB*, *OB*; proindeque velocitates, in data illa ratione retardatæ, manent in eadem illa data ratione. Velocitates igitur & arcus iiſdem deſcripti ſemper ſunt ad invicem in data illa ratione arcuum *CB* & *OB*; & propterea ſi ſumantur arcus toti *AB*, *aB* in eadem ratione, corpora *D*, *d* ſimul deſcribent hos arcus, & in locis *A* & *a* motum omnem ſimul amittent. Iſochronæ ſunt igitur oſcillationes totæ, & arcubus totis *BA*, *Ba* proportionales ſunt arcuum partes quælibet *BD*, *Bd* vel *BE*, *Be* quæ ſimul deſcribuntur. *Q. E. D.*

Corol. Igitur motus velociſſimus in medio reſiſtente non incidit in punctum infimum *C*, ſed reperitur in puncto illo *O*, quo arcus totus deſcriptus *aB* biſecatur. Et corpus ſubinde pergendo ad *a*, iiſdem gradibus retardatur quibus antea accelerabatur in deſcenſu ſuo a *B* ad *O*.

PROPOSITIO XXVI. THEOREMA XXI.

Corporum funependulorum, quibus reſiſtitur in ratione velocitatum, oſcillationes in cycloide ſunt Iſochronæ.

Nam ſi corpora duo, a centris ſuſpenſionum æqualiter diſtantia, oſcillando deſcribant arcus inæquales, & velocitates in arcuum partibus correſpondentibus ſint ad invicem ut arcus toti; reſiſtentiæ velocitatibus proportionales, erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde ſi viribus motricibus a gravitate oriundis, quæ ſint ut iidem arcus, auferantur vel addantur hæ reſiſtentiæ, erunt differentiæ vel ſummæ ad invicem in eadem arcuum ratione: cumque velocitatum incrementa vel decrementa ſint ut hæ differentiæ vel ſummæ, velocitates ſemper erunt ut arcus toti: Igitur velocitates, ſi ſint in aliquo caſu ut arcus toti, manebunt ſemper in eadem ratione. Sed in principio motus, ubi corpora incipiunt deſcendere & arcus illos deſcribere, vires, cum ſint arcubus proportionales, generabunt velocitates arcubus proportionales. Ergo velocitates ſemper erunt ut arcus toti deſcribendi, & propterea arcus illi ſimul deſcribentur. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXVII. THEOREMA XXII.

Si corporibus ſunependulis reſiſtitur in duplicata ratione velocitatum, differentiæ inter tempora oſcillationum in medio reſiſtente ac tempora oſcillationum in ejuſdem gravitatis ſpecificæ medio non reſiſtente, erunt arcubus oſcillando deſcriptis proportionales quam proxime.

Nam pendulis æqualibus in medio reſiſtente deſcribantur arcus inæquales A, B; & reſiſtentia corporis in arcu A, erit ad reſiſtentiam corporis in parte correſpondente arcus B, in duplicata ratione velocitatum, id eſt, ut AA ad BB, quam proxime. Si reſiſtentia in arcu B eſſet ad reſiſtentiam in arcu A ut AB ad AA; tempora in arcubus A & B forent æqualia, per propoſitionem ſuperiorem. Ideoque reſiſtentia AA in arcu A, vel AB in arcu B, efficit exceſſum temporis in arcu A ſupra tempus in medio non reſiſtente; & reſiſtentia BB efficit exceſſum temporis in arcu B ſupra tempus in medio non reſiſtente. Sunt autem exceſſus illi ut vires efficientes AB & BB quam proxime, id eſt, ut arcus A & B. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ex oſcillationum temporibus, in medio reſiſtente, in arcubus inæqualibus factarum, cognoſci poſſunt tempora oſcillationum in ejuſdem gravitatis ſpecificæ medio non reſiſtente. Nam differentia temporum erit ad exceſſum temporis in arcu minore ſupra tempus in medio non reſiſtente, ut differentia arcuum ad arcum minorem.

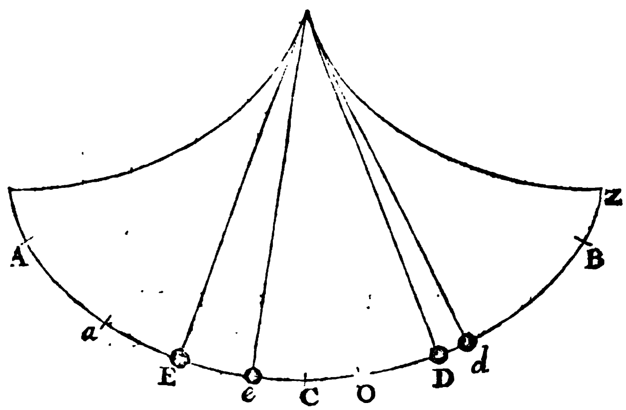
Corol. 2. Oſcillationes breviores ſunt magis iſochronæ, & breviſſimæ iiſdem temporibus peraguntur ac in medio non reſiſtente, quam proxime. Earum vero quæ in majoribus arcubus fiunt, tempora ſunt paulo majora, propterea quod reſiſtentia in deſcenſu corporis qua tempus producitur, major ſit pro ratione longitudinis in deſcenſu deſcriptæ, quam reſiſtentia in aſcenſu ſubſequente qua tempus contrahitur. Sed & tempus oſcillationum tam brevium quam longarum nonnihil produci videtur per motum medii. Nam corporibus tardeſcentibus paulo minus reſiſtitur, pro ratione velocitatis, & corporibus acceleratis paulo magis quam iis quæ uniformiter progrediuntur: idque quia medium, eo quem a corporibus

accepit motu, in eandem plagam pergendo, in priore caſu magis agitatur, in poſteriore minus; ac proinde magis vel minus cum corporibus motis conſpirat. Pendulis igitur in deſcenſu magis reſiſtit, in aſcenſu minus quam pro ratione velocitatis, & ex utraque cauſa tempus producitur.

PROPOSITIO XXVIII. THEOREMA XXIII.

Si corpori funependulo in cycloide oſcillanti reſiſtitur in ratione momentorum temporis, erit ejus reſiſtentia ad vim gravitatis ut exceſſus arcus deſcenſu toto deſcripti ſupra arcum aſcenſu ſubſequente deſcriptum, ad penduli longitudinem duplicatam.

Deſignet *BC* arcum deſcenſu deſcriptum, *Ca* arcum aſcenſu deſcriptum, & *Aa* differentiam arcuum: & ſtantibus quæ in propoſitione xxv. conſtructa & demonſtrata ſunt, erit vis, qua corpus oſcillans urgetur in loco quovis *D*, ad vim reſiſtentiæ ut arcus *CD* ad arcum *CO*, qui ſemiſſis eſt differentiæ illius *Aa*. Ideoque vis,

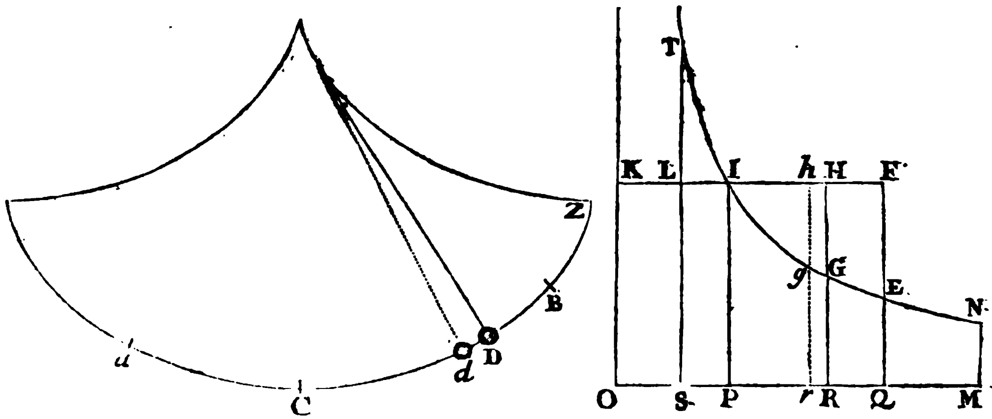


qua corpus oſcillans urgetur in cycloidis principio ſeu puncto altiſſimo, id eſt, vis gravitatis, erit ad reſiſtentiam ut arcus cycloidis inter punctum illud ſupremum & punctum infimum *C* ad arcum *CO*; id eſt (ſi arcus duplicentur) ut cycloidis totius arcus, ſeu dupla penduli longitudo, ad arcum *Aa*. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA VI.

Poſito quod corpori in cycloide oſcillanti reſiſtitur in duplicata ratione velocitatis: invenire reſiſtentiam in locis ſingulis.

Sit *Ba* arcus oſcillatione integra deſcriptus, ſitque *C* infimum cycloidis punctum, & *CZ* ſemiſſis arcus cycloidis totius, longitudini penduli æqualis; & quæratur reſiſtentia corporis in loco quovis *D*. Secetur recta infinita *OQ* in punctis *O*, *S*, *P*, *Q*, ea lege, ut (ſi erigantur perpendicula *OK*, *ST*, *PI*, *QE*, centroque *O* & aſymptotis *OK*, *OQ* deſcribatur hyperbola *TIGE* ſecans perpendicula *ST*, *PI*, *QE* in *T*, *I* & *E*, & per punctum *I* agatur *KF* parallela aſymptoto *OQ* occurrens aſymptoto *OK* in *K*, & perpendiculis *ST* & *QE* in *L* & *F*) fuerit area hyperbolica *PIEQ* ad aream hyperbolicam *PITS* ut arcus *BC* deſcenſu corporis deſcriptus ad arcum



Ca aſcenſu deſcriptum, & area *IEF* ad aream *ILT* ut *OQ* ad *OS*. Dein perpendiculo *MN* abſcindatur area hyperbolica *PINM* quæ ſit ad aream hyperbolicam *PIEQ* ut arcus *CZ* ad arcum *BC* deſcenſu deſcriptum. Et ſi perpendiculo *RG* abſcindatur area hyperbolica *PIGR*, quæ ſit ad aream *PIEQ* ut arcus quilibet *CD* ad arcum *BC* deſcenſu toto deſcriptum; erit reſiſtentia in loco *D* ad vim gravitatis, ut area $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ ad aream *PINM*.

Nam cum vires a gravitate oriundæ quibus corpus in locis *Z*, *B*, *D*, *a* urgetur, ſint ut arcus *CZ*, *CB*, *CD*, *Ca*, & arcus illi ſint ut areæ

PINM,

PINM, *PIEQ*, *PIGR*, *PITS*; exponantur tum arcus tum vires per has areas reſpective. Sit inſuper *Dd* ſpatium quam minimum a corpore deſcendente deſcriptum, & exponatur idem per aream quam minimam *RGgr* parallelis *RG*, *rg* comprehenſam; & producatur *rg* ad *h*, ut ſint *GHhg*, & *RGgr* contemporanea arearum *IGH*, *PIGR* decrementa. Et areæ $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ incrementum $GHhg - \frac{Rr}{OQ} IEF$, ſeu $Rr \times HG - \frac{Rr}{OQ} IEF$, erit ad areæ *PIGR* decrementum *RGgr*, ſeu $Rr \times RG$, ut $HG - \frac{IEF}{OQ}$ ad *RG*; ideoque ut $OR \times HG - \frac{OR}{OQ} IEF$ ad $OR \times GR$ ſeu $OP \times PI$, hoc eſt (ob æqualia $OR \times HG$, $OR \times HR - OR \times GR$, $ORHK - OPIK$, *PIHR* & $PIGR + IGH$) ut $PIGR + IGH - \frac{OR}{OQ} IEF$ ad *OPIK*. Igitur ſi area $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ dicatur Y, atque areæ *PIGR* decrementum *RGgr* detur, erit incrementum areæ Y ut *PIGR* — Y.

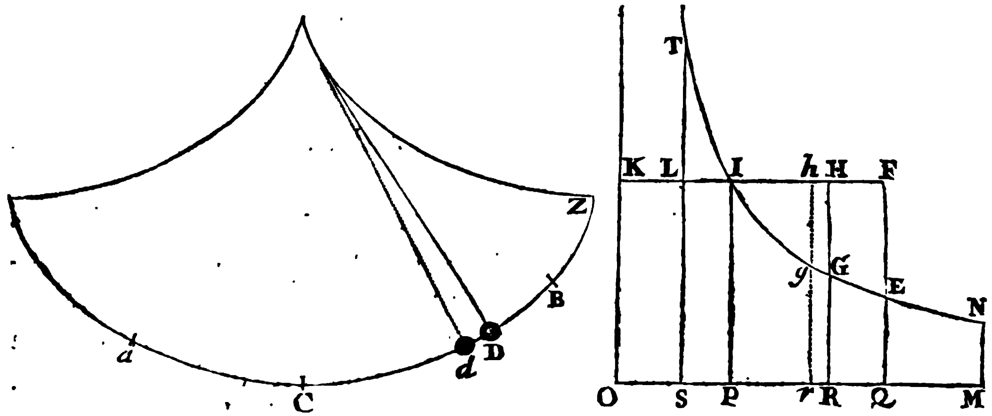
Quod ſi V deſignet vim a gravitate oriundam, arcui deſcribendo *CD* proportionalem, qua corpus urgetur in *D*, & R pro reſiſtentia ponatur; erit V — R vis tota qua corpus urgetur in *D*. Eſt itaque incrementum velocitatis ut V — R & particula illa temporis in qua factum eſt conjunctim: Sed & velocitas ipſa eſt ut incrementum contemporaneum ſpatii deſcripti directe & particula eadem temporis inverſe. Unde, cum reſiſtentia per hypotheſin ſit ut quadratum velocitatis, incrementum reſiſtentiæ (per lem. II.) erit ut velocitas & incrementum velocitatis conjunctim, id eſt, ut momentum ſpatii & V — R conjunctim; atque ideo, ſi momentum ſpatii detur, ut V — R; id eſt, ſi pro vi V ſcribatur ejus exponens *PIGR*, & reſiſtentia R exponatur per aliam aliquam aream Z, ut *PIGR* — Z.

Igitur area *PIGR* per datorum momentorum ſubductionem uniformiter decreſcente, creſcunt area Y in ratione *PIGR* — Y, & area Z in ratione *PIGR* — Z. Et propterea ſi areæ Y & Z ſimul incipiant & ſub initio æquales ſint, hæ per additionem æqualium momentorum pergent eſſe æquales, & æqualibus itidem momentis

ſubinde

ſubinde decreſcentes ſimul evaneſcent. Et viciſſim, ſi ſimul incipiunt & ſimul evaneſcunt, æqualia habebunt momenta & ſemper erunt æquales: id adeo quia ſi reſiſtentia Z augeatur, velocitas una cum arcu illo *Ca*, qui in aſcenſu corporis deſcribitur, diminuetur; & puncto in quo motus omnis una cum reſiſtentia ceſſat propius accedente ad punctum *C*, reſiſtentia citius evaneſcet quam area Y. Et contrarium eveniet ubi reſiſtentia diminuitur.

Jam vero area Z incipit deſinitque ubi reſiſtentia nulla eſt, hoc eſt, in principio motus ubi arcus *CD* arcui *CB* æquatur & recta *RG* incidit in rectam *QE*, & in fine motus ubi arcus *CD* arcui *CA* æquatur & *RG* incidit in rectam *ST*. Et area Y ſeu $\frac{OR}{OQ}$ *IEF* — *IGH* incipit deſinitque ubi nulla eſt, ideoque ubi $\frac{OR}{OQ}$



IEF & *IGH* æqualia ſunt: hoc eſt (per conſtructionem) ubi recta *RG* incidit ſucceſſive in rectas *QE* & *ST*. Proindeque areæ illæ ſimul incipiunt & ſimul evaneſcunt, & propterea ſemper ſunt æquales. Igitur area $\frac{OR}{OQ}$ *IEF* — *IGH* æqualis eſt areæ Z, per quam reſiſtentia exponitur, & propterea eſt ad aream *PINM* per quam gravitas exponitur, ut reſiſtentia ad gravitatem. *Q. E. D.*

Corol. 1. Eſt igitur reſiſtentia in loco infimo *C* ad vim gravitatis, ut area $\frac{OP}{OQ}$ *IEF* ad aream *PINM*.

Corol. 2. Fit autem maxima, ubi area *PIHR* eſt ad aream *IEF* ut *OR* ad *OQ*. Eo enim in caſu momentum ejus (nimirum *PIGR* —Y evadit nullum.

Corol.

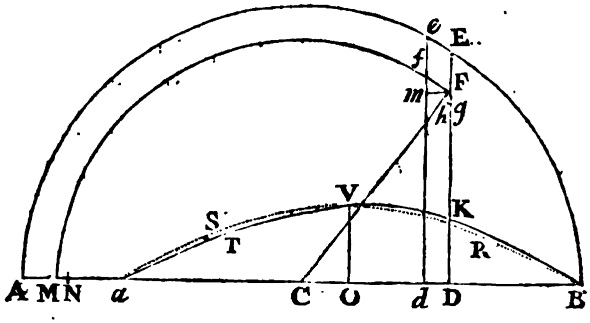
Corol. 3. Hinc etiam innoteſcit velocitas in locis ſingulis: quippe quæ eſt in ſubduplicata ratione reſiſtentiæ, & ipſo motus initio æquatur velocitati corporis in eadem cycloide ſine omni reſiſtentia oſcillantis.

Cæterum ob difficilem calculum quo reſiſtentia & velocitas per hanc propoſitionem inveniendæ ſunt, viſum eſt propoſitionem ſequentem ſubjungere.

PROPOSITIO XXX. THEOREMA XXIV.

Si recta aB *æqualis ſit cycloidis arcui quem corpus oſcillando deſcribit, & ad ſingula ejus puncta* D *erigantur perpendicula* DK, *quæ ſint ad longitudinem penduli ut reſiſtentia corporis in arcus punctis correſpondentibus ad vim gravitatis: dico quod differentia inter arcum deſcenſu toto deſcriptum & arcum aſcenſu toto ſubſequente deſcriptum ducta in arcuum eorundem ſemiſummam, æqualis erit areæ* BKa *a perpendiculis omnibus* DK *occupatæ.*

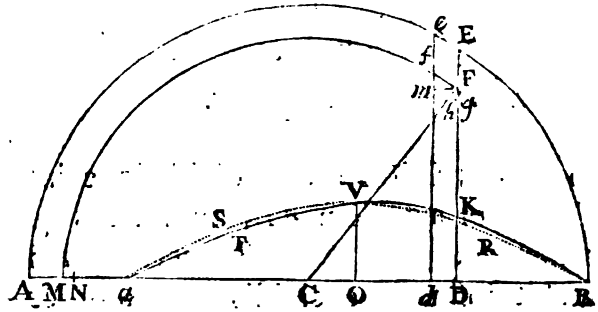
Exponatur enim tum cycloidis arcus, oſcillatione integra deſcriptus, per rectam illam ſibi æqualem *aB*, tum arcus qui deſcriberetur in vacuo per longitudinem *AB*. Biſecetur *AB* in *C*, & punctum *C* repræſentabit infimum cycloidis punctum, & erit *CD* ut



vis a gravitate oriunda, qua corpus in *D* ſecundum tangentem cycloidis urgetur, eamque habebit rationem ad longitudinem penduli quam habet vis in *D* ad vim gravitatis. Exponatur igitur vis

illa

illa per longitudinem *CD*, & vis gravitatis per longitudinem penduli, & ſi in *DE* capiatur *DK* in ea ratione ad longitudinem penduli quam habet reſiſtentia ad gravitatem, erit *DK* exponens reſiſtentiæ. Centro *C* & intervallo *CA* vel *CB* conſtruatur ſemicirculus *BEeA*. Deſcribat autem corpus tempore quam minimo ſpatium *Dd*, & erectis perpendiculis *DE*, *de* circumferentiæ occurrentibus in *E* & *e*, erunt hæc ut velocitates quas corpus in vacuo, deſcendendo a puncto *B*, acquireret in locis *D* & *d*. Patet hoc (per prop. LII. lib. I.) Exponantur itaque hæ velocitates per perpendicula illa *DE*, *de*; ſitque *DF* velocitas quam acquirit in *D* cadendo de *B* in medio reſiſtente. Et ſi centro *C* & intervallo *CF* deſcribatur circulus *FfM* occurrens rectis *de* & *AB* in *f* & *M*, erit *M* locus ad quem deinceps ſine ulteriore reſiſtentia aſcenderet, & *df* velocitas quam acquireret in *d*. Unde etiam ſi *Fg* deſignet velocitatis momentum quod corpus *D*, deſcribendo ſpa-



tium quam minimum *Dd*, ex reſiſtentia medii amittit; & ſumatur *CN* æqualis *Cg*: erit *N* locus ad quem corpus deinceps ſine ulteriore reſiſtentia aſcenderet, & *MN* erit decrementum aſcenſus ex velocitatis illius amiſſione oriundum. Ad *df* demittatur perpendiculum *Fm*, & velocitatis *DF* decrementum *Fg* a reſiſtentia *DK* genitum, erit ad velocitatis ejuſdem incrementum *fm* a vi *CD* genitum, ut vis generans *DK* ad vim generantem *CD*. Sed & ob ſimilia triangula *Fmf*, *Fhg*, *FDC*, eſt *fm* ad *Fm* ſeu *Dd* ut *CD* ad *DF*; & ex æquo *Fg* ad *Dd* ut *DK* ad *DF*. Item *Fh* ad *Fg* ut *DF* ad *CF*; & ex æquo perturbate, *Fh* ſeu *MN* ad *Dd* ut *DK* ad *CF* ſeu *CM*; ideoque ſumma omnium $MN \times CM$ æqualis erit ſummæ omnium $Dd \times DK$. Ad punctum mobile *M* erigi ſemper intelligatur ordinata rectangula æqualis indeterminatæ *CM*, quæ motu

motu continuo ducatur in totam longitudinem *Aa*; & trapezium ex illo motu deſcriptum ſive huic æquale rectangulum $Aa \times \frac{1}{2} aB$ æquabitur ſummæ omnium $MN \times CM$, ideoque ſummæ omnium $Dd \times DK$, id eſt, areæ *BKVTa*. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ex lege reſiſtentiæ & arcuum *Ca*, *CB* differentia *Aa* colligi poteſt proportio reſiſtentiæ ad gravitatem quam proxime.

Nam ſi uniformis ſit reſiſtentia *DK*, figura *BKTa* rectangulum erit ſub *Ba* & *DK*; & inde rectangulum ſub $\frac{1}{2}Ba$ & *Aa* erit æquale rectangulo ſub *Ba* & *DK*, & *DK* æqualis erit $\frac{1}{2}Aa$. Quare cum *DK* ſit exponens reſiſtentiæ, & longitudo penduli exponens gravitatis, erit reſiſtentia ad gravitatem ut $\frac{1}{2}Aa$ ad longitudinem penduli; omnino ut in prop. XXVIII. demonſtratum eſt.

Si reſiſtentia ſit ut velocitas, figura *BKTa* ellipſis erit quam proxime. Nam ſi corpus, in medio non reſiſtente, oſcillatione integra deſcriberet longitudinem *BA*, velocitas in loco quovis *D* foret ut circuli diametro *AB* deſcripti ordinatim applicata *DE*. Proinde cum *Ba* in medio reſiſtente, & *BA* in medio non reſiſtente, æqualibus circiter temporibus deſcribantur; ideoque velocitates in ſingulis ipſius *Ba* punctis, ſint quam proxime ad velocitates in punctis correſpondentibus longitudinis *BA*, ut eſt *Ba* ad *BA*; erit velocitas in puncto *D* in medio reſiſtente ut circuli vel ellipſeos ſuper diametro *Ba* deſcripti ordinatim applicata; ideoque figura *BKVTa* ellipſis erit quam proxime. Cum reſiſtentia velocitati proportionalis ſupponatur, ſit *OV* exponens reſiſtentiæ in puncto medio *O*; & ellipſis *BRVSa*, centro *O*, ſemiaxibus *OB*, *OV* deſcripta, figuram *BKVTa*, eique æquale rectangulum $Aa \times BO$, æquabit quamproxime. Eſt igitur $Aa \times BO$ ad $OV \times BO$ ut area ellipſeos hujus ad $OV \times BO$: id eſt, *Aa* ad *OV* ut area ſemicirculi ad quadratum radii, ſive ut 11 ad 7 circiter: Et propterea $\frac{7}{11} Aa$ ad longitudinem penduli ut corporis oſcillantis reſiſtentia in *O* ad ejuſdem gravitatem.

Quod ſi reſiſtentia *DK* ſit in duplicata ratione velocitatis, figura *BKVTa* fere parabola erit verticem habens *V* & axem *OV*, ideoque æqualis erit rectangulo ſub $\frac{2}{3}$ *Ba* & *OV* quam proxime. Eſt igitur rectangulum ſub $\frac{1}{2}Ba$ & *Aa* æquale rectangulo ſub $\frac{2}{3}Ba$ & *OV*, ideoque *OV* æqualis $\frac{3}{4}Aa$: & propterea corporis oſcillantis reſiſtentia in *O* ad ipſius gravitatem ut $\frac{3}{4}Aa$ ad longitudinem penduli.

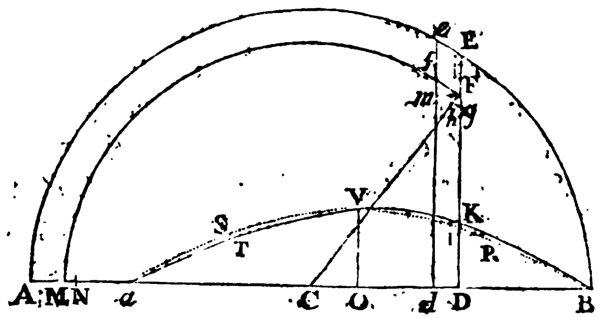
DE MOTU CORPORUM

Atque has concluſiones in rebus practicis abunde ſatis accuratas eſſe cenſeo. Nam cum ellipſis vel parabola *BRVSa* congruat cum figura *BKVTa* in puncto medio *V*, hæc ſi ad partem alterutram *BRV* vel *VSa* excedit figuram illam, deficiet ab eadem ad partem alteram, & ſic eidem æquabitur quam proxime.

PROPOSITIO XXXI. THEOREMA XXV.

Si corporis oſcillantis reſiſtentia in ſingulis arcuum deſcriptorum partibus proportionalibus augeatur vel minuatur in data ratione; differentia inter arcum deſcenſu deſcriptum & arcum ſubſequente aſcenſu deſcriptum, augebitur vel diminuetur in eadem ratione.

Oritur enim differentia illa ex retardatione penduli per reſiſtentiam medii, ideoque eſt ut retardatio tota eique proportionalis reſiſtentia retardans. In ſuperiore propoſitione rectangulum ſub recta $\frac{1}{2}aB$ & arcuum illorum *CB*, *Ca* differentia *Aa* æqualis erat areæ



BKTa. Et area illa, ſi maneat longitudo *aB*, augetur vel diminuitur in ratione ordinatim applicatarum *DK*; hoc eſt, in ratione reſiſtentiæ, ideoque eſt ut longitudo *aB* & reſiſtentia conjunctim. Proindeque rectangulum ſub *Aa* & $\frac{1}{2}aB$ eſt ut *aB* & reſiſtentia conjunctim, & propterea *Aa* ut reſiſtentia. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde ſi reſiſtentia ſit ut velocitas, differentia arcuum in eodem medio erit ut arcus totus deſcriptus: & contra.

Corol. 2. Si reſiſtentia ſit in duplicata ratione velocitatis, differentia illa erit in duplicata ratione arcus totius: & contra.

Corol.

Corol. 3. Et univerſaliter, ſi reſiſtentia ſit in triplicata vel alia quavis ratione velocitatis, differentia erit in eadem ratione arcus totius: & contra.

Corol. 4. Et ſi reſiſtentia ſit partim in ratione ſimplici velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicata, differentia erit partim in ratione arcus totius & partim in ejus ratione duplicata: & contra. Eadem erit lex & ratio reſiſtentiæ pro velocitate, quæ eſt differentiæ illius pro longitudine arcus.

Corol. 5. Ideoque ſi, pendulo inæquales arcus ſucceſſive deſcribente, inveniri poteſt ratio incrementi ac decrementi differentiæ hujus pro longitudine arcus deſcripti; habebitur etiam ratio incrementi ac decrementi reſiſtentiæ pro velocitate majore vel minore.

Scholium Generale.

Ex his propoſitionibus, per oſcillationes pendulorum in mediis quibuſcunque, invenire licet reſiſtentiam mediorum. Aeris vero reſiſtentiam inveſtigavi per experimenta ſequentia. Globum ligneum pondere unciarum *Romanarum* $57\frac{7}{22}$, diametro digitorum *Londinenſium* $6\frac{7}{8}$ fabricatum, filo tenui ab unco ſatis firmo ſuſpendi, ita ut inter uncum & centrum oſcillationis globi diſtantia eſſet pedum $10\frac{1}{2}$. In filo punctum notavi pedibus decem & uncia una a centro ſuſpenſionis diſtans; & e regione puncti illius collocavi regulam in digitos diſtinctam, quorum ope notarem longitudines arcuum a pendulo deſcriptas. Deinde numeravi oſcillationes quibus globus octavam motus ſui partem amitteret. Si pendulum deducebatur a perpendiculo ad diſtantiam duorum digitorum, & inde demittebatur; ita ut toto ſuo deſcenſu deſcriberet arcum duorum digitorum, totaque oſcillatione prima, ex deſcenſu & aſcenſu ſubſequente compoſita, arcum digitorum fere quatuor: idem oſcillationibus 164 amiſit octavam motus ſui partem, ſic ut ultimo ſuo aſcenſu deſcriberet arcum digiti unius cum tribus partibus quartis digiti. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum quatuor; amiſit octavam motus partem oſcillationibus 121, ita ut aſcenſu ultimo deſcriberet arcum digitorum $3\frac{1}{2}$. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum octo, ſexdecim, triginta duorum vel ſexaginta quatuor; amiſit octavam motus partem oſcillationibus 69, $35\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$, reſpective. Igitur differentia inter arcus deſcenſu primo & aſcenſu ultimo

mo deſcriptos, erat in caſu primo, ſecundo, tertio, quarto, quinto, ſexto, digitorum $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 reſpective. Dividantur eæ differentiæ per numerum oſcillationum in caſu unoquoque, & in oſcillatione una mediocri, qua arcus digitorum $3\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60, 120 deſcriptus fuit, differentia arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum, erit $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{69}$, $\frac{4}{71}$, $\frac{8}{37}$, $\frac{24}{29}$ partes digiti reſpective. Hæ autem in majoribus oſcillationibus ſunt in duplicata ratione arcuum deſcriptorum quam proxime, in minoribus vero paulo majores quam in ea ratione; & propterea (per corol. 2. prop. XXXI. libri hujus) reſiſtentia globi, ubi celerius movetur, eſt in duplicata ratione velocitatis quam proxime; ubi tardius, paulo major quam in ea ratione.

Deſignet jam V velocitatem maximam in oſcillatione quavis, ſintque A, B, C quantitates datæ, & fingamus quod differentia arcuum ſit $AV + BV^{\frac{3}{2}} + CV^2$. Cum velocitates maximæ ſint in cycloide ut ſemiſſes arcuum oſcillando deſcriptorum, in circulo vero ut ſemiſſium arcuum illorum chordæ; ideoque paribus arcubus majores ſint in cycloide quam in circulo, in ratione ſemiſſium arcuum ad eorundem chordas; tempora autem in circulo ſint majora quam in cycloide in velocitatis ratione reciproca; patet arcuum differentias (quæ ſunt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim) eaſdem fore, quamproxime, in utraque curva: deberent enim differentiæ illæ in cycloide augeri, una cum reſiſtentia, in duplicata circiter ratione arcus ad chordam, ob velocitatem in ratione illa ſimplici auctam; & diminui, una cum quadrato temporis, in eadem duplicata ratione. Itaque ut reductio fiat ad cycloidem, eædem ſumendæ ſunt arcuum differentiæ quæ fuerunt in circulo obſervatæ, velocitates vero maximæ ponendæ ſunt arcubus vel dimidiatis vel integris, hoc eſt, numeris $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16 analogæ. Scribamus ergo in caſu ſecundo, quarto & ſexto numeros 1, 4 & 16 pro V; & prodibit arcuum differentia $\frac{\frac{1}{2}}{121} = A + B + C$ in caſu ſecundo; $\frac{2}{35\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$ in caſu quarto; & $\frac{8}{9\frac{2}{3}} = 16A + 64B + 256C$ in caſu ſexto. Et ex his æquationibus, per debitam collationem & reductionem analyticam, fit $A = 0{,}0000916$, $B = 0{,}0010847$, & $C = 0{,}0029558$. Eſt igitur differentia arcuum ut $0{,}0000916\,V + 0{,}0010847\,V^{\frac{3}{2}} + 0{,}0029558\,V^2$: & prop-

& propterea cum (per corollarium propoſitionis xxx. applicatum ad hunc caſum) reſiſtentia globi in medio arcus oſcillando deſcripti, ubi velocitas eſt V, ſit ad ipſius pondus ut $\frac{7}{11}AV + \frac{7}{10}BV^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}CV^2$ ad longitudinem penduli; ſi pro A, B & C ſcribantur numeri inventi, fiet reſiſtentia globi ad ejus pondus, ut $0{,}0000583\,V + 0{,}0007593\,V^{\frac{3}{2}} + 0{,}0022169\,V^2$ ad longitudinem penduli inter centrum ſuſpenſionis & regulam, id eſt, ad 121 digitos. Unde cum V in caſu ſecundo deſignet 1, in quarto 4, in ſexto 16: erit reſiſtentia ad pondus globi in caſu ſecundo ut 0,0030345 ad 121, in quarto ut 0,041748 ad 121, in ſexto ut 0,61705 ad 121.

Arcus quem punctum in filo notatum in caſu ſexto deſcripſit, erat $120 - \frac{8}{9\frac{2}{3}}$ ſeu $119\frac{5}{29}$ digitorum. Et propterea cum radius eſſet 121 digitorum, & longitudo penduli inter punctum ſuſpenſionis & centrum globi eſſet 126 digitorum, arcus quem centrum globi deſcripſit erat $124\frac{3}{31}$ digitorum. Quoniam corporis oſcillantis velocitas maxima, ob reſiſtentiam aeris, non incidit in punctum infimum arcus deſcripti, ſed in medio fere loco arcus totius verſatur: hæc eadem erit circiter ac ſi globus deſcenſu ſuo toto in medio non reſiſtente deſcriberet arcus illius partem dimidiam digitorum $62\frac{3}{62}$, idque in cycloide, ad quam motum penduli ſupra reduximus: & propterea velocitas illa æqualis erit velocitati quam globus, perpendiculariter cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem arcus illius ſinui verſo æqualem, acquirere poſſet. Eſt autem ſinus ille verſus in cycloide ad arcum iſtum $62\frac{3}{62}$ ut arcus idem ad penduli longitudinem duplam 252, & propterea æqualis digitis 15,278. Quare velocitas ea ipſa eſt quam corpus cadendo & caſu ſuo ſpatium 15,278 digitorum deſcribendo acquirere poſſet. Tali igitur cum velocitate globus reſiſtentiam patitur, quæ ſit ad ejus pondus ut 0,61705 ad 121, vel (ſi reſiſtentiæ pars illa ſola ſpectetur quæ eſt in velocitatis ratione duplicata) ut 0,56752 ad 121.

Experimento autem hydroſtatico inveni quod pondus globi hujus lignei eſſet ad pondus globi aquei magnitudinis ejuſdem ut 55 ad 97: & propterea cum 121 ſit ad 213,4 in eadem ratione, erit reſiſtentia globi aquei præfata cum velocitate progredientis ad ipſius pondus ut 0,56752 ad 213,4, id eſt, ut 1 ad $376\frac{1}{50}$. Unde cum pondus

dus globi aquei, quo tempore globus cum velocitate uniformiter continuata deſcribat longitudinem digitorum 30,556, velocitatem illam omnem in globo cadente generare poſſet; manifeſtum eſt quod vis reſiſtentiæ eodem tempore uniformiter continuata tollere poſſet velocitatem minorem in ratione 1 ad $376\frac{1}{50}$, hoc eſt, velocitatis totius partem $\frac{1}{376\frac{1}{50}}$. Et propterea quo tempore globus, ea cum velocitate uniformiter continuata, longitudinem ſemidiametri ſuæ, ſeu digitorum $3\frac{7}{16}$, deſcribere poſſet, eodem amitteret motus ſui partem $\frac{1}{3342}$.

Numerabam etiam oſcillationes quibus pendulum quartam motus ſui partem amiſit. In ſequente tabula numeri ſupremi denotant longitudinem arcus deſcenſu primo deſcripti, in digitis & partibus digiti expreſſam: numeri medii ſignificant longitudinem arcus aſcenſu ultimo deſcripti; & loco infimo ſtant numeri oſcillationum. Experimentum deſcripſi tanquam magis accuratum quam cum motus pars tantum octava amitteretur. Calculum tentet qui volet.

Deſcenſus primus	2	4	8	16	32	64
Aſcenſus ultimus	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus Oſcillat.	374	272	$162\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{3}$	$41\frac{2}{3}$	$22\frac{2}{3}$

Poſtea globum plumbeum diametro digitorum 2, & pondere unciarum *Romanarum* $26\frac{1}{4}$ ſuſpendi filo eodem, ſic ut inter centrum globi & punctum ſuſpenſionis intervallum eſſet pedum $10\frac{1}{2}$, & numerabam oſcillationes quibus data motus pars amitteretur. Tabularum ſubſequentium prior exhibet numerum oſcillationum quibus pars octava motus totius ceſſavit; ſecunda numerum oſcillationum quibus ejuſdem pars quarta amiſſa fuit.

Deſcenſus primus	1	2	4	8	16	32	64
Aſcenſus ultimus	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	$3\frac{1}{2}$	7	14	28	56
Numerus Oſcillat.	226	228	193	140	$90\frac{1}{2}$	53	30

Deſcenſus primus	1	2	4	8	16	32	64
Aſcenſus ultimus	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus Oſcillat.	510	518	420	318	204	121	70

In tabula priore ſeligendo ex obſervationibus tertiam, quintam & ſeptimam,

ſeptimam, & exponendo velocitates maximas in his obſervationibus particulatim per numeros 1, 4, 16 reſpective, & generaliter per quantitatem V ut ſupra: emerget in obſervatione tertia $\frac{\frac{1}{2}}{193} = A + B + C$, in quinta $\frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$, in ſeptima $\frac{8}{30} = 16A + 64B + 256C$. Hæ vero æquationes reductæ dant $A = 0{,}001414$, $B = 0{,}000297$, $C = 0{,}000879$. Et inde prodit reſiſtentia globi cum velocitate V moti in ea ratione ad pondus ſuum unciarum $26\frac{1}{4}$, quam habet $0{,}0009V + 0{,}000208V^{\frac{3}{2}} + 0{,}000659V^2$ ad penduli longitudinem 121 digitorum. Et ſi ſpectemus eam ſolummodo reſiſtentiæ partem quæ eſt in duplicata ratione velocitatis, hæc erit ad pondus globi ut $0{,}000659V^2$ ad 121 digitos. Erat autem hæc pars reſiſtentiæ in experimento primo ad pondus globi lignei unciarum $57\frac{7}{22}$ ut $0{,}002217V^2$ ad 121: & inde fit reſiſtentia globi lignei ad reſiſtentiam globi plumbei (paribus eorum velocitatibus) ut $57\frac{7}{22}$ in 0,002217 ad $26\frac{1}{4}$ in 0,000659, id eſt, ut $7\frac{1}{3}$ ad 1. Diametri globorum duorum erant $6\frac{7}{8}$ & 2 digitorum, & harum quadrata ſunt ad invicem ut $47\frac{1}{4}$ & 4, ſeu $11\frac{13}{16}$ & 1 quamproxime. Ergo reſiſtentiæ globorum æquivelocium erant in minore ratione quam duplicata diametrorum. At nondum conſideravimus reſiſtentiam fili, quæ certe permagna erat, ac de pendulorum inventa reſiſtentia ſubduci debet. Hanc accurate definire non potui, ſed majorem tamen inveni quam partem tertiam reſiſtentiæ totius minoris penduli; & inde didici quod reſiſtentiæ globorum, dempta fili reſiſtentia, ſunt quam proxime in duplicata ratione diametrorum. Nam ratio $7\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ ad $1 - \frac{1}{3}$, ſeu $10\frac{1}{2}$ ad 1 non longe abeſt a diametrorum ratione duplicata $11\frac{13}{16}$ ad 1.

Cum reſiſtentia fili in globis majoribus minoris ſit momenti, tentavi etiam experimentum in globo cujus diameter erat $18\frac{3}{4}$ digitorum. Longitudo penduli inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis erat digitorum $122\frac{1}{2}$, inter punctum ſuſpenſionis & nodum in filo $109\frac{1}{2}$ dig. Arcus primo penduli deſcenſu a nodo deſcriptus 32 dig. Arcus aſcenſu ultimo poſt oſcillationes quinque ab eodem nodo deſcriptus 28 dig. Summa arcuum ſeu arcus totus oſcillatione mediocri deſcriptus 60 dig. Differentia arcuum 4 dig. Ejus pars decima ſeu differentia inter deſcenſum & aſcenſum in oſcil-

oſcillatione mediocri $\frac{2}{5}$ dig. Ut radius $109\frac{1}{2}$ ad radium $122\frac{1}{2}$ ita arcus totus 60 dig. oſcillatione mediocri a nodo deſcriptus ad arcum totum $67\frac{1}{8}$ dig. oſcillatione mediocri a centro globi deſcriptum; & ita differentia $\frac{2}{5}$ ad differentiam novam 0,4475. Si longitudo penduli, manente longitudine arcus deſcripti, augeretur in ratione 126 ad $122\frac{1}{2}$; tempus oſcillationis augeretur & velocitas penduli diminueretur in ratione illa ſubduplicata, maneret vero arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum differentia 0,4475. Deinde ſi arcus deſcriptus augeretur in ratione $124\frac{3}{31}$ ad $67\frac{1}{8}$, differentia iſta 0,4475 augeretur in duplicata illa ratione, ideoque evaderet 1,5295. Hæc ita ſe haberent, ex hypotheſi quod reſiſtentia penduli eſſet in duplicata ratione velocitatis. Ergo ſi pendulum deſcriberet arcum totum $124\frac{3}{31}$ digitorum, & longitudo ejus inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis eſſet 126 digitorum, differentia arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum foret 1,5295 digitorum. Et hæc differentia ducta in pondus globi penduli, quod erat unciarum 208, producit 318,136. Rurſus ubi pendulum ſuperius ex globo ligneo conſtructum centro oſcillationis, quod a puncto ſuſpenſionis digitos 126 diſtabat, deſcribebat arcum totum $124\frac{3}{31}$ digitorum, differentia arcuum deſcenſu & aſcenſu deſcriptum fuit $\frac{126}{121}$ in $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$, quæ ducta in pondus globi, quod erat unciarum $57\frac{7}{22}$, producit 49,396. Duxi autem differentias haſce in pondera globorum, ut invenirem eorum reſiſtentias. Nam differentiæ oriuntur ex reſiſtentiis, ſuntque ut reſiſtentiæ directe & pondera inverſe. Sunt igitur reſiſtentiæ ut numeri 318,136 & 49,396. Pars autem reſiſtentiæ globi minoris, quæ eſt in duplicata ratione velocitatis, erat ad reſiſtentiam totam ut 0,56752 ad 0,61675, id eſt, ut 45,453 ad 49,396; & pars reſiſtentiæ globi majoris propemodum æquatur ipſius reſiſtentiæ toti; ideoque partes illæ ſunt ut 318,136 & 45,453 quamproxime, id eſt, ut 7 & 1. Sunt autem globorum diametri $18\frac{3}{4}$ & $6\frac{7}{8}$; & harum quadrata $351\frac{9}{16}$ & $47\frac{17}{64}$ ſunt ut 7,438 & 1, id eſt, ut globorum reſiſtentiæ 7 & 1 quamproxime. Differentia rationum haud major eſt, quam quæ ex fili reſiſtentia oriri potuit. Igitur reſiſtentiarum partes illæ quæ ſunt, paribus globis, ut quadrata velocitatum; ſunt etiam, paribus velocitatibus, ut quadrata diametrorum globorum.

Cæterum

Cæterum globorum, quibus uſus ſum in his experimentis, maximus non erat perfecte ſphæricus, & propterea in calculo hic allato minutias quaſdam brevitatis gratia neglexi; de calculo accurato in experimento non ſatis accurato minime ſollicitus. Optarim itaque, cum demonſtratio vacui ex his dependeat, ut experimenta cum globis & pluribus & majoribus & magis accuratis tentarentur. Si globi ſumantur in proportione geometrica, puta quorum diametri ſint digitorum 4, 8, 16, 32; ex progreſſione experimentorum colligetur quid in globis adhuc majoribus evenire debeat.

Jam vero conferendo reſiſtentias diverſorum fluidorum inter ſe tentavi ſequentia. Arcam ligneam paravi longitudine pedum quatuor, latitudine & altitudine pedis unius. Hanc operculo nudatam implevi aqua fontana, fecique ut immerſa pendula in medio aquæ oſcillando moverentur. Globus autem plumbeus pondere $166\frac{1}{6}$ unciarum, diametro $3\frac{1}{6}$ digitorum movebatur ut in tabula ſequente deſcripſimus, exiſtente videlicet longitudine penduli a puncto ſuſpenſionis ad punctum quoddam in filo notatum 126 digitorum, ad oſcillationis autem centrum $134\frac{3}{8}$ digitorum.

Arcus deſcenſu primo a puncto in filo notato deſcriptus, digitorum	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus aſcenſu ultimo deſcriptus, digitorum	48	24	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum differentia motui amiſſo proportionalis, digitorum	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oſcillationum in aqua			$\frac{29}{60}$	$1\frac{1}{5}$	3	7	$11\frac{1}{4}$	$12\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$
Numerus Oſcillationum in aere	$85\frac{1}{2}$		287	535					

In experimento columnæ quartæ, motus æquales oſcillationibus 535 in aere, & $1\frac{1}{5}$ in aqua amiſſi ſunt. Erant quidem oſcillationes in aere paulo celeriores quam in aqua. At ſi oſcillationes in aqua in ea ratione accelerarentur ut motus pendulorum in medio utroque fierent æquiveloces, maneret numerus idem oſcillationum $1\frac{1}{5}$ in aqua, quibus motus idem ac prius amitteretur; ob reſiſtentiam auctam & ſimul quadratum temporis diminutum in eadem ratione illa duplicata. Paribus igitur pendulorum velocitatibus motus æquales in aere oſcillationibus 535 & in aqua oſcillationibus $1\frac{1}{5}$ amiſſi ſunt; ideoque reſiſtentia penduli in aqua eſt ad ejus reſiſtentiam in aere

ut 535 ad $1\frac{1}{5}$. Hæc eſt proportio reſiſtentiarum totarum in caſu columnæ quartæ.

Deſignet jam $AV+CV^2$ differentiam arcuum in deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum a globo in aere cum velocitate maxima V moto; & cum velocitas maxima in caſu columnæ quartæ ſit ad velocitatem maximam in caſu columnæ primæ, ut 1 ad 8; & differentia illa arcuum in caſu columnæ quartæ ad differentiam in caſu columnæ primæ ut $\frac{2}{535}$ ad $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$, ſeu ut $85\frac{1}{2}$ ad 4280: ſcribamus in his caſibus 1 & 8 pro velocitatibus, atque $85\frac{1}{2}$ & 4280 pro differentiis arcuum, & fiet $A+C=85\frac{1}{2}$ & $8A+64C=4280$ ſeu $A+8C=535$; indeque per reductionem æquationum proveniet $7C=449\frac{1}{2}$ & $C=64\frac{3}{14}$ & $A=21\frac{2}{7}$: atque ideo reſiſtentia, cum ſit ut $\frac{7}{11}AV+\frac{3}{4}CV^2$, erit ut $13\frac{6}{11}V+48\frac{9}{56}V^2$. Quare in caſu columnæ quartæ, ubi velocitas erat 1, reſiſtentia tota eſt ad partem ſuam quadrato velocitatis proportionalem, ut $13\frac{6}{11}+48\frac{9}{56}$ ſeu $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$; & idcirco reſiſtentia penduli in aqua eſt ad reſiſtentiæ partem illam in aere, quæ quadrato velocitatis proportionalis eſt, quæque ſola in motibus velocioribus conſideranda venit, ut $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$ & 535 ad $1\frac{1}{5}$ conjunctim, id eſt, ut 571 ad 1. Si penduli in aqua oſcillantis filum totum fuiſſet immerſum, reſiſtentia ejus fuiſſet adhuc major; adeo ut penduli in aqua oſcillantis reſiſtentia illa, quæ velocitatis quadrato proportionalis eſt, quæque ſola in corporibus velocioribus conſideranda venit, ſit ad reſiſtentiam ejuſdem penduli totius, eadem cum velocitate in aere oſcillantis, ut 850 ad 1 circiter, hoc eſt, ut denſitas aquæ ad denſitatem aeris quamproxime.

In hoc calculo ſumi quoque deberet pars illa reſiſtentiæ penduli in aqua, quæ eſſet ut quadratum velocitatis, ſed (quod mirum forte videatur) reſiſtentia in aqua augebatur in ratione velocitatis pluſquam duplicata. Ejus rei cauſam inveſtigando, in hanc incidi, quod arca nimis anguſta eſſet pro magnitudine globi penduli, & motum aquæ cedentis præ anguſtia ſua nimis impediebat. Nam ſi globus pendulus, cujus diameter erat digiti unius, immergeretur; reſiſtentia augebatur in duplicata ratione velocitatis quam proxime. Id tentabam conſtruendo pendulum ex globis duobus, quorum inferior & minor oſcillaretur in aqua, ſuperior & major proxime ſupra aquam filo affixus eſſet, & in aere oſcillando, adjuvaret motum penduli

duli eumque diuturniorem redderet. Experimenta autem hoc modo inſtituta ſe habebant ut in tabula ſequente deſcribitur.

Arcus deſcenſu primo deſcriptus	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus aſcenſu ultimo deſcriptus	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum diff. motui amiſſo proport.	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oſcillationum	$3\frac{3}{8}$	$6\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{12}$	$21\frac{1}{5}$	34	53	$62\frac{1}{5}$

Conferendo reſiſtentias mediorum inter ſe, effeci etiam ut pendula ferrea oſcillarentur in argento vivo. Longitudo fili ferrei erat pedum quaſi trium, & diameter globi penduli quaſi tertia pars digiti. Ad filum autem proxime ſupra mercurium affixus erat globus alius plumbeus ſatis magnus ad motum penduli diutius continuandum. Tum vaſculum, quod capiebat quaſi libras tres argenti vivi, implebam vicibus alternis argento vivo & aqua communi, ut pendulo in fluido utroque ſucceſſive oſcillante, invenirem proportionem reſiſtentiarum: & prodiit reſiſtentia argenti vivi ad reſiſtentiam aquæ ut 13 vel 14 ad 1 circiter: id eſt, ut denſitas argenti vivi ad denſitatem aquæ. Ubi globum pendulum paulo majorem adhibebam, puta cujus diameter eſſet quaſi $\frac{1}{3}$ vel $\frac{2}{3}$ partes digiti, prodibat reſiſtentia argenti vivi in ea ratione ad reſiſtentiam aquæ, quam habet numerus 12 vel 10 ad 1 circiter. Sed experimento priori magis fidendum eſt, propterea quod in his ultimis vas nimis anguſtum fuit pro magnitudine globi immerſi. Ampliato globo, deberet etiam vas ampliari. Conſtitueram quidem hujuſmodi experimenta in vaſis majoribus & in liquoribus tum metallorum fuſorum, tum aliis quibuſdam tam calidis quam frigidis repetere: ſed omnia experiri non vacat, & ex jam deſcriptis ſatis liquet reſiſtentiam corporum celeriter motorum denſitati fluidorum in quibus moventur proportionalem eſſe quam proxime. Non dico accurate. Nam fluida tenaciora, pari denſitate, proculdubio magis reſiſtunt quam liquidiora, ut oleum frigidum quam calidum, calidum quam aqua pluvialis, aqua quam ſpiritus vini. Verum in liquoribus, qui ad ſenſum ſatis fluidi ſunt, ut in aere, in aqua ſeu dulci ſeu ſalſa, in ſpiritibus vini, terebinthi & ſalium, in oleo a fæcibus per deſtillationem liberato & calefacto, oleoque vitrioli & mercurio, ac metallis liquefactis, & ſiqui ſint alii, qui tam fluidi ſunt ut in vaſis agitati motum impreſſum diutius conſervent, effuſique liberrime in guttas decurrendo reſolvantur, nullus

De Motu Corporum dubito quin regula allata ſatis accurate obtineat: præſertim ſi experimenta in corporibus pendulis & majoribus & velocius motis inſtituantur.

Denique cum nonnullorum opinio ſit, medium quoddam æthereum & longe ſubtiliſſimum extare, quod omnes omnium corporum poros & meatus liberrime permeet; a tali autem medio per corporum poros fluente reſiſtentia oriri debeat: ut tentarem an reſiſtentia, quam in motis corporibus experimur, tota ſit in eorum externa ſuperficie, an vero partes etiam internæ in ſuperficiebus propriis reſiſtentiam notabilem ſentiant, excogitavi experimentum tale. Filo pedum undecim longitudinis ab unco chalybeo ſatis firmo, mediante annulo chalybeo, ſuſpendebam pyxidem abiegnam rotundam, ad conſtituendum pendulum longitudinis prædictæ. Uncus ſurſum præacutus erat acie concava, ut annulus arcu ſuo ſuperiore aciei innixus liberrime moveretur. Arcui autem inferiori annectebatur filum. Pendulum ita conſtitutum deducebam a perpendiculo ad diſtantiam quaſi pedum ſex, idque ſecundum planum aciei unci perpendiculare, ne annulus, oſcillante pendulo, ſupra aciem unci ultro citroque laberetur. Nam punctum ſuſpenſionis, in quo annulus uncum tangit, immotum manere debet. Locum igitur accurate notabam, ad quem deduxeram pendulum, dein pendulo demiſſo notabam alia tria loca ad quæ redibat in fine oſcillationis primæ, ſecundæ ac tertiæ. Hoc repetebam ſæpius, ut loca illa quam potui accuratiſſime invenirem. Tum pyxidem plumbo & gravioribus, quæ ad manus erant, metallis implebam. Sed prius ponderabam pyxidem vacuam, una cum parte fili quæ circum pyxidem volvebatur ac dimidio partis reliquæ quæ inter uncum & pyxidem pendulam tendebatur. Nam filum tenſum dimidio ponderis ſui pendulum a perpendiculo digreſſum ſemper urget. Huic ponderi addebam pondus aeris quem pyxis capiebat. Et pondus totum erat quaſi pars ſeptuageſima octava pyxidis metallorum plenæ. Tum quoniam pyxis metallorum plena, pondere ſuo tendendo filum, augebat longitudinem penduli, contrahebam filum ut penduli jam oſcillantis eadem eſſet longitudo ac prius. Dein pendulo ad locum primo notatum retracto ac dimiſſo, numerabam oſcillationes quaſi ſeptuaginta & ſeptem, donec pyxis ad locum ſecundo notatum rediret, totidemque ſubinde donec pyxis ad locum

locum tertio notatum rediret, atque rurſus totidem donec pyxis reditu ſuo attingeret locum quartum. Unde concludo quod reſiſtentia tota pyxidis plenæ non majorem habebat proportionem ad reſiſtentiam pyxidis vacuæ quam 78 ad 77. Nam ſi æquales eſſent ambarum reſiſtentiæ, pyxis plena ob vim ſuam inſitam ſeptuagies & octies majorem vi inſita pyxidis vacuæ, motum ſuum oſcillatorium tanto diutius conſervare deberet, atque ideo completis ſemper oſcillationibus 78 ad loca illa notata redire. Rediit autem ad eadem completis oſcillationibus 77.

Deſignet igitur A reſiſtentiam pyxidis in ipſius ſuperficie externa, & B reſiſtentiam pyxidis vacuæ in partibus internis; & ſi reſiſtentiæ corporum æquivelocium in partibus internis ſint ut materia, ſeu numerus particularum quibus reſiſtitur: erit 78 B reſiſtentia pyxidis plenæ in ipſius partibus internis: ideoque pyxidis vacuæ reſiſtentia tota A+B erit ad pyxidis plenæ reſiſtentiam totam A+78 B ut 77 ad 78, & diviſim A+B ad 77 B, ut 77 ad 1, indeque A+B ad B ut 77×77 ad 1, & diviſim A ad B ut 5928 ad 1. Eſt igitur reſiſtentia pyxidis vacuæ in partibus internis quinquies millies minor quam ejuſdem reſiſtentia in externa ſuperficie, & amplius. Sic vero diſputamus ex hypotheſi quod major illa reſiſtentia pyxidis plenæ, non ab alia aliqua cauſa latente oriatur, ſed ab actione ſola fluidi alicujus ſubtilis in metallum incluſum.

Hoc experimentum recitavi memoriter. Nam charta, in qua illud aliquando deſcripſeram, intercidit. Unde fractas quaſdam numerorum partes, quæ memoria exciderunt, omittere compulſus ſum.

Nam omnia denuo tentare non vacat. Prima vice, cum unco infirmo uſus eſſem, pyxis plena citius retardabatur. Cauſam quærendo, reperi quod uncus infirmus cedebat ponderi pyxidis, & ejus oſcillationibus obſequendo in partes omnes flectebatur. Parabam igitur uncum firmum, ut punctum ſuſpenſionis immotum maneret, & tunc omnia ita evenerunt uti ſupra deſcripſimus.

SECTIO

SECTIO VII.

De motu fluidorum & reſiſtentia projectilium.

PROPOSITIO XXXII. THEOREMA XXVI.

Si corporum ſyſtemata duo ſimilia ex æquali particularum numero conſtent, & particulæ correſpondentes ſimiles ſint & proportionales, ſingulæ in uno ſyſtemate ſingulis in altero, & ſimiliter ſitæ inter ſe, ac datam habeant rationem denſitatis ad invicem, & inter ſe temporibus proportionalibus ſimiliter moveri incipiant (eæ inter ſe quæ in uno ſunt ſyſtemate & eæ inter ſe quæ ſunt in altero) & ſi non tangant ſe mutuo quæ in eodem ſunt ſyſtemate, niſi in momentis reflexionum, neque attrahant, vel fugent ſe mutuo, niſi viribus acceleratricibus quæ ſint ut particularum correſpondentium diametri inverſe & quadrata velocitatum directe: dico quod ſyſtematum particulæ illæ pergent inter ſe temporibus proportionalibus ſimiliter moveri.

Corpora ſimilia & ſimiliter ſita temporibus proportionalibus inter ſe ſimiliter moveri dico, quorum ſitus ad invicem in fine temporum illorum ſemper ſunt ſimiles: puta ſi particulæ unius ſyſtematis cum alterius particulis correſpondentibus conferantur. Unde tempora erunt proportionalia, in quibus ſimiles & proportionales figurarum ſimilium partes a particulis correſpondentibus deſcribuntur. Igitur ſi duo ſint ejuſmodi ſyſtemata, particulæ correſpondentes, ob ſimilitudinem incœptorum motuum, pergent ſimiliter moveri, uſque donec ſibi mutuo occurrant. Nam ſi nullis agitantur viribus, progredientur uniformiter in lineis rectis per motus leg. 1. Si viribus aliquibus ſe mutuo agitant, & vires illæ ſint ut particularum correſpondentium diametri inverſe & quadrata velocitatum directe; quoniam particularum ſitus ſunt ſimiles & vires proportionales, vires totæ quibus particulæ correſpondentes agitantur, ex viribus ſingulis agitan-

tibus (per legum corollarium ſecundum) compoſitæ, ſimiles habebunt determinationes, perinde ac ſi centra inter particulas ſimiliter ſita reſpicerent; & erunt vires illæ totæ ad invicem ut vires ſingulæ componentes, hoc eſt, ut correſpondentium particularum diametri inverſe, & quadrata velocitatum directe: & propterea efficient ut correſpondentes particulæ figuras ſimiles deſcribere pergant. Hæc ita ſe habebunt (per corol. 1. & 8 prop. IV. lib. 1.) ſi modo centra illa quieſcant. Sin moveantur, quoniam ob tranſlationum ſimilitudinem, ſimiles manent eorum ſitus inter ſyſtematum particulas; ſimiles inducentur mutationes in figuris quas particulæ deſcribunt. Similes igitur erunt correſpondentium & ſimilium particularum motus uſque ad occurſus ſuos primos, & propterea ſimiles occurſus, & ſimiles reflexiones, & ſubinde (per jam oſtenſa) ſimiles motus inter ſe donec iterum in ſe mutuo inciderint, & ſic deinceps in infinitum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi corpora duo quævis, quæ ſimilia ſint & ad ſyſtematum particulas correſpondentes ſimiliter ſita, inter ipſas temporibus proportionalibus ſimiliter moveri incipiant, ſintque eorum magnitudines ac denſitates ad invicem ut magnitudines ac denſitates correſpondentium particularum: hæc pergent temporibus proportionalibus ſimiliter moveri. Eſt enim eadem ratio partium majorum ſyſtematis utriuſque atque particularum.

Corol. 2. Et ſi ſimiles & ſimiliter poſitæ ſyſtematum partes omnes quieſcant inter ſe: & earum duæ, quæ cæteris majores ſint, & ſibi mutuo in utroque ſyſtemate correſpondeant, ſecundum lineas ſimiliter ſitas ſimili cum motu utcunque moveri incipiant: hæ ſimiles in reliquis ſyſtematum partibus excitabunt motus, & pergent inter ipſas temporibus proportionalibus ſimiliter moveri; atque ideo ſpatia diametris ſuis proportionalia deſcribere.

PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA XXVII.

Iiſdem poſitis, dico quod ſyſtematum partes majores reſiſtuntur in ratione compoſita ex duplicata ratione velocitatum ſuarum & duplicata ratione diametrorum & ratione denſitatis partium ſyſtematum.

Nam reſiſtentia oritur partim ex viribus centripetis vel centrifugis

gis quibus particulæ ſyſtematum ſe mutuo agitant, partim ex occurſibus & reflexionibus particularum & partium majorum. Prioris autem generis reſiſtentiæ ſunt ad invicem ut vires totæ motrices a quibus oriuntur, id eſt, ut vires totæ acceleratrices & quantitates materiæ in partibus correſpondentibus; hoc eſt (per hypotheſin) ut quadrata velocitatum directe & diſtantiæ particularum correſpondentium inverſe & quantitates materiæ in partibus correſpondentibus directe: ideoque cum diſtantiæ particularum ſyſtematis unius ſint ad diſtantias correſpondentes particularum alterius, ut diameter particulæ vel partis in ſyſtemate priore ad diametrum particulæ vel partis correſpondentis in altero, & quantitates materiæ ſint ut denſitates partium & cubi diametrorum; reſiſtentiæ ſunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & denſitates partium ſyſtematum. *Q. E. D.* Poſterioris generis reſiſtentiæ ſunt ut reflexionum correſpondentium numeri & vires conjunctim. Numeri autem reflexionum ſunt ad invicem ut velocitates partium correſpondentium directe, & ſpatia inter earum reflexiones inverſe. Et vires reflexionum ſunt ut velocitates & magnitudines & *denſitates* partium correſpondentium conjunctim; id eſt, ut velocitates & diametrorum cubi & denſitates partium. Et conjunctis his omnibus rationibus, reſiſtentiæ partium correſpondentium ſunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & denſitates partium conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur ſi ſyſtemata illa ſint fluida duo elaſtica ad modum aeris, & partes eorum quieſcant inter ſe: corpora autem duo ſimilia & partibus fluidorum quoad magnitudinem & denſitatem proportionalia, & inter partes illas ſimiliter poſita, ſecundum lineas ſimiliter poſitas utcunque projiciantur; vires autem acceleratrices, quibus particulæ fluidorum ſe mutuo agitant, ſint ut corporum projectorum diametri inverſe, & quadrata velocitatum directe: corpora illa temporibus proportionalibus ſimiles excitabunt motus in fluidis, & ſpatia ſimilia ac diametris ſuis proportionalia deſcribent.

Corol. 2. Proinde in eodem fluido projectile velox reſiſtentiam patitur, quæ eſt in duplicata ratione velocitatis quam proxime. Nam ſi vires, quibus particulæ diſtantes ſe mutuo agitant, augerentur in duplicata ratione velocitatis, reſiſtentia foret in eadem ratione duplicata accurate; ideoque in medio, cujus partes ab invicem diſtantes

tes ſeſe viribus nullis agitant, reſiſtentia eſt in duplicata ratione velocitatis accurate. Sunto igitur media tria *A*, *B*, *C* ex partibus ſimilibus & æqualibus & ſecundum diſtantias æquales regulariter diſpoſitis conſtantia. Partes mediorum *A* & *B* fugiant ſe mutuo viribus quæ ſint ad invicem ut *T* & *V*, illæ medii *C* ejuſmodi viribus omnino deſtituantur. Et ſi corpora quatuor æqualia *D*, *E*, *F*, *G* in his mediis moveantur, priora duo *D* & *E* in prioribus duobus *A* & *B*, & altera duo *F* & *G* in tertio *C*; ſitque velocitas corporis *D* ad velocitatem corporis *E*, & velocitas corporis *F* ad velocitatem corporis *G* in ſubduplicata ratione virium *T* ad vires *V*: reſiſtentia corporis *D* erit ad reſiſtentiam corporis *E*, & reſiſtentia corporis *F* ad reſiſtentiam corporis *G*, in velocitatum ratione duplicata; & propterea reſiſtentia corporis *D* erit ad reſiſtentiam corporis *F* ut reſiſtentia corporis *E* ad reſiſtentiam corporis *G*. Sunto corpora *D* & *F* æquivelocia ut & corpora *E* & *G*; & augendo velocitates corporum *D* & *F* in ratione quacunque, ac diminuendo vires particularum medii *B* in eadem ratione duplicata, accedet medium *B* ad formam & conditionem medii *C* pro libitu, & idcirco reſiſtentiæ corporum æqualium & æquivelocium *E* & *G* in his mediis, perpetuo accedent ad æqualitatem, ita ut earum differentia evadat tandem minor quam data quævis. Proinde cum reſiſtentiæ corporum *D* & *F* ſint ad invicem ut reſiſtentiæ corporum *E* & *G*, accedent etiam hæ ſimiliter ad rationem æqualitatis. Corporum igitur *D* & *F*, ubi velociſſime moventur, reſiſtentiæ ſunt æquales quam proxime: & propterea cum reſiſtentia corporis *F* ſit in duplicata ratione velocitatis, erit reſiſtentia corporis *D* in eadem ratione quam proxime.

Corol. 3. Corporis in fluido quovis elaſtico velociſſime moti eadem fere eſt reſiſtentia ac ſi partes fluidi viribus ſuis centrifugis deſtituerentur, ſeque mutuo non fugerent: ſi modo fluidi vis elaſtica ex particularum viribus centrifugis oriatur, & velocitas adeo magna ſit ut vires non habeant ſatis temporis ad agendum.

Corol. 4. Proinde cum reſiſtentiæ ſimilium & æquivelocium corporum, in medio cujus partes diſtantes ſe mutuo non fugiunt, ſint ut quadrata diametrorum; ſunt etiam æquivelocium & celerrime motorum corporum reſiſtentiæ in fluido elaſtico ut quadrata diametrorum quam proxime.

De Motu Corporum

Corol. 5. Et cum corpora ſimilia, æqualia & æquivelocia, in mediis ejuſdem denſitatis, quorum particulæ ſe mutuo non fugiunt, ſive particulæ illæ ſint plures & minores, ſive pauciores & majores, in æqualem materiæ quantitatem temporibus æqualibus impingant, eique æqualem motus quantitatem imprimant, & viciſſim (per motus legem tertiam) æqualem ab eadem reactionem patiantur, hoc eſt, æqualiter reſiſtantur: manifeſtum eſt etiam quod in ejuſdem denſitatis fluidis elaſticis, ubi velociſſime moventur, æquales ſint eorum reſiſtentiæ quam proxime; ſive fluida illa ex particulis craſſioribus conſtent, ſive ex omnium ſubtiliſſimis conſtituantur. Ex medii ſubtilitate reſiſtentia projectilium celerrime motorum non multum diminuitur.

Corol. 6. Hæc omnia ita ſe habent in fluidis, quorum vis elaſtica ex particularum viribus centrifugis originem ducit. Quod ſi vis illa aliunde oriatur, veluti ex particularum expanſione ad inſtar lanæ vel ramorum arborum, aut ex alia quavis cauſa, qua motus particularum inter ſe redduntur minus liberi: reſiſtentia, ob minorem medii fluiditatem, erit major quam in ſuperioribus corollariis.

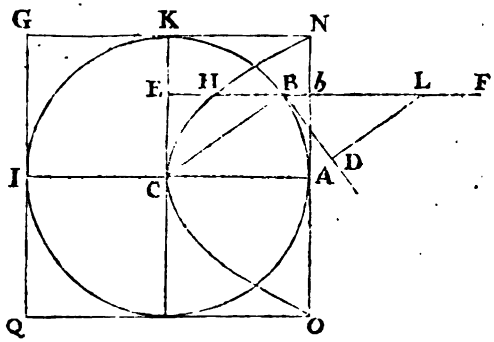
PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA XXVIII.

Si globus & cylindrus æqualibus diametris deſcripti, in medio raro ex particulis æqualibus & ad æquales ab invicem diſtantias libere diſpoſitis conſtante, ſecundum plagam axis cylindri, æquali cum velocitate moveantur: erit reſiſtentia globi duplo minor quam reſiſtentia cylindri.

Nam quoniam actio medii in corpus eadem eſt (per legum corol. 5.) ſive corpus in medio quieſcente moveatur, ſive medii particulæ eadem cum velocitate impingant in corpus quieſcens: conſideremus corpus tanquam quieſcens, & videamus quo impetu urgebitur a medio movente. Deſignet igitur $ABKI$ corpus ſphæricum centro C ſemidiametro CA deſcriptum, & incidant particulæ medii data cum velocitate in corpus illud ſphæricum, ſecundum rectas ipſi AC parallelas: ſitque FB ejuſmodi recta. In ea capiatur LB ſemidiametro CB æqualis, & ducatur BD quæ ſphæram tangat in B. In KC & BD demittantur perpendiculares BE, LD, & vis qua particula-

ticula medii, ſecundum rectam *FB* oblique incidendo, globum ferit in *B*, erit ad vim qua particula eadem cylindrum *ONGQ* axe *ACI* circa globum deſcriptum perpendiculariter feriret in *b*, ut *LD* ad *LB* vel *BE* ad *BC*. Rurſus efficacia hujus vis ad movendum globum ſecundum incidentiæ ſuæ plagam *FB* vel *AC*, eſt ad ejuſdem efficaciam ad movendum globum ſecundum plagam determinationis ſuæ, id eſt, ſecundum plagam rectæ *BC* qua globum directe urget ut *BE* ad *BC*. Et conjunctis rationibus, efficacia particulæ in globum ſecundum rectam *FB* oblique incidentis, ad movendum eundem ſecundum plagam incidentiæ ſuæ, eſt ad efficaciam particulæ ejuſdem ſecundum eandem rectam in cylindrum perpendiculariter incidentis, ad ipſum movendum in plagam eandem, ut *BE* quadratum ad *BC* quadratum. Quare ſi in *bE*, quæ perpendicularis eſt ad cylindri baſem circularem *NAO* & æqualis radio *AC*, ſumatur *bH* æqualis $\frac{BE \ quad.}{CB}$: erit *bH* ad *bE* ut effectus particulæ in globum ad effectum particulæ in cylindrum. Et propterea ſolidum quod a rectis omnibus *bH* occupatur erit ad ſolidum quod a rectis omnibus *bE* occupatur, ut effectus particularum omnium in globum ad effectum particularum omnium in cylindrum. Sed ſolidum prius eſt parabolois vertice *C*, axe *CA* & latere recto *CA* deſcriptum, & ſolidum poſterius eſt cylindrus paraboloidi circumſcriptus: & notum eſt quod parabolois ſit ſemiſſis cylindri circumſcripti. Ergo vis tota medii in globum eſt duplo minor quam ejuſdem vis tota in cylindrum. Et propterea ſi particulæ medii quieſcerent, & cylindrus ac globus æquali cum velocitate moverentur, foret reſiſtentia globi duplo minor quam reſiſtentia cylindri. *Q. E. D.*

LIBER SECUNDUS.



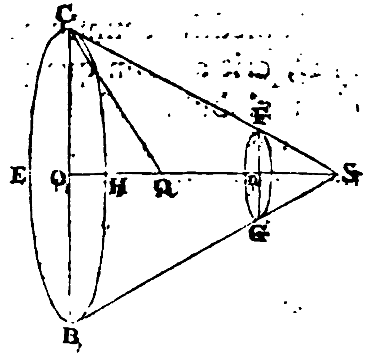
Scholium.

Eadem methodo figuræ aliæ inter ſe quoad reſiſtentiam comparari poſſunt, eæque inveniri quæ ad motus ſuos in mediis reſiſtentibus continuandos aptiores ſunt. Ut ſi baſe circulari *CEBH*, quæ

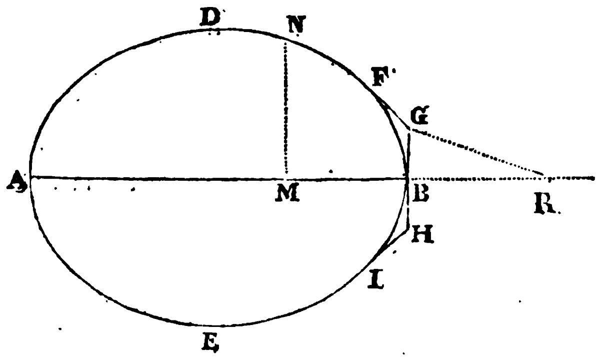
Tt 2 centro

DE MOTU CORPORUM

centro *O*, radio *OC* deſcribitur, & altitudine *OD*, conſtruendum ſit fruſtum coni *CBGF*, quod omnium eadem baſi & altitudine conſtructorum & ſecundum plagam axis ſui verſus *D* progredientium fruſtorum minime reſiſtatur: biſeca altitudinem *OD* in *Q* & produc *OQ* ad *S* ut ſit *QS* æqualis *QC*, & erit *S* vertex coni cujus fruſtum quæritur.



Unde obiter, cum angulus *CSB* ſemper ſit acutus, conſequens eſt, quod ſi ſolidum *ADBE* convolutione figuræ ellipticæ vel ovalis *ADBE* circa axem *AB* facta generetur, & tangatur figura generans a rectis tribus *FG*, *GH*, *HI* in punctis *F*, *B* & *I*, ea lege ut *GH* ſit perpendicularis ad axem in puncto contactus *B*, & *FG*, *HI* cum eadem *GH* contineant angulos *FGB*, *BHI* graduum 135, ſolidum, quod convolutione figuræ *ADFGHIE* circa axem eundem *AB* generatur, minus reſiſtitur quam ſolidum prius; ſi modo utrumque ſecundum plagam axis ſui *AB* progrediatur, & utriuſque terminus *B* præcedat. Quam quidem propoſitionem in conſtruendis navibus non inutilem futuram eſſe cenſeo.



Quod ſi figura *DNFG* ejuſmodi ſit curva, ut, ſi ab ejus puncto quovis *N* ad axem *AB* demittatur perpendiculum *NM*, & a puncto dato *G* ducatur recta *GR* quæ parallela ſit rectæ figuram tangenti in *N*, & axem productum ſecet in *R*, fuerit *MN* ad *GR* ut *GR cub.* ad $4BR \times GBq$.; ſolidum quod figuræ hujus revolutione circa axem *AB* facta, deſcribitur, in medio raro prædicto ab *A* verſus

ſus *B* movendo, minus reſiſtetur quam aliud quodvis eadem longitudine & latitudine deſcriptum ſolidum circulare.

PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA VII.

Si medium rarum ex particulis quam minimis quieſcentibus æqualibus & ad æquales ab invicem diſtantias libere diſpoſitis conſtet: invenire reſiſtentiam globi in hoc medio uniformiter progredientis.

Caſ. 1. Cylindrus eadem diametro & altitudine deſcriptus progredi intelligatur eadem velocitate ſecundum longitudinem axis ſui in eodem medio. Et ponamus quod particulæ medii, in quas globus vel cylindrus incidit, vi reflexionis quam maxima reſiliant. Et cum reſiſtentia globi (per propoſitionem noviſſimam) ſit duplo minor quam reſiſtentia cylindri, & globus ſit ad cylindrum ut duo ad tria, & cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas, ipſaſque quam maxime reflectendo, duplam ſui ipſius velocitatem ipſis communicet: cylindrus, quo tempore dimidiam longitudinem axis ſui uniformiter progrediendo deſcribit, communicabit motum particulis, qui ſit ad totum cylindri motum ut denſitas medii ad denſitatem cylindri; & globus, quo tempore totam longitudinem diametri ſuæ uniformiter progrediendo deſcribit, communicabit motum eundem particulis; & quo tempore duas tertias partes diametri ſuæ deſcribit, communicabit motum particulis, qui ſit ad totum globi motum ut denſitas medii ad denſitatem globi. Et propterea globus reſiſtentiam patitur, quæ ſit ad vim qua totus ejus motus vel auferri poſſit vel generari quo tempore duas tertias partes diametri ſuæ uniformiter progrediendo deſcribit, ut denſitas medii ad denſitatem globi.

Caſ. 2. Ponamus quod particulæ medii in globum vel cylindrum incidentes non reflectantur; & cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas ſimplicem ſuam velocitatem ipſis communicabit, ideoque reſiſtentiam patitur duplo minorem quam in priore caſu, & reſiſtentia globi erit etiam duplo minor quam prius.

Caſ. 3. Ponamus quod particulæ medii vi reflexionis neque maxima neque nulla, ſed mediocri aliqua reſiliant a globo; & reſiſtentia

ſtentia globi erit in eadem ratione mediocri inter reſiſtentiam in primo caſu & reſiſtentiam in ſecundo. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc ſi globus & particulæ ſint infinite dura, & vi omni elaſtica & propterea etiam vi omni reflexionis deſtituta: reſiſtentia globi erit ad vim qua totus ejus motus vel auferri poſſit vel generari, quo tempore globus quatuor tertias partes diametri ſuæ deſcribit, ut denſitas medii ad denſitatem globi.

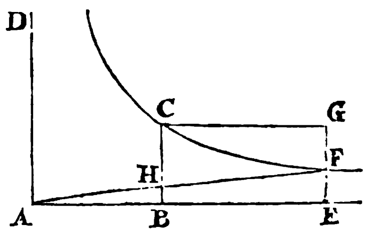
Corol. 2. Reſiſtentia globi, cæteris paribus, eſt in duplicata ratione velocitatis.

Corol. 3. Reſiſtentia globi, cæteris paribus, eſt in duplicata ratione diametri.

Corol. 4. Reſiſtentia globi, cæteris paribus, eſt ut denſitas medii.

Corol. 5. Reſiſtentia globi eſt in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velocitatis & duplicata ratione diametri & ratione denſitatis medii.

Corol. 6. Et motus globi cum ejus reſiſtentia ſic exponi poteſt. Sit *AB* tempus quo globus per reſiſtentiam ſuam uniformiter continuatam totum ſuum motum amittere poteſt. Ad *AB* erigantur perpendicula *AD*, *BC*. Sitque *BC* motus ille totus, & per punctum *C* aſymptotis *AD*, *AB* deſcribatur hyperbola *CF*. Producatur *AB* ad punctum quodvis *E*. Erigatur perpendiculum *EF* hyperbolæ occurrens in *F*. Compleatur parallelogrammum *CBEG*, & agatur *AF* ipſi *BC* occurrens in *H*. Et ſi globus tempore quovis *BE*, motu ſuo primo *BC* uniformiter continuato, in medio non reſiſtente deſcribat ſpatium *CBEG* per aream parallelogrammi expoſitum, idem in medio reſiſtente deſcribet ſpatium *CBEF* per aream hyperbolæ expoſitum, & motus ejus in fine temporis illius exponetur per hyperbolæ ordinatam *EF*, amiſſa motus ejus parte *FG*. Et reſiſtentia ejus in fine temporis ejuſdem exponetur per longitudinem *BH*, amiſſa reſiſtentiæ parte *CH*. Patent hæc omnia per corol. 1. & 3. prop. v. lib. II.



Corol. 7. Hinc ſi globus tempore T per reſiſtentiam R uniformiter continuatam amittat motum ſuum totum M: idem globus tempore t in medio reſiſtente, per reſiſtentiam R in duplicata velocitatis ratione decreſcentem, amittet motus ſui M partem $\frac{tM}{T+t}$, manente

nente

nente parte $\frac{TM}{T+t}$; & deſcribet ſpatium quod ſit ad ſpatium motu uniformi M eodem tempore t deſcriptum, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2,302585092994 eſt ad numerum $\frac{t}{T}$, propterea quod area hyperbolica *BCFE* eſt ad rectangulum *BCGE* in hac proportione.

Scholium.

In hac propoſitione expoſui reſiſtentiam & retardationem projectilium ſphæricorum in mediis non continuis, & oſtendi quod hæc reſiſtentia ſit ad vim qua totus globi motus vel tolli poſſit vel generari quo tempore globus duas tertias diametri ſuæ partes velocitate uniformiter continuata deſcribat, ut denſitas medii ad denſitatem globi, ſi modo globus & particulæ medii ſint ſumme elaſtica & vi maxima reflectendi polleant: quodque hæc vis ſit duplo minor ubi globus & particulæ medii ſunt infinite dura & vi reflectendi prorſus deſtituta. In mediis autem continuis qualia ſunt aqua, oleum calidum, & argentum vivum, in quibus globus non incidit immediate in omnes fluidi particulas reſiſtentiam generantes, ſed premit tantum proximas particulas & hæ premunt alias & hæ alias, reſiſtentia eſt adhuc duplo minor. Globus utique in hujuſmodi mediis fluidiſſimis reſiſtentiam patitur quæ eſt ad vim qua totus ejus motus vel tolli poſſit vel generari quo tempore, motu illo uniformiter continuato, partes octo tertias diametri ſuæ deſcribat, ut denſitas medii ad denſitatem globi. Id quod in ſequentibus conabimur oſtendere.

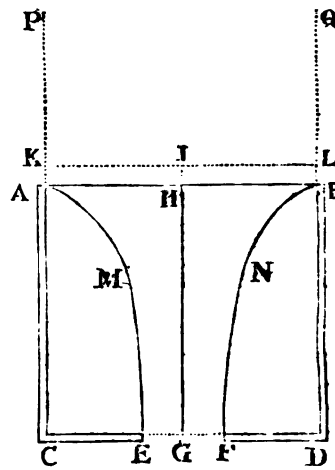
PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA VIII.

Aquæ de vaſe cylindrico per foramen in fundo factum effluentis definire motum.

Sit *ACDB* vas cylindricum, *AB* ejus orificium ſuperius, *CD* fundum horizonti parallelum, *EF* foramen circulare in medio fundi, *G* centrum foraminis, & *GH* axis cylindri horizonti perpendicularis. Et finge cylindrum glaciei *APQB* ejuſdem eſſe latitudinis

cum

cum cavitate vaſis, & axem eundem habere, & uniformi cum motu perpetuo deſcendere, & partes ejus quam primum attingunt ſuperficiem *AB* liqueſcere, & in aquam converſas gravitate ſua defluere in vas, & cataractam vel columnam aquæ *ABNFEM* cadendo formare, & per foramen *EF* tranſire, idemque adæquate implere. Ea vero ſit uniformis velocitas glaciei deſcendentis ut & aquæ contiguæ in circulo *AB*, quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *IH* acquirere poteſt; & jaceant *IH* & *HG* in directum, & per punctum *I* ducatur recta *KL* horizonti parallela & lateribus glaciei occurrens in *K* & *L*. Et velocitas aquæ effluentis per foramen *EF* ea erit quam aqua cadendo ab *I* & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *IG* acquirere poteſt. Ideoque per theoremata *Galilæi* erit *IG* ad *IH* in duplicata ratione velocitatis aquæ per foramen effluentis ad velocitatem aquæ in circulo *AB*, hoc eſt, in duplicata ratione circuli *AB* ad circulum *EF*; nam hi circuli ſunt reciproce ut velocitates aquarum quæ per ipſos, eodem tempore & æquali quantitate, adæquate tranſeunt. De velocitate aquæ horizontem verſus hic agitur. Et motus horizonti parallelus quo partes aquæ cadentis ad invicem accedunt, cum non oriatur a gravitate, nec motum horizonti perpendicularem a gravitate oriundum mutet, hic non conſideratur. Supponimus quidem quod partes aquæ aliquantulum cohærent, & per cohæſionem ſuam inter cadendum accedant ad invicem per motus horizonti parallelos, ut unicam tantum efforment cataractam & non in plures cataractas dividantur: ſed motum horizonti parallelum, a cohæſione illa oriundum, hic non conſideramus.



Caſ. 1. Concipe jam cavitatem totam in vaſe, in circuitu aquæ cadentis *ABNFEM*, glacie plenam eſſe, ut aqua per glaciem tanquam per infundibulum tranſeat. Et ſi aqua glaciem tantum non tangat, vel, quod perinde eſt, ſi tangat & per glaciem propter ſummam ejus polituram quam liberrime & ſine omni reſiſtentia labatur; hæc defluet per foramen *EF* eadem velocitate ac prius, & pondus totum columnæ aquæ *ABNFEM* impendetur in defluxum ejus gene-

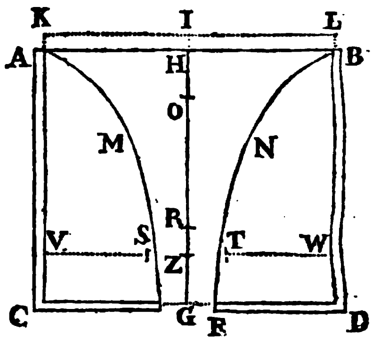
generandum uti prius, & fundum vaſis ſuſtinebit pondus glaciei columnam ambientis.

Liqueſcat jam glacies in vaſe; & effluxus aquæ, quoad velocitatem, idem manebit ac prius. Non minor erit, quia glacies in aquam reſoluta conabitur deſcendere: non major, quia glacies in aquam reſoluta non poteſt deſcendere niſi impediendo deſcenſum aquæ alterius deſcenſui ſuo æqualem. Eadem vis eandem aquæ effluentis velocitatem generare debet.

Sed foramen in fundo vaſis, propter obliquos motus particularum aquæ effluentis, paulo majus eſſe debet quam prius. Nam particulæ aquæ jam non tranſeunt omnes per foramen perpendiculariter; ſed a lateribus vaſis undique confluentes & in foramen convergentes, obliquis tranſeunt motibus; & curſum ſuum deorſum flectentes in venam aquæ exilientis conſpirant, quæ exilior eſt paulo infra foramen quam in ipſo foramine, exiſtente ejus diametro ad diametrum foraminis ut 5 ad 6, vel $5\frac{1}{2}$ ad $6\frac{1}{2}$ quam proxime, ſi modo diametros recte dimenſus ſum. Parabam utique laminam planam pertenuem in medio perforatam, exiſtente circularis foraminis diametro partium quinque octavarum digiti. Et ne vena aquæ exilientis cadendo accelleraretur & acceleratione redderetur anguſtior, hanc laminam non fundo ſed lateri vaſis affixi ſic, ut vena illa egrederetur ſecundum lineam horizonti parallelam. Dein ubi vas aqua plenum eſſet, aperui foramen ut aqua efflueret; & venæ diameter, ad diſtantiam quaſi dimidii digiti a foramine quam accuratiſſime menſurata, prodiit partium viginti & unius quadrageſimarum digiti. Erat igitur diameter foraminis hujus circularis ad diametrum venæ ut 25 ad 21 quamproxime. Aqua igitur tranſeundo per foramen, convergit undique, & poſtquam effluxit ex vaſe, tenuior redditur convergendo, & per attenuationem acceleratur donec ad diſtantiam ſemiſſis digiti a foramine pervenerit, & ad diſtantiam illam tenuior & celerior fit quam in ipſo foramine in ratione 25×25 ad 21×21 ſeu 17 ad 12 quamproxime, id eſt in ſubduplicata ratione binarii ad unitatem circiter. Per experimenta vero conſtat quod quantitas aquæ, quæ per foramen circulare in fundo vaſis factum, dato tempore effluit, ea ſit quæ cum velocitate prædicta, non per foramen illud, ſed per foramen circulare, cujus diameter eſt ad diametrum foraminis illius ut 21 ad 25, eodem tempore effluere debet. Ideo-

que aqua illa effluens velocitatem habet deorſum in ipſo foramine quam grave cadendo & caſu ſuo deſcribendo dimidiam altitudinem aquæ in vaſe ſtagnantis acquirere poteſt quamproxime. Sed poſtquam exivit ex vaſe, acceleratur convergendo donec ad diſtantiam a foramine diametro foraminis prope æqualem pervenerit, & velocitatem acquiſiverit majorem in ratione ſubduplicata binarii ad unitatem circiter; quam utique grave cadendo, & caſu ſuo deſcribendo totam altitudinem aquæ in vaſe ſtagnantis, acquirere poteſt quamproxime.

In ſequentibus igitur diameter venæ deſignetur per foramen illud minus quod vocavimus *EF*. Et plano foraminis *EF* parallelum duci intelligatur planum aliud ſuperius VW ad diſtantiam diametro foraminis æqualem circiter & foramine majore *ST* pertuſum; per quod utique vena cadat, quæ adæquate impleat foramen inferius *EF*, atque ideo cujus diameter ſit ad diametrum foraminis inferioris ut 25 ad 21 circiter. Sic enim vena per foramen inferius perpendiculariter tranſibit; & quantitas aquæ effluentis, pro magnitudine foraminis hujus, ea erit quam ſolutio problematis poſtulat quamproxime. Spatium vero, quod planis duobus & vena cadente clauditur, pro fundo vaſis haberi poteſt. Sed ut ſolutio problematis ſimplicior ſit & magis mathematica, præſtat adhibere planum ſolum inferius pro fundo vaſis, & fingere quod aqua quæ per glaciem ceu per infundibulum defluebat, & e vaſe per foramen *EF* in plano inferiore factum egrediebatur, motum ſuum perpetuo ſervet, & glacies quietem ſuam. In ſequentibus igitur ſit *ST* diameter foraminis circularis centro *Z* deſcripti per quod cataracta effluit ex vaſe ubi aqua tota in vaſe fluida eſt. Et ſit *EF* diameter foraminis per quod cataracta cadendo adæquate tranſit, ſive aqua exeat ex vaſe per foramen illud ſuperius *ST*, ſive cadat per medium glaciei in vaſe tanquam per infundibulum. Et ſit diameter foraminis ſuperioris *ST* ad diametrum inferioris *EF* ut 25 ad 21 circiter, & diſtantia perpendicularis inter plana foraminum æqualis ſit diametro foraminis minoris *EF*. Et velocitas aquæ e vaſe per foramen *ST* exeuntis ea erit in ipſo



foramine

foramine deorſum quam corpus cadendo a dimidio altitudinis *IZ* acquirere poteſt: velocitas autem cataractæ utriuſque cadentis ea erit in foramine *EF*, quam corpus cadendo ab altitudine tota *IG* acquiret.

Caſ. 2. Si foramen *EF* non ſit in medio fundi vaſis, ſed fundum alibi perforetur: aqua effluet eadem cum velocitate ac prius, ſi modo eadem ſit foraminis magnitudo. Nam grave majori quidem tempore deſcendit ad eandem profunditatem per lineam obliquam quam per lineam perpendicularem, ſed deſcendendo eandem velocitatem acquirit in utroque caſu, ut *Galilæus* demonſtravit.

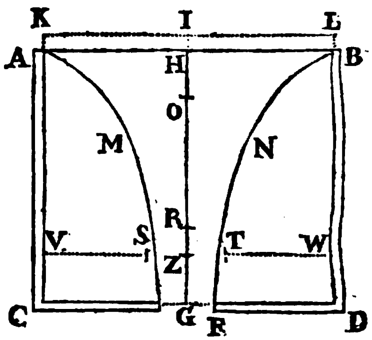
Caſ. 3. Eadem eſt aquæ velocitas effluentis per foramen in latere vaſis. Nam ſi foramen parvum ſit, ut intervallum inter ſuperficies *AB* & *KL* quoad ſenſum evaneſcat, & vena aquæ horizontaliter exilientis figuram parabolicam efformet: ex latere recto hujus parabolæ colligetur, quod velocitas aquæ effluentis ea ſit quam corpus ab aquæ in vaſe ſtagnantis altitudine *HG* vel *IG* cadendo acquirere potuiſſet. Facto utique experimento inveni quod, ſi altitudo aquæ ſtagnantis ſupra foramen eſſet viginti digitorum & altitudo foraminis ſupra planum horizonti parallelum eſſet quoque viginti digitorum, vena aquæ proſilientis incideret in planum illud ad diſtantiam digitorum 37 circiter a perpendiculo quod in planum illud a foramine demittebatur captam. Nam ſine reſiſtentia, vena incidere debuiſſet in planum illud ad diſtantiam digitorum 40, exiſtente venæ parabolicæ latere recto digitorum 80.

Caſ. 4. Quinetiam aqua effluens, ſi ſurſum feratur, eadem egreditur cum velocitate. Aſcendit enim aquæ exilientis vena parva motu perpendiculari ad aquæ in vaſe ſtagnantis altitudinem *GH* vel *GI*, niſi quatenus aſcenſus ejus ab aeris reſiſtentia aliquantulum impediatur; ac proinde ea effluit cum velocitate quam ab altitudine illa cadendo acquirere potuiſſet. Aquæ ſtagnantis particula unaquæque undique premitur æqualiter (per prop. XIX. lib. 2.) & preſſioni cedendo æquali impetu in omnes partes fertur, ſive deſcendat per foramen in fundo vaſis, ſive horizontaliter effluat per foramen in ejus latere, ſive egrediatur in canalem & inde aſcendat per foramen parvum in ſuperiore canalis parte factum. Et velocitatem qua aqua effluit eam eſſe, quam in hac propoſitione aſſignavimus,

De Motu Corporum

que aqua illa effluens velocitatem habet deorſum in ipſo foramine quam grave cadendo & caſu ſuo deſcribendo dimidiam altitudinem aquæ in vaſe ſtagnantis acquirere poteſt quamproxime. Sed poſtquam exivit ex vaſe, acceleratur convergendo donec ad diſtantiam a foramine diametro foraminis prope æqualem pervenerit, & velocitatem acquiſiverit majorem in ratione ſubduplicata binarii ad unitatem circiter; quam utique grave cadendo, & caſu ſuo deſcribendo totam altitudinem aquæ in vaſe ſtagnantis, acquirere poteſt quamproxime.

In ſequentibus igitur diameter venæ deſignetur per foramen illud minus quod vocavimus *EF*. Et plano foraminis *EF* parallelum duci intelligatur planum aliud ſuperius VW ad diſtantiam diametro foraminis æqualem circiter & foramine majore *ST* pertuſum; per quod utique vena cadat, quæ adæquate impleat foramen inferius *EF*, atque ideo cujus diameter ſit ad diametrum foraminis inferioris ut 25 ad 21 circiter. Sic enim vena per foramen inferius perpendiculariter tranſibit; & quantitas aquæ effluentis, pro magnitudine foraminis hujus, ea erit quam ſolutio problematis poſtulat quamproxime. Spatium vero, quod planis duobus & vena cadente clauditur, pro fundo vaſis haberi poteſt. Sed ut ſolutio problematis ſimplicior ſit & magis mathematica, præſtat adhibere planum ſolum inferius pro fundo vaſis, & fingere quod aqua quæ per glaciem ceu per infundibulum defluebat, & e vaſe per foramen *EF* in plano inferiore factum egrediebatur, motum ſuum perpetuo ſervet, & glacies quietem ſuam. In ſequentibus igitur ſit *ST* diameter foraminis circularis centro *Z* deſcripti per quod cataracta effluit ex vaſe ubi aqua tota in vaſe fluida eſt. Et ſit *EF* diameter foraminis per quod cataracta cadendo adæquate tranſit, ſive aqua exeat ex vaſe per foramen illud ſuperius *ST*, ſive cadat per medium glaciei in vaſe tanquam per infundibulum. Et ſit diameter foraminis ſuperioris *ST* ad diametrum inferioris *EF* ut 25 ad 21 circiter, & diſtantia perpendicularis inter plana foraminum æqualis ſit diametro foraminis minoris *EF*. Et velocitas aquæ e vaſe per foramen *ST* exeuntis ea erit in ipſo



foramine

foramine deorſum quam corpus cadendo a dimidio altitudinis *IZ* acquirere poteſt: velocitas autem cataractæ utriuſque cadentis ea erit in foramine *EF*, quam corpus cadendo ab altitudine tota *IG* acquiret.

Caſ. 2. Si foramen *EF* non ſit in medio fundi vaſis, ſed fundum alibi perforetur: aqua effluet eadem cum velocitate ac prius, ſi modo eadem ſit foraminis magnitudo. Nam grave majori quidem tempore deſcendit ad eandem profunditatem per lineam obliquam quam per lineam perpendicularem, ſed deſcendendo eandem velocitatem acquirit in utroque caſu, ut *Galilæus* demonſtravit.

Caſ. 3. Eadem eſt aquæ velocitas effluentis per foramen in latere vaſis. Nam ſi foramen parvum ſit, ut intervallum inter ſuperficies *AB* & *KL* quoad ſenſum evaneſcat, & vena aquæ horizontaliter exilientis figuram parabolicam efformet: ex latere recto hujus parabolæ colligetur, quod velocitas aquæ effluentis ea ſit quam corpus ab aquæ in vaſe ſtagnantis altitudine *HG* vel *IG* cadendo acquirere potuiſſet. Facto utique experimento inveni quod, ſi altitudo aquæ ſtagnantis ſupra foramen eſſet viginti digitorum & altitudo foraminis ſupra planum horizonti parallelum eſſet quoque viginti digitorum, vena aquæ proſilientis incideret in planum illud ad diſtantiam digitorum 37 circiter a perpendiculo quod in planum illud a foramine demittebatur captam. Nam ſine reſiſtentia, vena incidere debuiſſet in planum illud ad diſtantiam digitorum 40, exiſtente venæ parabolicæ latere recto digitorum 80.

Caſ. 4. Quinetiam aqua effluens, ſi ſurſum feratur, eadem egreditur cum velocitate. Aſcendit enim aquæ exilientis vena parva motu perpendiculari ad aquæ in vaſe ſtagnantis altitudinem *GH* vel *GI*, niſi quatenus aſcenſus ejus ab aeris reſiſtentia aliquantulum impediatur; ac proinde ea effluit cum velocitate quam ab altitudine illa cadendo acquirere potuiſſet. Aquæ ſtagnantis particula unaquæque undique premitur æqualiter (per prop. XIX. lib. 2.) & preſſioni cedendo æquali impetu in omnes partes fertur, ſive deſcendat per foramen in fundo vaſis, ſive horizontaliter effluat per foramen in ejus latere, ſive egrediatur in canalem & inde aſcendat per foramen parvum in ſuperiore canalis parte factum. Et velocitatem qua aqua effluit eam eſſe, quam in hac propoſitione aſſignavimus,

mus, non ſolum ratione colligitur, ſed etiam per experimenta notiſſima jam deſcripta manifeſtum eſt.

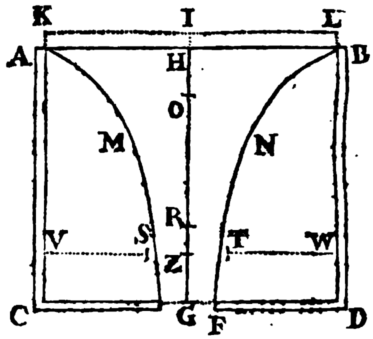
Caſ. 5. Eadem eſt aquæ effluentis velocitas ſive figura foraminis ſit circularis ſive quadrata vel triangularis aut alia quæcunque circulari æqualis. Nam velocitas aquæ effluentis non pendet a figura foraminis ſed oritur ab ejus altitudine infra planum *KL*.

Caſ. 6. Si vaſis *ABDC* pars inferior in aquam ſtagnantem immergatur, & altitudo aquæ ſtagnantis ſupra fundum vaſis ſit *GR*: velocitas quacum aqua quæ in vaſe eſt, effluet per foramen *EF* in aquam ſtagnantem, ea erit quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *IR* acquirere poteſt. Nam pondus aquæ omnis in vaſe quæ inferior eſt ſuperficie aquæ ſtagnantis, ſuſtinebitur in æquilibrio per pondus aquæ ſtagnantis, ideoque motum aquæ deſcendentis in vaſe minime accelerabit. Patebit etiam & hic caſus per experimenta, menſurando ſcilicet tempora quibus aqua effluit.

Corol. 1. Hinc ſi aquæ altitudo *CA* producatur ad *K*, ut ſit *AK* ad *CK* in duplicata ratione areæ foraminis in quavis fundi parte facti, ad aream circuli *AB*: velocitas aquæ effluentis æqualis erit velocitati quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *KC* acquirere poteſt.

Corol. 2. Et vis, qua totus aquæ exilientis motus generari poteſt, æqualis eſt ponderi cylindricæ columnæ aquæ, cujus baſis eſt foramen *EF*, & altitudo 2*GI* vel 2*CK*. Nam aqua exiliens, quo tempore hanc columnam æquat, pondere ſuo ab altitudine *GI* cadendo velocitatem ſuam, qua exilit, acquirere poteſt.

Corol. 3. Pondus aquæ totius in vaſe *ABDC* eſt ad ponderis partem, quæ in defluxum aquæ impenditur, ut ſumma circulorum *AB* & *EF* ad duplum circulum *EF*. Sit enim *IO* media proportionalis inter *IH* & *IG*; & aqua per foramen *EF* egrediens, quo tempore gutta cadendo ab *I* deſcribere poſſet altitudinem *IG*, æqualis erit cylindro cujus baſis eſt circulus *EF* & altitudo eſt 2*IG*, id eſt, cylindro cujus baſis eſt circulus *AB* & altitudo eſt 2*IO*, nam circulus *EF* eſt ad circulum *AB* in ſubduplicata ratione altitudinis *IH* ad altitudinem



titudinem:

titudinem *IG*, hoc eſt, in ſimplici ratione mediæ proportionalis *IO* ad altitudinem *IG*: & quo tempore gutta cadendo ab *I* deſcribere poteſt altitudinem *IH*, aqua egrediens æqualis erit cylindro cujus baſis eſt circulus *AB* & altitudo eſt 2 *IH*: & quo tempore gutta cadendo ab *I* per *H* ad *G* deſcribit altitudinum differentiam *HG*, aqua egrediens, id eſt, aqua tota in ſolido *ABNFEM* æqualis erit differentiæ cylindrorum, id eſt, cylindro cujus baſis eſt *AB* & altitudo 2*HO*. Et propterea aqua tota in vaſe *ABDC* eſt ad aquam totam cadentem in ſolido *ABNFEM* ut *HG* ad 2*HO*, id eſt, ut *HO*+*OG* ad 2*HO*, ſeu *IH*+*IO* ad 2 *IH*. Sed pondus aquæ totius in ſolido *ABNFEM* in aquæ defluxum impenditur: ac proinde pondus aquæ totius in vaſe eſt ad ponderis partem quæ in defluxum aquæ impenditur, ut *IH*+*IO* ad 2 *IH*, atque ideo ut ſumma circulorum *EF* & *AB* ad duplum circulum *EF*.

Liber Secundus.

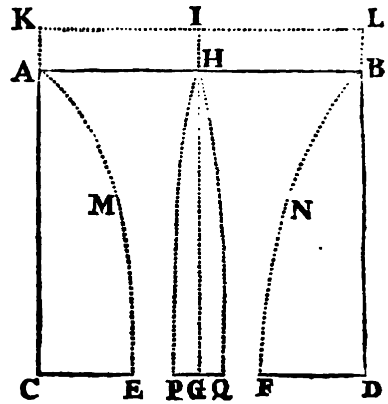
Corol. 4. Et hinc pondus aquæ totius in vaſe *ABDC* eſt ad ponderis partem alteram quam fundum vaſis ſuſtinet, ut ſumma circulorum *AB* & *EF* ad differentiam eorundem circulorum.

Corol. 5. Et ponderis pars, quam fundum vaſis ſuſtinet, eſt ad ponderis partem alteram, quæ in defluxum aquæ impenditur, ut differentia circulorum *AB* & *EF* ad duplum circulum minorem *EF*, ſive ut area fundi ad duplum foramen.

Corol. 6 Ponderis autem pars, qua ſola fundum urgetur, eſt ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus *AB* ad ſummam circulorum *AB* & *EF*, ſive ut circulus *AB* ad exceſſum dupli circuli *AB* ſupra fundum. Nam ponderis pars, qua ſola fundum urgetur, eſt ad pondus aquæ totius in vaſe, ut differentia circulorum *AB* & *EF* ad ſummam eorundem circulorum, per cor. 4.: & pondus aquæ totius in vaſe eſt ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus *AB* ad differentiam circulorum *AB* & *EF*. Itaque ex æquo perturbate, ponderis pars, qua ſola fundum urgetur, eſt ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus *AB* ad ſummam circulorum *AB* & *EF* vel exceſſum dupli circuli *AB* ſupra fundum.

Corol. 7. Si in medio foraminis *EF* locetur circellus *PQ* centro *G* deſcriptus & horizonti parallelus: pondus aquæ quam circellus ille ſuſtinet, majus eſt pondere tertiæ partis cylindri aquæ cujus baſis

ſis eſt circellus ille & altitudo eſt *GH*. Sit enim *ABNFEM* cataracta vel columna aquæ cadentis axem habens *GH* ut ſupra, & congelari intelligatur aqua omnis in vaſe, tam in circuitu cataractæ quam ſupra circellum, cujus fluiditas ad promptiſſimum & celerrimum aquæ deſcenſum non requiritur. Et ſit *PHQ* columna aquæ ſupra circellum congelata, verticem habens *H* & altitudinem *GH*. Et finge cataractam hancce pondere ſuo toto cadere, & non incumbere in *PHQ* nec eandem premere, ſed libere & ſine frictione præterlabi, niſi forte in ipſo glaciei vertice quo cataracta ipſo cadendi initio incipiat eſſe cava.



Et quemadmodum aqua in circuitu cataractæ congelata *AMEC*, *BNFD* convexa eſt in ſuperficie interna *AME*, *BNF* verſus cataractam cadentem, ſic etiam hæc columna *PHQ* convexa erit verſus cataractam, & propterea major cono cujus baſis eſt circellus ille *PQ* & altitudo *GH*, id eſt, major tertia parte cylindri eadem baſe & altitudine deſcripti. Suſtinet autem circellus ille pondus hujus columnæ, id eſt, pondus quod pondere coni ſeu tertiæ partis cylindri illius majus eſt.

Corol. 8. Pondus aquæ quam circellus valde parvus *PQ* ſuſtinet, minor eſſe videtur pondere duarum tertiarum partium cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt *HG*. Nam ſtantibus jam poſitis, deſcribi intelligatur dimidium ſphæroidis cujus baſis eſt circellus ille & ſemiaxis ſive altitudo eſt *HG*. Et hæc figura æqualis erit duabus tertiis partibus cylindri illius & comprehendet columnam aquæ congelatæ *PHQ* cujus pondus circellus ille ſuſtinet. Nam ut motus aquæ ſit maxime directus, columnæ illius ſuperficies externa concurret cum baſi *PQ* in angulo nonnihil acuto, propterea quod aqua cadendo perpetuo acceleratur & propter accelerationem fit tenuior; & cum angulus ille ſit recto minor, hæc columna ad inferiores ejus partes jacebit intra dimidium ſphæroidis. Eadem vero ſurſum acuta erit ſeu cuſpidata, ne horizontalis motus aquæ ad verticem ſphæroidis ſit infinite velocior quam ejus motus horizontem verſus. Et quo minor eſt circellus *PQ* eo acutior

acutior erit vertex columnæ; & circello in infinitum diminuto, angulus *PHQ* in infinitum diminuetur, & propterea columna jacebit intra dimidium ſphæroidis. Eſt igitur columna illa minor dimidio ſphæroidis, ſeu duabus tertiis partibus cylindri cujus baſis eſt circellus ille & altitudo *GH*. Suſtinet autem circellus vim aquæ ponderi hujus columnæ æqualem, cum pondus aquæ ambientis in defluxum ejus impendatur.

Corol. 9. Pondus aquæ quam circellus valde parvus *PQ* ſuſtinet, æquale eſt ponderi cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt $\frac{1}{2}GH$ quamproxime. Nam pondus hocce eſt medium arithmeticum inter pondera coni & hemiſphæroidis prædictæ. At ſi circellus ille non ſit valde parvus, ſed augeatur donec æquet foramen *EF*; hic ſuſtinebit pondus aquæ totius ſibi perpendiculariter imminentis, id eſt, pondus cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt *GH*.

Corol. 10. Et (quantum ſentio) pondus quod circellus ſuſtinet, eſt ſemper ad pondus cylindri aquæ, cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt $\frac{1}{2}GH$, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$, ſive ut circulus *EF* ad exceſſum circuli hujus ſupra ſemiſſem circelli *PQ* quamproxime.

LEMMA IV.

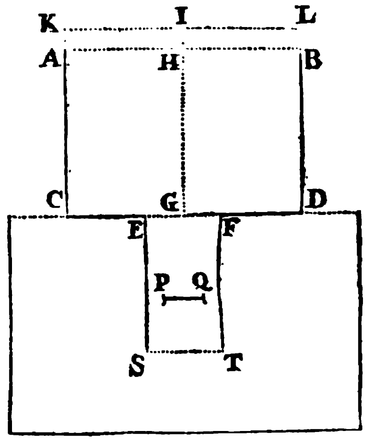
Cylindri, qui ſecundum longitudinem ſuam uniformiter progreditur, reſiſtentia ex aucta vel diminuta ejus longitudine non mutatur; ideoque eadem eſt cum reſiſtentia circuli eadem diametro deſcripti & eadem velocitate ſecundum lineam rectam plano ipſius perpendicularem progredientis.

Nam latera cylindri motui ejus minime opponuntur: & cylindrus, longitudine ejus in infinitum diminuta, in circulum vertitur.

PROPO-

PROPOSITIO XXXVII. THEOREMA XXIX.

Cylindri, qui in fluido compreſſo infinito & non elaſtico ſecundum longitudinem ſuam uniformiter progreditur, reſiſtentia, quæ oritur a magnitudine ſectionis tranverſæ, eſt ad vim qua totus ejus motus, interea dum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, vel tolli poſſit vel generari, ut denſitas medii ad denſitatem cylindri quamproxime.



Nam ſi vas *ABDC* fundo ſuo *CD* ſuperficiem aquæ ſtagnantis tangat, & aqua ex hoc vaſe per canalem cylindricum *EFTS* horizonti perpendicularem in aquam ſtagnantem effluat, locetur autem circellus *PQ* horizonti parallelus ubivis in medio canalis, & producatur *CA* ad *K*, ut ſit *AK* ad *CK* in duplicata ratione quam habet exceſſus orificii canalis *EF* ſupra circellum *PQ* ad circulum *AB*: manifeſtum eſt (per caſ. 5. caſ. 6. & cor. 1. prop. xxxvi.) quod velocitas aquæ tranſeuntis per ſpatium annulare inter circellum & latera vaſis, ea erit quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *KC* vel *IG* acquirere poteſt.

Et (per corol. x. prop. xxxvi.) ſi vaſis latitudo ſit infinita, ut lineola *HI* evaneſcat & altitudines *IG*, *HG* æquentur: vis aquæ defluentis in circellum erit ad pondus cylindri cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt $\frac{1}{2}IG$, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$ quam proxime. Nam vis aquæ, uniformi motu defluentis per totum canalem, eadem erit in circellum *PQ* in quacunque canalis parte locatum.

Claudantur jam canalis orificia *EF*, *ST*, & aſcendat circellus in fluido undique compreſſo & aſcenſu ſuo cogat aquam ſuperiorem deſcendere per ſpatium annulare inter circellum & latera canalis: & velocitas circelli aſcendentis erit ad velocitatem aquæ deſcendentis ut differentia circulorum *EF* & *PQ* ad circulum *PQ*, & velocitas circelli aſcendentis ad ſummam velocitatum, hoc eſt, ad veloci-

velocitatem relativam aquæ deſcendentis qua præterfluit circellum aſcendentem, ut differentia circulorum *EF* & *PQ* ad circulum *EF*, ſive ut *EFq*—*PQq* ad *EFq*. Sit illa velocitas relativa æqualis velocitati, qua ſupra oſtenſum eſt aquam tranſire per idem ſpatium annulare dum circellus interea immotus manet, id eſt, velocitati quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *IG* acquirere poteſt: & vis aquæ in circellum aſcendentem eadem erit ac prius (per legum corol. v.) id eſt, reſiſtentia circelli aſcendentis erit ad pondus cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt $\frac{1}{2}$*IG*, ut *EFq* ad *EFq*—$\frac{1}{2}$*PQq* quamproxime. Velocitas autem circelli erit ad velocitatem, quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *IG* acquirit, ut *EFq* — *PQq* ad *EFq*.

Augeatur amplitudo canalis in infinitum: & rationes illæ inter *EFq*—*PQq* & *EFq*, interque *EFq* & *EFq*—$\frac{1}{2}$*PQq* accedent ultimo ad rationes æqualitatis. Et propterea velocitas circelli ea nunc erit quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *IG* acquirere poteſt, reſiſtentia vero ejus æqualis evadet ponderi cylindri cujus baſis eſt circellus ille & altitudo dimidium eſt altitudinis *IG*, a qua cylindrus cadere debet ut velocitatem circelli aſcendentis acquirat; & hac velocitate cylindrus, tempore cadendi, quadruplum longitudinis ſuæ deſcribet. Reſiſtentia autem cylindri, hac velocitate ſecundum longitudinem ſuam progredientis, eadem eſt cum reſiſtentia circelli (per lemma iv.) ideoque æqualis eſt vi qua motus ejus, interea dum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, generari poteſt quamproxime.

Si longitudo cylindri augeatur vel minuatur: motus ejus ut & tempus, quo quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, augebitur vel minuetur in eadem ratione; ideoque vis illa, qua motus auctus vel diminutus, tempore pariter aucto vel diminuto, generari vel tolli poſſit, non mutabitur; ac proinde etiamnum æqualis eſt reſiſtentiæ cylindri, nam & hæc quoque immutata manet per lemma iv.

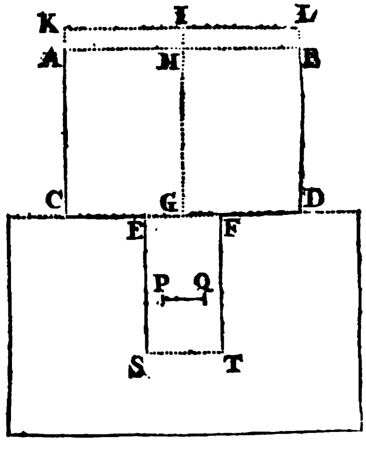
Si denſitas cylindri augeatur vel minuatur: motus ejus ut & vis qua motus eodem tempore generari vel tolli poteſt, in eadem ratione augebitur vel minuetur. Reſiſtentia itaque cylindri cujuſcunque erit ad vim qua totus ejus motus, interea dum quadruplum

 longitu-

longitudinis ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel tolli, ut denſitas medii ad denſitatem cylindri quamproxime. *Q. E. D.*

Fluidum autem comprimi debet ut ſit continuum, continuum vero eſſe debet & non elaſticum ut preſſio omnis, quæ ab ejus compreſſione oritur, propagetur in inſtanti, & in omnes moti corporis partes æqualiter agendo reſiſtentiam non mutet. Preſſio utique, quæ a motu corporis oritur, impenditur in motum partium fluidi generandum & reſiſtentiam creat. Preſſio autem quæ oritur a compreſſione fluidi, utcunque fortis ſit, ſi propagetur in inſtanti, nullum generat motum in partibus fluidi continui, nullam omnino inducit motus mutationem; ideoque reſiſtentiam nec auget nec minuit. Certe actio fluidi, quæ ab ejus compreſſione oritur, fortior eſſe non poteſt in partes poſticas corporis moti quam in ejus partes anticas, ideoque reſiſtentiam in hac propoſitione deſcriptam minuere non poteſt: & fortior non erit in partes anticas quam in poſticas, ſi modo propagatio ejus infinite velocior ſit quam motus corporis preſſi. Infinite autem velocior erit & propagabitur in inſtanti, ſi modo fluidum ſit continuum & non elaſticum.

Corol. 1. Cylindrorum, qui ſecundum longitudines ſuas in mediis continuis infinitis uniformiter progrediuntur, reſiſtentiæ ſunt in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velocitatum & duplicata ratione diametrorum & ratione denſitatis mediorum.



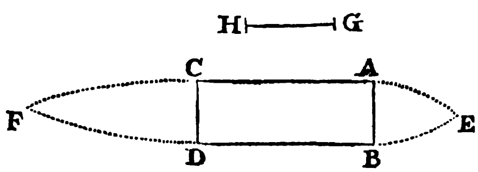
Corol. 2. Si amplitudo canalis non augeatur in infinitum, ſed cylindrus in medio quieſcente incluſo ſecundum longitudinem ſuam progrediatur, & interea axis ejus cum axe canalis coincidat: reſiſtentia ejus erit ad vim qua totus ejus motus, quo tempore quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$ ſemel, & ratione EFq ad $EFq - PQq$ bis, & ratione denſitatis medii ad denſitatem cylindri.

Corol. 3. Iiſdem poſitis, & quod longitudo L ſit ad quadruplum longitudinis cylindri in ratione quæ componitur ex ratione $EFq - \frac{1}{2}PQq$

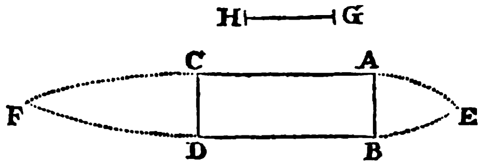
$\frac{1}{2}PQq$ ad EFq ſemel, & ratione $EFq - PQq$ ad EFq bis: reſiſtentia cylindri erit ad vim qua totus ejus motus, interea dum longitudinem L deſcribit, vel tolli poſſit vel generari, ut denſitas medii ad denſitatem cylindri.

Scholium.

In hac propoſitione reſiſtentiam inveſtigavimus quæ oritur a ſola magnitudine tranſverſæ ſectionis cylindri, neglecta reſiſtentiæ parte quæ ab obliquitate motuum oriri poſſit. Nam quemadmodum in caſu primo propoſitionis XXXVI. obliquitas motuum, quibus partes aquæ in vaſe, undique convergebant in foramen EF, impedivit effluxum aquæ illius per foramen: ſic in hac propoſitione, obliquitas motuum, quibus partes aquæ ab anteriore cylindri termino preſſæ, cedunt preſſioni & undique divergunt, retardat eorum tranſitum per loca in circuitu termini illius antecedentis verſus poſteriores partes cylindri, efficitque ut fluidum ad majorem diſtantiam commoveatur & reſiſtentiam auget, idque in ea fere ratione qua effluxum aquæ e vaſe diminuit, id eſt, in ratione duplicata 25 ad 21 circiter. Et quemadmodum, in propoſitionis illius caſu primo, effecimus ut partes aquæ perpendiculariter & maxima copia tranſirent per foramen EF, ponendo quod aqua omnis in vaſe quæ in circuitu cataractæ congelata fuerat, & cujus motus obliquus erat & inutilis, maneret ſine motu: ſic in hac propoſitione, ut obliquitas motuum tollatur, & partes aquæ motu maxime directo & breviſſimo cedentes facillimum præbeant tranſitum cylindro, & ſola maneat reſiſtentia, quæ oritur a magnitudine ſectionis tranſverſæ, quæque diminui non poteſt niſi diminuendo diametrum cylindri, concipiendum eſt quod partes fluidi, quarum motus ſunt obliqui & inutiles & reſiſtentiam creant, quieſcant inter ſe ad utrumque cylindri terminum, & cohæreant & cylindro jungantur. Sit $ABCD$ rectangulum, & ſint AE & BE arcus duo parabolici axe AB deſcripti, latere autem recto quod ſit ad ſpatium HG, deſcribendum a cylindro cadente dum velocitatem ſuam acquirit, ut HG ad $\frac{1}{2}AB$. Sint etiam CF & DF arcus alii duo parabolici, axe CD & latere



recto quod ſit prioris lateris recti quadruplum deſcripti; & convolutione figuræ circum axem *EF* generetur ſolidum cujus media pars *ABDC* ſit cylindrus de quo agimus, & partes extremæ *ABE* & *CDF* contineant partes fluidi inter ſe quieſcentes & in corpora duo rigida concretas, quæ cylindro utrinque tanquam caput & cauda adhæreant. Et ſolidi *EACFDB*, ſecundum longitudinem axis ſui *FE* in partes verſus *E* progredientis, reſiſtentia ea erit quamproxime quam in hac propoſitione deſcripſimus, id eſt, quæ rationem illam habet ad vim qua totus cylindri motus, interea dum longitudo 4*AC* motu illo uniformiter continuato deſcribatur, vel tolli poſſit vel generari, quam denſitas fluidi habet ad denſitatem cylindri quamproxime. Et hac vi reſiſtentia minor eſſe non poteſt quam in ratione 2 ad 3, per corol. 7. prop. XXXVI.



LEMMA V.

Si cylindrus, ſphæra & ſphærois, quorum latitudines ſunt æquales, in medio canalis cylindrici ita locentur ſucceſſive ut eorum axes cum axe canalis coincidant: hæc corpora fluxum aquæ per canalem æqualiter impedient.

Nam ſpatia inter canalem & cylindrum, ſphæram, & ſphæroidem per quæ aqua tranſit, ſunt æqualia: & aqua per æqualia ſpatia æqualiter tranſit.

Hæc ita ſe habent ex hypotheſi, quod aqua omnis ſupra cylindrum ſphæram vel ſphæroidem congelatur, cujus fluiditas ad celerrimum aquæ tranſitum non requiritur, ut in corol. VII. prop. XXXVI. explicui.

LEMMA

LEMMA VI.

Iiſdem poſitis, corpora prædicta æqualiter urgentur ab aqua per canalem fluente.

Patet per lemma v. & motus legem tertiam. Aqua utique & corpora in ſe mutuo æqualiter agunt.

LEMMA VII.

Si aqua quieſcat in canali, & hæc corpora in partes contrarias æquali velocitate per canalem ferantur: æquales erunt eorum reſiſtentiæ inter ſe.

Conſtat ex lemmate ſuperiore, nam motus relativi iidem inter ſe manent.

Scholium.

Eadem eſt ratio corporum omnium convexorum & rotundorum, quorum axes cum axe canalis coincidunt. Differentia aliqua ex majore vel minore frictione oriri poteſt; ſed in his lemmatis corpora eſſe politiſſima ſupponimus, & medii tenacitatem & frictionem eſſe nullam, & quod partes fluidi, quæ motibus ſuis obliquis & ſuperfluis fluxum aquæ per canalem perturbare, impedire, & retardare poſſunt, quieſcant inter ſe tanquam gelu conſtrictæ, & corporibus ad ipſorum partes anticas & poſticas adhæreant, perinde ut in ſcholio propoſitionis præcedentis expoſui. Agitur enim in ſequentibus de reſiſtentia omnium minima quam corpora rotunda, datis maximis ſectionibus tranſverſis deſcripta, habere poſſunt.

Corpora fluidis innatantia, ubi moventur in directum, efficiunt ut fluidum ad partem anticam aſcendat, ad poſticam ſubſidat, præſertim ſi figura ſint obtuſa; & inde reſiſtentiam paulo majorem ſentiunt quam ſi capite & cauda ſint acutis. Et corpora in fluidis elaſticis mota, ſi ante & poſt obtuſa ſint, fluidum paulo magis condenſant ad anticam partem & paulo magis relaxant ad poſticam; & inde reſiſtentiam paulo majorem ſentiunt quam ſi capite & cauda ſint acutis. Sed nos in his lemmatis & propoſitionibus non agimus

mus de fluidis elaſticis, ſed de non elaſticis; non de inſidentibus fluido, ſed de alte immerſis. Et ubi reſiſtentia corporum in fluidis non elaſticis innoteſcit, augenda erit hæc reſiſtentia aliquantulum tam in fluidis elaſticis, qualis eſt aer, quam in ſuperficiebus fluidorum ſtagnantium, qualia ſunt maria & paludes.

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XXX.

Globi, in fluido compreſſo infinito & non elaſtico uniformiter progredientis, reſiſtentia eſt ad vim qua totus ejus motus, quo tempore octo tertias partes diametri ſuæ deſcribit, vel tolli poſſit vel generari, ut denſitas fluidi ad denſitatem globi quamproxime.

Nam globus eſt ad cylindrum circumſcriptum ut duo ad tria; & propterea vis illa, quæ tollere poſſit motum omnem cylindri interea dum cylindrus deſcribat longitudinem quatuor diametrorum, globi motum omnem tollet interea dum globus deſcribat duas tertias partes hujus longitudinis, id eſt, octo tertias partes diametri propriæ. Reſiſtentia autem cylindri eſt ad hanc vim quamproxime ut denſitas fluidi ad denſitatem cylindri vel globi per prop. XXXVII. & reſiſtentia globi æqualis eſt reſiſtentiæ cylindri per lem. V, VI, VII. *Q. E. D.*

Corol. 1. Globorum, in mediis compreſſis infinitis, reſiſtentiæ ſunt in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velocitatis, & duplicata ratione diametri, & ratione denſitatis mediorum.

Corol. 2. Velocitas maxima quacum globus, vi ponderis ſui comparativi, in fluido reſiſtente poteſt deſcendere, ea eſt quam acquirere poteſt globus idem, eodem pondere, ſine reſiſtentia cadendo & caſu ſuo deſcribendo ſpatium quod ſit ad quatuor tertias partes diametri ſuæ ut denſitas globi ad denſitatem fluidi. Nam globus tempore caſus ſui, cum velocitate cadendo acquiſita, deſcribet ſpatium quod erit ad octo tertias diametri ſuæ, ut denſitas globi ad denſitatem fluidi; & vis ponderis motum hunc generans, erit ad vim quæ motum eundem generare poſſit, quo tempore globus octo tertias diametri ſuæ eadem velocitate deſcribit, ut denſitas fluidi

fluidi ad denſitatem globi: ideoque per hanc propoſitionem, vis ponderis æqualis erit vi reſiſtentiæ, & propterea globum accelerare non poteſt.

Corol 3. Data & denſitate globi & velocitate ejus ſub initio motus, ut & denſitate fluidi compreſſi quieſcentis in qua globus movetur; datur ad omne tempus & velocitas globi & ejus reſiſtentia & ſpatium ab eo deſcriptum, per corol. VII. prop. XXXV.

Corol. 4. Globus in fluido compreſſo quieſcente ejuſdem ſecum denſitatis movendo, dimidiam motus ſui partem prius amittet quam longitudinem duarum ipſius diametrorum deſcripſerit, per idem corol. VII.

PROPOSITIO XXXIX. THEOREMA XXXI.

Globi, per fluidum in canali cylindrico clauſum & compreſſum uniformiter progredientis, reſiſtentia eſt ad vim, qua totus ejus motus, interea dum octo tertias partes diametri ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione orificii canalis ad exceſſum hujus orificii ſupra dimidium circuli maximi globi, & ratione duplicata orificii canalis ad exceſſum hujus orificii ſupra circulum maximum globi, & ratione denſitatis fluidi ad denſitatem globi quamproxime.

Patet per corol. 2. prop. XXXVII. procedit vero demonſtratio quemadmodum in propoſitione præcedente.

Scholium.

In propoſitionibus duabus noviſſimis (perinde ut in lem. V.) ſuppono quod aqua omnis congelatur quæ globum præcedit, & cujus fluiditas auget reſiſtentiam globi. Si aqua illa omnis liqueſcat, augebitur reſiſtentia aliquantulum. Sed augmentum illud in his propoſitionibus parvum erit & negligi poteſt, propterea quod convexa ſuperficies globi totum fere officium glaciei faciat.

PROPO-

PROPOSITIO XL. PROBLEMA IX.

Globi, in medio fluidiſſimo compreſſo progredientis, invenire reſiſtentiam per phænomena.

Sit A pondus globi in vacuo, B pondus ejus in medio reſiſtente, D diameter globi, F ſpatium quod ſit ad $\frac{4}{3}$ D ut denſitas globi ad denſitatem medii, id eſt, ut A ad A—B, G tempus quo globus pondere B ſine reſiſtentia cadendo deſcribit ſpatium F, & H velocitas quam globus hocce caſu ſuo acquirit. Et erit H velocitas maxima quacum globus, pondere ſuo B, in medio reſiſtente poteſt deſcendere, per corol. 2. prop. XXXVIII. & reſiſtentia, quam globus ea cum velocitate deſcendens patitur, æqualis erit ejus ponderi B: reſiſtentia vero, quam patitur in alia quacunque velocitate, erit ad pondus B in duplicata ratione velocitatis hujus ad velocitatem illam maximam H, per corol. 1. prop. XXXVIII.

Hæc eſt reſiſtentia quæ oritur ab inertia materiæ fluidi. Ea vero quæ oritur ab elaſticitate, tenacitate, & frictione partium ejus, ſic inveſtigabitur.

Demittatur globus ut pondere ſuo B in fluido deſcendat; & ſit P tempus cadendi, idque in minutis ſecundis ſi tempus G in minutis ſecundis habeatur. Inveniatur numerus abſolutus N qui congruit logarithmo 0,4342944819 $\frac{2P}{G}$, ſitque L logarithmus numeri $\frac{N+1}{N}$: & velocitas cadendo acquiſita erit $\frac{N-1}{N+1}$ H, altitudo autem deſcripta erit $\frac{2PF}{G}$ — 1,3862943611 F + 4,605170186 LF. Si fluidum ſatis profundum ſit, negligi poteſt terminus 4,605170186 LF; & erit $\frac{2PF}{G}$ — 1,3862943611 F altitudo deſcripta quamproxime. Patent hæc per libri ſecundi propoſitionem nonam & ejus corollaria, ex hypotheſi quod globus nullam aliam patiatur reſiſtentiam niſi quæ oritur ab inertia materiæ. Si vero aliam inſuper reſiſtentiam patiatur, deſcenſus erit tardior, & ex retardatione innoteſcet quantitas hujus reſiſtentiæ.

Ut

Ut corporis in fluido cadentis velocitas & deſcenſus facilius innoteſcant, compoſui tabulam ſequentem, cujus columna prima denotat tempora deſcenſus, ſecunda exhibet velocitates cadendo acquiſitas exiſtente velocitate maxima 100000000, tertia exhibet ſpatia temporibus illis cadendo deſcripta, exiſtente 2 F ſpatio quod corpus tempore G cum velocitate maxima deſcribit, & quarta exhibet ſpatia iiſdem temporibus cum velocitate maxima deſcripta. Numeri in quarta columna ſunt $\frac{2P}{G}$, & ſubducendo numerum 1,3862944—4,6051702 L, inveniuntur numeri in tertia columna, & multiplicandi ſunt hi numeri per ſpatium F ut habeantur ſpatia cadendo deſcripta. Quinta his inſuper adjecta eſt columna, quæ continet ſpatia deſcripta iiſdem temporibus a corpore, vi ponderis ſui comparativi B, in vacuo cadente.

Tempora P	*Velocitates cadentis in fluido.*	*Spatia cadendo deſcripta in fluido.*	*Spatia motu maximo deſcripta.*	*Spatia cadendo deſcripta in vacuo.*
0,001 G	$99999\frac{29}{30}$	0,000001 F	0,002 F	0,000001 F
0,01 G	999967	0,0001 F	0,02 F	0,0001 F
0,1 G	9966799	0,0099834 F	0,2 F	0,01 F
0,2 G	19737532	0,0397361 F	0,4 F	0,04 F
0,3 G	29131261	0,0886815 F	0,6 F	0,09 F
0,4 G	37994896	0,1559070 F	0,8 F	0,16 F
0,5 G	46211716	0,2402290 F	1,0 F	0,25 F
0,6 G	53704957	0,3402706 F	1,2 F	0,36 F
0,7 G	60436778	0,4545405 F	1,4 F	0,49 F
0,8 G	66403677	0,5815071 F	1,6 F	0,64 F
0,9 G	71629787	0,7196609 F	1,8 F	0,81 F
1 G	76159416	0,8675617 F	2 F	1 F
2 G	96402758	2,6500055 F	4 F	4 F
3 G	99505475	4,6186570 F	6 F	9 F
4 G	99932930	6,6143765 F	8 F	16 F
5 G	99990920	8,6137964 F	10 F	25 F
6 G	99998771	10,6137179 F	12 F	36 F
7 G	99999834	12,6137073 F	14 F	49 F
8 G	99999980	14,6137059 F	16 F	64 F
9 G	99999997	16,6137057 F	18 F	81 F
10 G	$99999999\frac{3}{5}$	18,6137056 F	20 F	100 F

 Scholium.

Scholium.

Ut reſiſtentias fluidorum inveſtigarem per experimenta, paravi vas ligneum quadratum, longitudine & latitudine interna digitorum novem pedis *Londinenſis*, profunditate pedum novem cum ſemiſſe, idemque implevi aqua pluviali; & globis ex cera & plumbo incluſo formatis, notavi tempora deſcenſus globorum, exiſtente deſcenſus altitudine 112 digitorum pedis. Pes ſolidus cubicus *Londinenſis* continet 76 libras *Romanas* aquæ pluvialis, & pedis hujus digitus ſolidus continet $\frac{19}{36}$ uncias libræ hujus ſeu grana $253\frac{1}{3}$; & globus aqueus diametro digiti unius deſcriptus continet grana 132,645 in medio aeris, vel grana 132,8 in vacuo; & globus quilibet alius eſt ut exceſſus ponderis ejus in vacuo ſupra pondus ejus in aqua.

Exper. 1. Globus, cujus pondus erat $156\frac{1}{4}$ granorum in aere & 77 granorum in aqua, altitudinem totam digitorum 112 tempore minutorum quatuor ſecundorum deſcripſit. Et experimento repetito, globus iterum cecidit eodem tempore minutorum quatuor ſecundorum.

Pondus globi in vacuo eſt $156\frac{13}{38}$ *gran.* & exceſſus hujus ponderis ſupra pondus globi in aqua eſt $79\frac{13}{38}$ *gran.* Unde prodit globi diameter 0,84224 partium digiti. Eſt autem ut exceſſus ille ad pondus globi in vacuo, ita denſitas aquæ ad denſitatem globi, & ita partes octo tertiæ diametri globi (*viz.* 2,24597 *dig.*) ad ſpatium 2F, quod proinde erit 4,4256 *dig.* Globus tempore minuti unius ſecundi, toto ſuo pondere granorum $156\frac{13}{38}$, cadendo in vacuo deſcribet digitos $193\frac{1}{3}$; & pondere granorum 77, eodem tempore, ſine reſiſtentia cadendo in aqua deſcribet digitos 95,219; & tempore G, quod ſit ad minutum unum ſecundum in ſubduplicata ratione ſpatii F ſeu 2,2128 *dig.* ad 95,219 *dig.* deſcribet 2,2128 *dig.* & velocitatem maximam H acquiret quacum poteſt in aqua deſcendere. Eſt igitur tempus G 0″,15244. Et hoc tempore G, cum velocitate illa maxima H, globus deſcribet ſpatium 2F digitorum 4,4256; ideoque tempore minutorum quatuor ſecundorum deſcribet ſpatium digitorum 116,1245. Subducatur ſpatium 1,3862944 F ſeu 3,0676 *dig.* & manebit ſpatium 113,0569 digitorum quod globus cadendo in aqua, in vaſe ampliſſimo, tempore minutorum quatuor

tuor ſecundorum deſcribet. Hoc ſpatium, ob anguſtiam vaſis lignei prædicti, minui debet in ratione quæ componitur ex ſubduplicata ratione orificii vaſis ad exceſſum orificii hujus ſupra ſemicirculum maximum globi & ex ſimplici ratione orificii ejuſdem ad exceſſum ejus ſupra circulum maximum globi, id eſt, in ratione 1 ad 0,9914. Quo facto, habebitur ſpatium 112,08 digitorum, quod globus cadendo in aqua in hoc vaſe ligneo tempore minutorum quatuor ſecundorum per theoriam deſcribere debuit quamproxime. Deſcripſit vero digitos 112 per experimentum.

Exper. 2. Tres globi æquales, quorum pondera ſeorſim erant $76\frac{1}{3}$ granorum in aere & $5\frac{1}{16}$ granorum in aqua, ſucceſſive demittebantur; & unuſquiſque cecidit in aqua tempore minutorum ſecundorum quindecim, caſu ſuo deſcribens altitudinem digitorum 112.

Computum ineundo prodeunt pondus globi in vacuo $76\frac{5}{12}$ *gran.* exceſſus hujus ponderis ſupra pondus in aqua $71\frac{17}{48}$ *gran.* diameter globi 0,81296 *dig.* octo tertiæ partes hujus diametri 2,16789 *dig.* ſpatium 2 F 2,3217 *dig.* ſpatium quod globus pondere $5\frac{1}{16}$ *gran.* tempore 1″ ſine reſiſtentia cadendo deſcribat 12,808 *dig.* & tempus G 0″,301056. Globus igitur, velocitate maxima quacum poteſt in aqua vi ponderis $5\frac{1}{16}$ *gran.* deſcendere, tempore 0″,301056 deſcribet ſpatium 2,3217 *dig.* & tempore 15″ ſpatium 115,678 *dig.* Subducatur ſpatium 1,3862944 F ſeu 1,609 *dig.* & manebit ſpatium 114,069 *dig.* quod proinde globus eodem tempore in vaſe latiſſimo cadendo deſcribere debet. Propter anguſtiam vaſis noſtri detrahi debet ſpatium 0,895 *dig.* circiter. Et ſic manebit ſpatium 113,174 *dig.* quod globus cadendo in hoc vaſe, tempore 15″ deſcribere debuit per theoriam quamproxime. Deſcripſit vero digitos 112 per experimentum. Differentia eſt inſenſibilis.

Exper. 3. Globi tres æquales, quorum pondera ſeorſim erant 121 *gran.* in aere & 1 *gran.* in aqua, ſucceſſive demittebantur; & cadebant in aqua temporibus 46″, 47″, & 50″, deſcribentes altitudinem digitorum 112.

Per theoriam hi globi cadere debuerunt tempore 40″ circiter. Quod tardius ceciderunt, utrum minori proportioni reſiſtentiæ, quæ a vi inertiæ in tardis motibus oritur, ad reſiſtentiam quæ oritur ab aliis cauſis tribuendum ſit; an potius bullulis nonnullis globo adhærentibus, vel rarefactioni ceræ ad calorem vel tempeſtatis vel

Y y 2 manus

Scholium.

Ut reſiſtentias fluidorum inveſtigarem per experimenta, paravi vas ligneum quadratum, longitudine & latitudine interna digitorum novem pedis *Londinenſis*, profunditate pedum novem cum ſemiſſe, idemque implevi aqua pluviali; & globis ex cera & plumbo incluſo formatis, notavi tempora deſcenſus globorum, exiſtente deſcenſus altitudine 112 digitorum pedis. Pes ſolidus cubicus *Londinenſis* continet 76 libras *Romanas* aquæ pluvialis, & pedis hujus digitus ſolidus continet $\frac{19}{36}$ uncias libræ hujus ſeu grana $253\frac{1}{3}$; & globus aqueus diametro digiti unius deſcriptus continet grana 132,645 in medio aeris, vel grana 132,8 in vacuo; & globus quilibet alius eſt ut exceſſus ponderis ejus in vacuo ſupra pondus ejus in aqua.

Exper. 1. Globus, cujus pondus erat $156\frac{1}{4}$ granorum in aere & 77 granorum in aqua, altitudinem totam digitorum 112 tempore minutorum quatuor ſecundorum deſcripſit. Et experimento repetito, globus iterum cecidit eodem tempore minutorum quatuor ſecundorum.

Pondus globi in vacuo eſt $156\frac{13}{38}$ *gran.* & exceſſus hujus ponderis ſupra pondus globi in aqua eſt $79\frac{13}{38}$ *gran.* Unde prodit globi diameter 0,84224 partium digiti. Eſt autem ut exceſſus ille ad pondus globi in vacuo, ita denſitas aquæ ad denſitatem globi, & ita partes octo tertiæ diametri globi (*viz.* 2,24597 *dig.*) ad ſpatium 2F, quod proinde erit 4,4256 *dig.* Globus tempore minuti unius ſecundi, toto ſuo pondere granorum $156\frac{13}{38}$, cadendo in vacuo deſcribet digitos $193\frac{1}{3}$; & pondere granorum 77, eodem tempore, ſine reſiſtentia cadendo in aqua deſcribet digitos 95,219; & tempore G, quod ſit ad minutum unum ſecundum in ſubduplicata ratione ſpatii F ſeu 2,2128 *dig.* ad 95,219 *dig.* deſcribet 2,2128 *dig.* & velocitatem maximam H acquiret quacum poteſt in aqua deſcendere. Eſt igitur tempus G 0″,15244. Et hoc tempore G, cum velocitate illa maxima H, globus deſcribet ſpatium 2F digitorum 4,4256; ideoque tempore minutorum quatuor ſecundorum deſcribet ſpatium digitorum 116,1245. Subducatur ſpatium 1,3862944F ſeu 3,0676 *dig.* & manebit ſpatium 113,0569 digitorum quod globus cadendo in aqua, in vaſe ampliſſimo, tempore minutorum qua-

tuor

tuor ſecundorum deſcribet. Hoc ſpatium, ob anguſtiam vaſis lignei prædicti, minui debet in ratione quæ componitur ex ſubduplicata ratione orificii vaſis ad exceſſum orificii hujus ſupra ſemicirculum maximum globi & ex ſimplici ratione orificii ejuſdem ad exceſſum ejus ſupra circulum maximum globi, id eſt, in ratione 1 ad 0,9914. Quo facto, habebitur ſpatium 112,08 digitorum, quod globus cadendo in aqua in hoc vaſe ligneo tempore minutorum quatuor ſecundorum per theoriam deſcribere debuit quamproxime. Deſcripſit vero digitos 112 per experimentum.

Exper. 2. Tres globi æquales, quorum pondera ſeorſim erant $76\frac{1}{3}$ granorum in aere & $5\frac{1}{16}$ granorum in aqua, ſucceſſive demittebantur; & unuſquiſque cecidit in aqua tempore minutorum ſecundorum quindecim, caſu ſuo deſcribens altitudinem digitorum 112.

Computum ineundo prodeunt pondus globi in vacuo $76\frac{5}{12}$ *gran.* exceſſus hujus ponderis ſupra pondus in aqua $71\frac{17}{48}$ *gran.* diameter globi 0,81296 *dig.* octo tertiæ partes hujus diametri 2,16789 *dig.* ſpatium 2 F 2,3217 *dig.* ſpatium quod globus pondere $5\frac{1}{16}$ *gran.* tempore 1″ ſine reſiſtentia cadendo deſcribat 12,808 *dig.* & tempus G 0″,301056. Globus igitur, velocitate maxima quacum poteſt in aqua vi ponderis $5\frac{1}{16}$ *gran.* deſcendere, tempore 0″,301056 deſcribet ſpatium 2,3217 *dig.* & tempore 15″ ſpatium 115,678 *dig.* Subducatur ſpatium 1,3862944 F ſeu 1,609 *dig.* & manebit ſpatium 114,069 *dig.* quod proinde globus eodem tempore in vaſe latiſſimo cadendo deſcribere debet. Propter anguſtiam vaſis noſtri detrahi debet ſpatium 0,895 *dig.* circiter. Et ſic manebit ſpatium 113,174 *dig.* quod globus cadendo in hoc vaſe, tempore 15″ deſcribere debuit per theoriam quamproxime. Deſcripſit vero digitos 112 per experimentum. Differentia eſt inſenſibilis.

Exper. 3. Globi tres æquales, quorum pondera ſeorſim erant 121 *gran.* in aere & 1 *gran.* in aqua, ſucceſſive demittebantur; & cadebant in aqua temporibus 46″, 47″, & 50″, deſcribentes altitudinem digitorum 112.

Per theoriam hi globi cadere debuerunt tempore 40″ circiter. Quod tardius ceciderunt, utrum minori proportioni reſiſtentiæ, quæ a vi inertiæ in tardis motibus oritur, ad reſiſtentiam quæ oritur ab aliis cauſis tribuendum ſit; an potius bullulis nonnullis globo adhærentibus, vel rarefactioni ceræ ad calorem vel tempeſtatis vel

manus globum demittentis, vel etiam erroribus inſenſibilibus in ponderandis globis in aqua, incertum eſſe puto. Ideoque pondus globi in aqua debet eſſe plurium granorum, ut experimentum certum & fide dignum reddatur.

Exper. 4. Experimenta hactenus deſcripta cœpi, ut inveſtigarem reſiſtentias fluidorum, antequam theoria in propoſitionibus proxime præcedentibus expoſita mihi innoteſceret. Poſtea, ut theoriam inventam examinarem, paravi vas ligneum latitudine interna digitorum $8\frac{2}{3}$, profunditate pedum quindecim cum triente. Deinde ex cera & plumbo incluſo globos quatuor formavi, ſingulos pondere $139\frac{1}{4}$ granorum in aere & $7\frac{1}{8}$ granorum in aqua. Et hos demiſi ut tempora cadendi in aqua per pendulum, ad ſemi-minuta ſecunda oſcillans, menſurarem. Globi, ubi ponderabantur & poſtea cadebant, frigidi erant & aliquamdiu frigidi manſerant; quia calor ceram rarefacit, & per rarefactionem diminuit pondus globi in aqua, & cera rarefacta non ſtatim ad denſitatem priſtinam per frigus reducitur. Antequam caderent, immergebantur penitus in aquam; ne pondere partis alicujus ex aqua extantis deſcenſus eorum ſub initio accelleraretur. Et ubi penitus immerſi quieſcebant, demittebantur quam cautiſſime, ne impulſum aliquem a manu demittente acciperent. Ceciderunt autem ſucceſſive temporibus oſcillationum $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50 & 51, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum. Sed tempeſtas jam paulo frigidior erat quam cum globi ponderabantur, ideoque iteravi experimentum alio die, & globi ceciderunt temporibus oſcillationum 49, $49\frac{1}{2}$, 50 & 53, ac tertio temporibus oſcillationum $49\frac{1}{2}$, 50, 51 & 53. Et experimento ſæpius capto, globi ceciderumt maxima ex parte temporibus oſcillationum $49\frac{1}{2}$ & 50. Ubi tardius cecidere, ſuſpicor eoſdem retardatos fuiſſe impingendo in latera vaſis.

Jam computum per theoriam ineundo, prodeunt pondus9 globi in vacuo $139\frac{2}{5}$ granorum. Exceſſus hujus ponderis ſupra pondus globi in aqua $132\frac{11}{40}$ *gran.* Diameter globi 0,99868 *dig.* Octo tertiæ partes diametri 2,66315 *dig.* Spatium 2 F 2,8066 *dig.* Spatium quod globus pondere $7\frac{1}{8}$ granorum, tempore minuti unius ſecundi, ſine reſiſtentia cadendo deſcribit 9,88164 *dig.* Et tempus G 0″,376843. Globus igitur, velocitate maxima, quacum poteſt in aqua vi ponderis $7\frac{1}{8}$ granorum deſcendere, tempore 0″,376843 deſcribit

ſcribit ſpatium 2,8066 digitorum, & tempore 1″ ſpatium 7,44766 digitorum, & tempore 25″ ſeu oſcillationum 50 ſpatium 186,1915 *dig.* Subducatur ſpatium 1,386294 F, ſeu 1,9454 *dig.* & manebit ſpatium 184,2461 *dig.* quod globus eodem tempore in vaſe latiſſimo deſcribet. Ob anguſtiam vaſis noſtri, minuatur hoc ſpatium in ratione quæ componitur ex ſubduplicata ratione orificii vaſis ad exceſſum hujus orificii ſupra ſemicirculum maximum globi, & ſimplici ratione ejuſdem orificii ad exceſſum ejus ſupra circulum maximum globi; & habebitur ſpatium 181,86 digitorum, quod globus in hoc vaſe tempore oſcillationum 50 deſcribere debuit per theoriam quamproxime. Deſcripſit vero ſpatium 182 digitorum tempore oſcillationum 49½ vel 50 per experimentum.

Exper. 5. Globi quatuor pondere 154⅜ *gran.* in aere & 21½ *gran.* in aqua ſæpe demiſſi, cadebant tempore oſcillationum 28½, 29, 29½ & 30, & nonnunquam 31, 32 & 33, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 29 quamproxime.

Exper. 6. Globi quinque pondere 212⅜ *gran.* in aere & 79½ in aqua ſæpe demiſſi, cadebant tempore oſcillationum 15, 15½, 16, 17 & 18, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 15 quamproxime.

Exper. 7. Globi quatuor pondere 293⅜ *gran.* in aere & 35⅞ *gran.* in aqua ſæpe demiſſi, cadebant tempore oſcillationum 29½, 30, 30½, 31, 32 & 33, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digiti unius cum ſemiſſe.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 28 quamproxime.

Cauſam inveſtigando cur globorum, ejuſdem ponderis & magnitudinis, aliqui citius alii tardius caderent, in hanc incidi; quod globi, ubi primum demittebantur & cadere incipiebant, oſcillarent circum centra, latere illo quod forte gravius eſſet primum deſcendente, & motum oſcillatorium generante. Nam per oſcillationes ſuas globus majorem motum communicat aquæ, quam ſi ſine oſcillationibus deſcenderet; & communicando, amittit partem motus

proprii

manus globum demittentis, vel etiam erroribus inſenſibilibus in ponderandis globis in aqua, incertum eſſe puto. Ideoque pondus globi in aqua debet eſſe plurium granorum, ut experimentum certum & fide dignum reddatur.

Exper. 4. Experimenta hactenus deſcripta cœpi, ut inveſtigarem reſiſtentias fluidorum, antequam theoria in propoſitionibus proxime præcedentibus expoſita mihi innoteſceret. Poſtea, ut theoriam inventam examinarem, paravi vas ligneum latitudine interna digitorum $8\frac{2}{3}$, profunditate pedum quindecim cum triente. Deinde ex cera & plumbo incluſo globos quatuor formavi, ſingulos pondere $139\frac{1}{4}$ granorum in aere & $7\frac{1}{8}$ granorum in aqua. Et hos demiſi ut tempora cadendi in aqua per pendulum, ad ſemi-minuta ſecunda oſcillans, menſurarem. Globi, ubi ponderabantur & poſtea cadebant, frigidi erant & aliquamdiu frigidi manſerant; quia calor ceram rarefacit, & per rarefactionem diminuit pondus globi in aqua, & cera rarefacta non ſtatim ad denſitatem priſtinam per frigus reducitur. Antequam caderent, immergebantur penitus in aquam; ne pondere partis alicujus ex aqua extantis deſcenſus eorum ſub initio acceleraretur. Et ubi penitus immerſi quieſcebant, demittebantur quam cautiſſime, ne impulſum aliquem a manu demittente acciperent. Ceciderunt autem ſucceſſive temporibus oſcillationum $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50 & 51, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum. Sed tempeſtas jam paulo frigidior erat quam cum globi ponderabantur, ideoque iteravi experimentum alio die, & globi ceciderunt temporibus oſcillationum 49, $49\frac{1}{2}$, 50 & 53, ac tertio temporibus oſcillationum $49\frac{1}{2}$, 50, 51 & 53. Et experimento ſæpius capto, globi ceciderunt maxima ex parte temporibus oſcillationum $49\frac{1}{2}$ & 50. Ubi tardius cecidere, ſuſpicor eoſdem retardatos fuiſſe impingendo in latera vaſis.

Jam computum per theoriam ineundo, prodeunt pondus globi in vacuo $139\frac{2}{5}$ granorum. Exceſſus hujus ponderis ſupra pondus globi in aqua $132\frac{11}{40}$ *gran.* Diameter globi 0,99868 *dig.* Octo tertiæ partes diametri 2,66315 *dig.* Spatium 2 F 2,8066 *dig.* Spatium quod globus pondere $7\frac{1}{8}$ granorum, tempore minuti unius ſecundi, ſine reſiſtentia cadendo deſcribit 9,88164 *dig.* Et tempus G 0″,376843. Globus igitur, velocitate maxima, quacum poteſt in aqua vi ponderis $7\frac{1}{8}$ granorum deſcendere, tempore 0″,376843 deſcribit

ſcribit ſpatium 2,8066 digitorum, & tempore 1″ ſpatium 7,44766 digitorum, & tempore 25″ ſeu oſcillationum 50 ſpatium 186,1915 *dig.* Subducatur ſpatium 1,386294 F, ſeu 1,9454 *dig.* & manebit ſpatium 184,2461 *dig.* quod globus eodem tempore in vaſe latiſſimo deſcribet. Ob anguſtiam vaſis noſtri, minuatur hoc ſpatium in ratione quæ componitur ex ſubduplicata ratione orificii vaſis ad exceſſum hujus orificii ſupra ſemicirculum maximum globi, & ſimplici ratione ejuſdem orificii ad exceſſum ejus ſupra circulum maximum globi; & habebitur ſpatium 181,86 digitorum, quod globus in hoc vaſe tempore oſcillationum 50 deſcribere debuit per theoriam quamproxime. Deſcripſit vero ſpatium 182 digitorum tempore oſcillationum $49\frac{1}{2}$ vel 50 per experimentum.

Exper. 5. Globi quatuor pondere $154\frac{3}{8}$ *gran.* in aere & $21\frac{1}{2}$ *gran.* in aqua ſæpe demiſſi, cadebant tempore oſcillationum $28\frac{1}{2}$, 29, $29\frac{1}{2}$ & 30, & nonnunquam 31, 32 & 33, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 29 quamproxime.

Exper. 6. Globi quinque pondere $212\frac{3}{8}$ *gran.* in aere & $79\frac{1}{2}$ in aqua ſæpe demiſſi, cadebant tempore oſcillationum 15, $15\frac{1}{2}$, 16, 17 & 18, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 15 quamproxime.

Exper. 7. Globi quatuor pondere $293\frac{3}{8}$ *gran.* in aere & $35\frac{7}{8}$ *gran.* in aqua ſæpe demiſſi, cadebant tempore oſcillationum $29\frac{1}{2}$, 30, $30\frac{1}{2}$, 31, 32 & 33, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digiti unius cum ſemiſſe.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 28 quamproxime.

Cauſam inveſtigando cur globorum, ejuſdem ponderis & magnitudinis, aliqui citius alii tardius caderent, in hanc incidi; quod globi, ubi primum demittebantur & cadere incipiebant, oſcillarent circum centra, latere illo quod forte gravius eſſet primum deſcendente, & motum oſcillatorium generante. Nam per oſcillationes ſuas globus majorem motum communicat aquæ, quam ſi ſine oſcillationibus deſcenderet; & communicando, amittit partem motus

proprii

proprii quo deſcendere deberet: & pro majore vel minore oſcillatione, magis vel minus retardatur. Quinetiam globus recedit ſemper a latere ſuo quod per oſcillationem deſcendit, & recedendo appropinquat lateribus vaſis & in latera nonnunquam impingitur. Et hæc oſcillatio in globis gravioribus fortior eſt, & in majoribus aquam magis agitat. Quapropter, ut oſcillatio globorum minor redderetur, globos novos ex cera & plumbo conſtruxi, infigendo plumbum in latus aliquod globi prope ſuperficiem ejus; & globum ita demiſi, ut latus gravius, quoad fieri potuit, eſſet infimum ab initio deſcenſus. Sic oſcillationes factæ ſunt multo minores quam prius, & globi temporibus minus inæqualibus ceciderunt, ut in experimentis ſequentibus.

Exper. 8. Globi quatuor, pondere granorum 139 in aere & $6\frac{1}{2}$ in aqua, ſæpe demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum non plurium quam 52, non pauciorum quam 50, & maxima ex parte tempore oſcillationum 51 circiter, deſcribentes altitudinem digitorum 182.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 52 circiter.

Exper. 9. Globi quatuor, pondere granorum $273\frac{1}{4}$ in aere & $140\frac{3}{4}$ in aqua, ſæpius demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum non pauciorum quam 12, non plurium quam 13, deſcribentes altitudinem digitorum 182.

Per theoriam vero hi globi cadere debuerunt tempore oſcillationum $11\frac{1}{3}$ quamproxime.

Exper. 10. Globi quatuor, pondere granorum 384 in aere & $119\frac{1}{2}$ in aqua, ſæpe demiſſi, cadebant temporibus oſcillationum $17\frac{3}{4}$, 18, $18\frac{1}{2}$ & 19, deſcribentes altitudinem digitorum $181\frac{1}{2}$. Et ubi ceciderunt tempore oſcillationum 19, nonnunquam audivi impulſum eorum in latera vaſis antequam ad fundum pervenerunt.

Per theoriam vero cadere debuerunt tempore oſcillationum $15\frac{5}{9}$ quamproxime.

Exper. 11. Globi tres æquales, pondere granorum 48 in aere & $3\frac{29}{32}$ in aqua, ſæpe demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum $43\frac{1}{2}$, 44, $44\frac{1}{2}$, 45 & 46, & maxima ex parte 44 & 45, deſcribentes altitudinem digitorum $182\frac{1}{2}$ quamproxime.

Per

Per theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum $46\frac{5}{9}$ circiter.

Exper. 12. Globi tres æquales, pondere granorum 141 in aere & $4\frac{3}{4}$ in aqua, aliquoties demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum 61, 62, 63, 64 & 65, deſcribentes altitudinem digitorum 182.

Et per theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum $64\frac{1}{2}$ quamproxime.

Per hæc experimenta manifeſtum eſt quod, ubi globi tarde ceciderunt, ut in experimentis ſecundis, quartis, quintis, octavis, undecimis ac duodecimis, tempora cadendi recte exhibentur per theoriam: at ubi globi velocius ceciderunt, ut in experimentis ſextis, nonis ac decimis, reſiſtentia paulo major extitit quam in duplicata ratione velocitatis. Nam globi inter cadendum oſcillant aliquantulum; & hæc oſcillatio in globis levioribus & tardius cadentibus, ob motus languorem cito ceſſat; in gravioribus autem & majoribus, ob motus fortitudinem diutius durat, & non niſi poſt plures oſcillationes ab aqua ambiente cohiberi poteſt. Quinetiam globi, quo velociores ſunt, eo minus premuntur a fluido ad poſticas ſuas partes; & ſi velocitas perpetuo augeatur, ſpatium vacuum tandem a tergo relinquent, niſi compreſſio fluidi ſimul augeatur. Debet autem compreſſio fluidi (per prop. XXXII. & XXXIII.) augeri in duplicata ratione velocitatis, ut reſiſtentia ſit in eadem duplicata ratione. Quoniam hoc non fit, globi velociores paulo minus premuntur a tergo, & defectu preſſionis hujus, reſiſtentia eorum fit paulo major quam in duplicata ratione velocitatis.

Congruit igitur theoria cum phænomenis corporum cadentium in aqua, reliquum eſt ut examinemus phænomena cadentium in aere.

Exper. 13. A culmine eccleſiæ Sancti *Pauli*, in urbe *Londini*, menſe Junio 1710. globi duo vitrei ſimul demittebantur, unus argenti vivi plenus, alter aeris; & cadendo deſcribebant altitudinem pedum *Londinenſium* 220. Tabula lignea ad unum ejus terminum polis ferreis ſuſpendebatur, ad alterum peſſulo ligneo incumbebat; & globi duo huic tabulæ impoſiti ſimul demittebantur, ſubtrahendo peſſulum ope fili ferrei ad terram uſque demiſſi ut tabula polis ferreis ſolummodo innixa ſuper iiſdem devolveretur, & eodem temporis momento pendulum ad minuta ſecunda oſcillans, per filum

illud

illud ferreum tractum demitteretur & oſcillare inciperet. Diametri & pondera globorum ac tempora cadendi exhibentur in tabula ſequente.

Globorum mercurio plenorum			*Globorum aere plenorum.*		
Pondera	*Diametri*	*Tempora cadendi.*	*Pondera*	*Diametri*	*Tempora cadendi.*
908 *gran.*	0,8 *digit.*	4''	510 *gran.*	5,1 *digit.*	8'' ½
983	0,8	4 —	642	5,2	8
866	0,8	4	599	5,1	8
747	0,75	4 +	515	5,0	8¼
808	0,75	4	483	5,0	8½
784	0,75	4 +	641	5,2	8

Cæterum tempora obſervata corrigi debent. Nam globi mercuriales (per theoriam *Galilæi*) minutis quatuor ſecundis deſcribent pedes *Londinenſes* 257, & pedes 220 minutis tantum 3'' 42'''. Tabula lignea utique, detracto peſſulo, tardius devolvebatur quam par erat, & tarda ſua devolutione impediebat deſcenſum globorum ſub initio. Nam globi incumbebant tabulæ prope medium ejus, & paulo quidem propiores erant axi ejus quam peſſulo. Et hinc tempora cadendi prorogata fuerunt minutis tertiis octodecim circiter, & jam corrigi debent detrahendo illa minuta, præſertim in globis majoribus qui tabulæ devolventi paulo diutius incumbebant propter magnitudinem diametrorum. Quo facto tempora, quibus globi ſex majores cecidere, evadent 8'' 12''', 7'' 42''', 7'' 42''', 7'' 57''', 8'' 12''', & 7'' 42'''.

Globorum igitur aere plenorum quintus, diametro digitorum quinque pondere granorum 483 conſtructus, cecidit tempore 8'' 12''', deſcribendo altitudinem pedum 220. Pondus aquæ huic globo æqualis eſt 16600 granorum; & pondus aeris eidem æqualis eſt $\frac{16600}{860}$ *gran.* ſeu $19\frac{3}{10}$ *gran.* ideoque pondus globi in vacuo eſt $502\frac{3}{10}$ *gran.* & hoc pondus eſt ad pondus aeris globo æqualis, ut $502\frac{3}{10}$ ad $19\frac{3}{10}$, & ita ſunt 2 F ad octo tertias partes diametri globi, id eſt, ad $13\frac{1}{3}$ digitos. Unde 2 F prodeunt 28 *ped.* 11 *dig.* Globus cadendo in vacuo, toto ſuo pondere $502\frac{3}{10}$ granorum, tempore minuti unius ſecundi deſcribit digitos $193\frac{1}{3}$ ut ſupra, & pondere 483 *gran.* deſcribit digitos 185,905, & eodem pondere 483 *gran.* etiam

in

in vacuo deſcribit ſpatium F ſeu 14 *ped.* 5⅙ *dig.* tempore 57‴ 58⁗, & velocitatem maximam acquirit quacum poſſit in aere deſcendere. Hac velocitate globus, tempore 8″ 12‴, deſcribet ſpatium pedum 245 & digitorum 5⅓. Aufer 1,3863 F ſeu 20 *ped.* 0½ *dig.* & manebunt 225 *ped.* 5 *dig.* Hoc ſpatium igitur globus, tempore 8″ 12‴, cadendo deſcribere debuit per theoriam. Deſcripſit vero ſpatium 220 pedum per experimentum. Differentia inſenſibilis eſt.

Similibus computis ad reliquos etiam globos aere plenos applicatis, confeci tabulam ſequentem.

Globorum pondera.	*Diametri.*	*Tempora cadendi ab altitudine pedum* 220.		*Spatia deſcribenda per theoriam.*		*Exceſſus.*	
510 *gran.*	5,1 *dig.*	8″	12‴	226 *ped.*	11 *dig.*	6 *ped.*	11 *dig.*
642	5,2	7	42	230	9	10	9
599	5,1	7	42	227	10	7	10
515	5	7	57	224	5	4	5
483	5	8	12	225	5	5	5
641	5,2	7	42	230	7	10	7

Exper. 14. Anno 1719. menſe Julio, D. Deſaguliers hujuſmodi experimenta iterum cepit, formando veſicas porcorum in orbem ſphæricum ope ſphæræ ligneæ concavæ, ambientis quam madefactæ implere cogebantur inflando aerem; & haſce arefactas & exemptas demittendo ab altiore loco in templi ejuſdem turri rotunda fornicata, nempe ab altitudine pedum 272; & eodem temporis momento demittendo etiam globum plumbeum cujus pondus erat duarum librarum Romanarum circiter. Et interea aliqui ſtantes in ſuprema parte templi, ubi globi demittebantur, notabant tempora tota cadendi, & alii ſtantes in terra notabant differentiam temporum inter caſum globi plumbei & caſum veſicæ. Tempora autem menſurabantur pendulis ad dimidia minuta ſecunda oſcillantibus. Et eorum qui in terra ſtabant unus habebat horologium cum elatere ad ſingula minuta ſecunda quater vibrante; alius habebat machinam aliam affabre conſtructam cum pendulo etiam ad ſingula minuta ſecunda quater vibrante. Et ſimilem machinam habebat unus eorum qui ſtabant in ſummitate templi. Et hæc inſtrumenta ita formabantur,

ut motus eorum pro lubitu vel inciperent vel ſiſterentur. Globus autem plumbeus cadebat tempore minutorum ſecundorum quatuor cum quadrante circiter. Et addendo hoc tempus ad prædictam temporis differentiam, colligebatur tempus totum quo veſica cecidit. Tempora, quibus veſicæ quinque poſt caſum globi plumbei prima vice ceciderunt, erant 14¾″, 12¾″, 14⅝″, 17¾″, & 16⅞″, & ſecunda vice 14½″, 14¼″, 14″, 19″, & 16¾″. Addantur 4¼″, tempus utique quo globus plumbeus cecidit, & tempora tota quibus veſicæ quinque ceciderunt, erant prima vice 19″, 17″, 18⅞″, 22″, & 21⅛″; & ſecunda vice, 18¾″, 18½″, 18¼″, 23¼″, & 21″. Tempora autem in ſummitate templi notata, erant prima vice 19⅜″, 17¼″, 18¾″, 22⅛″, & 21⅝″; & ſecunda vice 19″, 18⅝″, 18⅜″, 24″, & 21¼″. Cæterum veſicæ non ſemper recta cadebant, ſed nonnunquam volitabant, & hinc inde oſcillabantur inter cadendum. Et his motibus tempora cadendi prorogata ſunt & aucta nonnunquam dimidio minuti unius ſecundi, nonnunquam minuto ſecundo toto. Cadebant autem rectius veſica ſecunda & quarta prima vice; & prima ac tertia ſecunda vice. Veſica quinta rugoſa erat & per rugas ſuas nonnihil retardabatur. Diametros veſicarum deducebam ex earum circumferentiis filo tenuiſſimo bis circundato menſuratis. Et theoriam contuli cum experimentis in tabula ſequente, aſſumendo denſitatem aeris eſſe ad denſitatem aquæ pluvialis ut 1 ad 860, & computando ſpatia quæ globi per theoriam deſcribere debuerunt cadendo.

Veſicarum pondera.	*Diametri.*	*Tempora cadendi ab altitudine pedum 272.*	*Spatia iiſdem temporibus deſcribenda per theoriam.*		*Differentia inter theor. & exper.*	
128 *gran.*	5,28 *dig.*	19″	271 *ped.*	11 *dig.*	−0 *ped.*	1 *dig.*
156	5,19	17	272	0½	+0	0½
137½	5,3	18½	272	7	+0	7
97½	5,26	22	277	4	+5	4
99⅛	5	21⅛	282	0	+10	0

Globorum igitur tam in aere quam in aqua motorum reſiſtentia prope omnis per theoriam noſtram recte exhibetur, ac denſitati fluidorum, paribus globorum velocitatibus ac magnitudinibus, proportionalis eſt.

In

In ſcholio, quod ſectioni ſextæ ſubjunctum eſt, oſtendimus per experimenta pendulorum quod globorum æqualium & æquivelocium in aere, aqua, & argento vivo motorum reſiſtentiæ ſunt ut fluidorum denſitates. Idem hic oſtendimus magis accurate per experimenta corporum cadentium in aëre & aqua. Nam pendula ſingulis oſcillationibus motum cient in fluido motui penduli redeuntis ſemper contrarium, & reſiſtentia ab hoc motu oriunda, ut & reſiſtentia fili quo pendulum ſuſpendebatur, totam penduli reſiſtentiam majorem reddiderunt quam reſiſtentia quæ per experimenta corporum cadentium prodiit. Etenim per experimenta pendulorum in ſcholio illo expoſita, globus ejuſdem denſitatis cum aqua, deſcribendo longitudinem ſemidiametri ſuæ in aëre, amittere deberet motus ſui partem $\frac{1}{3342}$. At per theoriam in hac ſeptima ſectione expoſitam & experimentis cadentium confirmatam, globus idem deſcribendo longitudinem eandem, amittere deberet motus ſui partem tantum $\frac{1}{4586}$, poſito quod denſitas aquæ ſit ad denſitatem aëris ut 860 ad 1. Reſiſtentiæ igitur per experimenta pendulorum majores prodiere (ob cauſas jam deſcriptas) quam per experimenta globorum cadentium, idque in ratione 4 ad 3 circiter. Attamen cum pendulorum in aëre, aqua & argento vivo oſcillantium reſiſtentiæ a cauſis ſimilibus ſimiliter augeantur, proportio reſiſtentiarum in his mediis, tam per experimenta pendulorum, quam per experimenta corporum cadentium, ſatis recte exhibebitur. Et inde concludi poteſt quod corporum in fluidis quibuſcunque fluidiſſimis motorum reſiſtentiæ, cæteris paribus, ſunt ut denſitates fluidorum.

His ita ſtabilitis, dicere jam licet quamnam motus ſui partem globus quilibet, in fluido quocunque projectus, dato tempore amittet quamproxime. Sit D diameter globi, & V velocitas ejus ſub initio motus, & T tempus, quo globus velocitate V in vacuo deſcribet ſpatium, quod ſit ad ſpatium $\frac{4}{3}$D ut denſitas globi ad denſitatem fluidi: & globus in fluido illo projectus, tempore quovis alio t, amittet velocitatis ſuæ partem $\frac{tV}{T+t}$, manente parte $\frac{TV}{T+t}$, & deſcribet ſpatium, quod ſit ad ſpatium uniformi velocitate V eodem tempore deſcriptum in vacuo, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per

numerum

numerum 2,302585093 eſt ad numerum $\frac{t}{T}$, per corol. vii. prop. xxxv. In motibus tardis reſiſtentia poteſt eſſe paulo minor, propterea quod figura globi paulo aptior ſit ad motum quam figura cylindri eadem diametro deſcripti. In motibus velocibus reſiſtentia poteſt eſſe paulo major, propterea quod elaſticitas & compreſſio fluidi non augeantur in duplicata ratione velocitatis. Sed hujuſmodi minutias hic non expendo.

Et quamvis aër, aqua, argentum vivum & ſimilia fluida, per diviſionem partium in infinitum, ſubtiliarentur & fierent media infinite fluida; tamen globis projectis haud minus reſiſterent. Nam reſiſtentia, de qua agitur in propoſitionibus præcedentibus, oritur ab inertia materiæ; & inertia materiæ corporibus eſſentialis eſt & quantitati materiæ ſemper proportionalis. Per diviſionem partium fluidi, reſiſtentia quæ oritur a tenacitate & frictione partium diminui quidem poteſt: ſed quantitas materiæ per diviſionem partium ejus non diminuitur; & manente quantitate materiæ, manet ejus vis inertiæ, cui reſiſtentia, de qua hic agitur, ſemper proportionalis eſt. Ut hæc reſiſtentia diminuatur, diminui debet quantitas materiæ in ſpatiis per quæ corpora moventur. Et propterea ſpatia cœleſtia, per quæ globi planetarum & cometarum in omnes partes liberrime & ſine omni motus diminutione ſenſibili perpetuo moventur, fluido omni corporeo deſtituuntur, ſi forte vapores longe tenuiſſimos & trajectos lucis radios excipias.

Projectilia utique motum cient in fluidis progrediendo, & hic motus oritur ab exceſſu preſſionis fluidi ad projectilis partes anticas ſupra preſſionem ad ejus partes poſticas, & non minor eſſe poteſt in mediis infinite fluidis quam in aere, aqua & argento vivo pro denſitate materiæ in ſingulis. Hic autem preſſionis exceſſus, pro quantitate ſua, non tantum motum ciet in fluido, ſed etiam agit in projectile ad motum ejus retardandum: & propterea reſiſtentia in omni fluido eſt ut motus in fluido a projectili excitatus, nec minor eſſe poteſt in æthere ſubtiliſſimo pro denſitate ætheris, quam in aëre, aqua & argento vivo pro denſitatibus horum fluidorum.

SECTIO

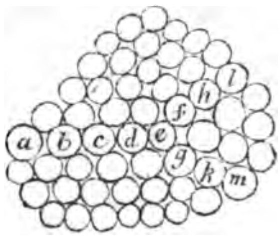
SECTIO VIII.

De motu per fluida propagato.

PROPOSITIO XLI. THEOREMA XXXII.

Preſſio non propagatur per fluidum ſecundum lineas rectas, niſi ubi particulæ fluidi in directum jacent.

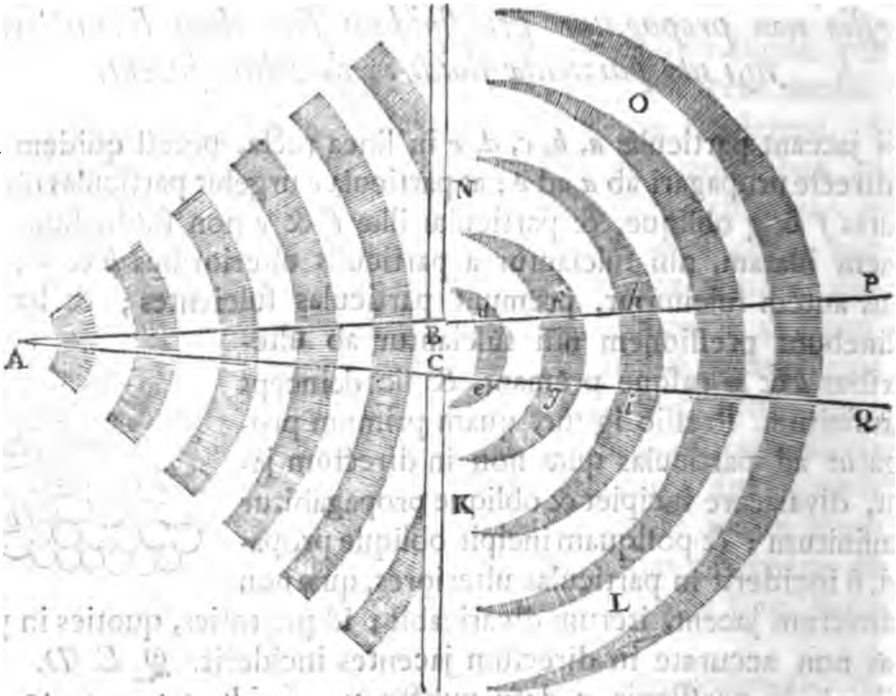
Si jaceant particulæ *a*, *b*, *c*, *d*, *e* in linea recta, poteſt quidem preſſio directe propagari ab *a* ad *e*; at particula *e* urgebit particulas oblique poſitas *f* & *g* oblique, & particulæ illæ *f* & *g* non ſuſtinebunt preſſionem illatam, niſi fulciantur a particulis ulterioribus *h* & *k*; quatenus autem fulciuntur, premunt particulas fulcientes; & hæ non ſuſtinebunt preſſionem niſi fulciantur ab ulterioribus *l* & *m* eaſque premant; & ſic deinceps in infinitum. Preſſio igitur, quam primum propagatur ad particulas quæ non in directum jacent, divaricare incipiet & oblique propagabitur in infinitum; & poſtquam incipit oblique propagari, ſi inciderit in particulas ulteriores, quæ non in directum jacent, iterum divaricabit; idque toties, quoties in particulas non accurate in directum jacentes inciderit. *Q. E. D.*



Corol. Si preſſionis, a dato puncto per fluidum propagatæ, pars aliqua obſtaculo intercipiatur; pars reliqua, quæ non intercipitur, divaricabit in ſpatia pone obſtaculum. Id quod ſic etiam demonſtrari poteſt. A puncto *A* propagetur preſſio quaquaverſum, idque ſi fieri poteſt ſecundum lineas rectas, & obſtaculo *NBCK* perforato in *BC*, intercipiatur ea omnis, præter partem coniformem *APQ*, quæ per foramen circulare *BC* tranſit. Planis tranſverſis *de*, *fg*, *hi* diſtinguatur conus *APQ* in fruſta; & interea dum conus *ABC*, preſſionem propagando, urget fruſtum conicum ulterius *degf* in ſuperficie *de*, & hoc fruſtum urget fruſtum proximum *fgih* in ſuperficie *fg*, & fruſtum illud urget fruſtum tertium, & ſic deinceps in infinitum; manifeſtum eſt (per motus legem tertiam) quod fru-

ſtum

ſtum primum *defg*, reactione fruſti ſecundi *fghi*, tantum urgebitur & premetur in ſuperficie *fg*, quantum urget & premit fruſtum illud ſecundum. Fruſtum igitur *degf* inter conum *Ade* & fruſtum *fhig* comprimitur utrinque, & propterea (per corol. VI. prop XIX.) figuram ſuam ſervare nequit, niſi vi eadem comprimatur undique. Eodem igitur impetu quo premitur in ſuperficiebus *de*, *fg*, cona-



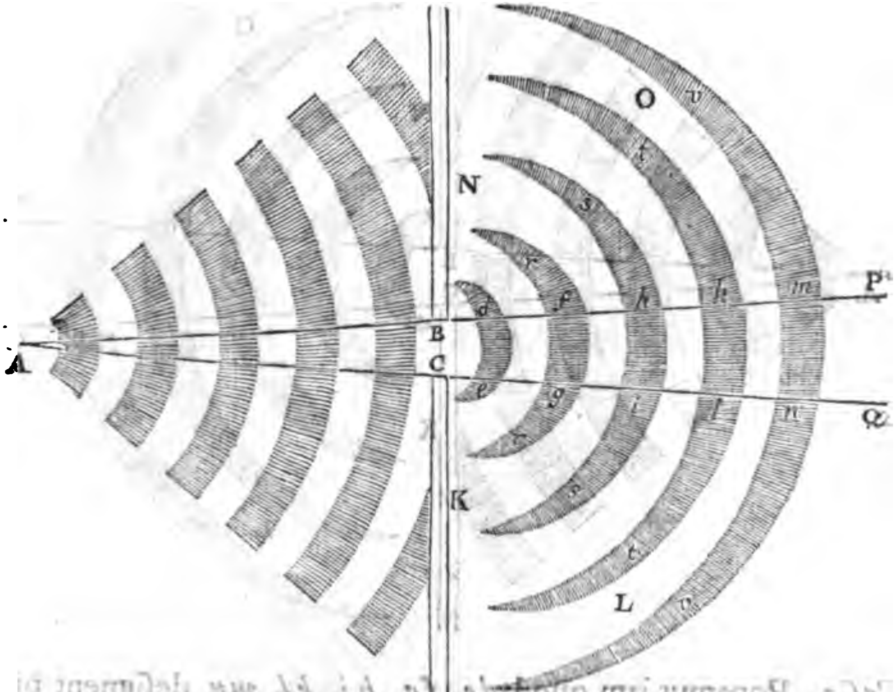
bitur cedere ad latera *df*, *eg*; ibique (cum rigidum non ſit, ſed omnimodo fluidum) excurret ac dilatabitur, niſi fluidum ambiens adſit, quo conatus iſte cohibeatur. Proinde conatu excurrendi, premet tam fluidum ambiens ad latera *df*, *eg* quam fruſtum *fghi* eodem impetu; & propterea preſſio non minus propagabitur a lateribus *df*, *eg* in ſpatia *NO*, *KL* hinc inde, quam propagatur a ſuperficie *fg* verſus *PQ*. *Q. E. D.*

PROPO-

PROPOSITIO XLII. THEOREMA XXXIII.

Motus omnis per fluidum propagatus divergit a recto tramite in ſpatia immota.

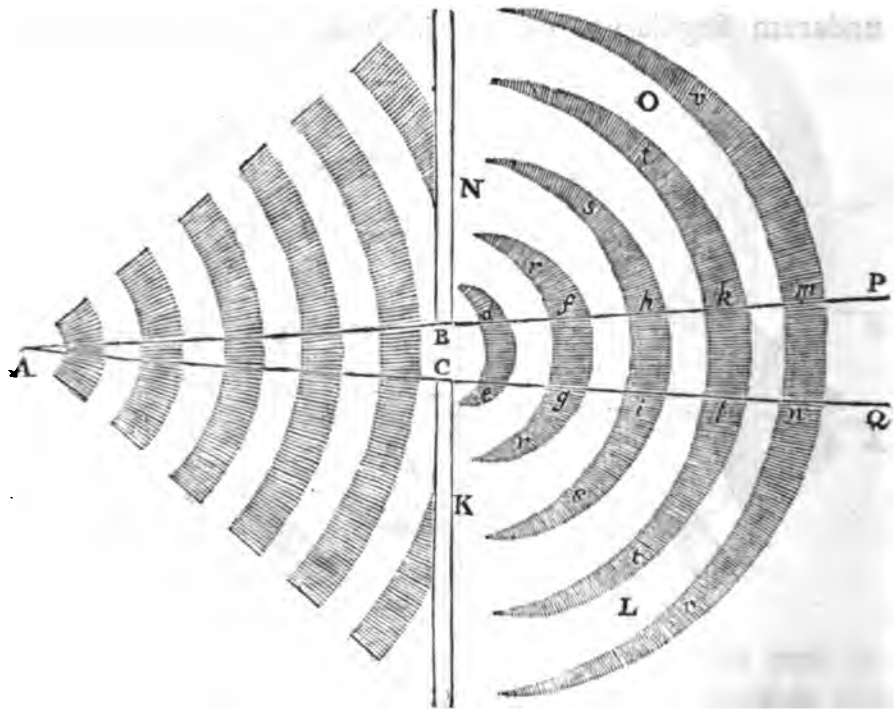
Caſ. 1. Propagetur motus a puncto *A* per foramen *BC*, pergatque, ſi fieri poteſt, in ſpatio conico *BCQP*, ſecundum lineas rectas divergentes a puncto *A*. Et ponamus primo quod motus iſte ſit undarum in ſuperficie ſtagnantis aquæ. Sintque *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. undarum ſingularum partes altiſſimæ, vallibus totidem inter-



mediis ab invicem diſtinctæ. Igitur quoniam aqua in undarum jugis altior eſt quam in fluidi partibus immotis *LK*, *NO*, defluet eadem de jugorum terminis *e*, *g*, *i*, *l*, &c. *d*, *f*, *h*, *k*, &c. hinc inde verſus *KL* & *NO*: & quoniam in undarum vallibus depreſſior eſt quam in fluidi partibus immotis *KL*, *NO*; defluet eadem de partibus illis immotis in undarum valles. Defluxu priore undarum juga, poſteriore valles hinc inde dilatantur & propagantur verſus *KL* & *NO*.

De Motu Corporum

NO. Et quoniam motus undarum ab *A* verſus *PQ* fit per continuum defluxum jugorum in valles proximos, ideoque celerior non eſt quam pro celeritate deſcenſus; & deſcenſus aquæ hinc inde verſus *KL* & *NO* eadem velocitate peragi debet; propagabitur dilatatio undarum hinc inde verſus *KL* & *NO* eadem velocitate qua undæ ipſæ ab *A* verſus *PQ* recta progrediuntur. Proindeque ſpatium totum hinc inde verſus *KL* & *NO* ab undis dilatatis *rfgr*, *shis*, *tklt*, *vmnv*, &c. occupabitur. *Q. E. D.* Hæc ita ſe habere quilibet in aqua ſtagnante experiri poteſt.



Caſ. 2. Ponamus jam quod *de*, *fg*, *hi*, *kl*, *mn* deſignent pulſus a puncto *A* per medium elaſticum ſucceſſive propagatos. Pulſus propagari concipe per ſucceſſivas condenſationes & rarefactiones medii, ſic ut pulſus cujuſque pars denſiſſima ſphæricam occupet ſuperficiem circa centrum *A* deſcriptam, & inter pulſus ſucceſſivos æqualia intercedant intervalla. Deſignent autem lineæ *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. denſiſſimas pulſuum partes, per foramen *BC* propagatas. Et quoniam medium ibi denſius eſt quam in ſpatiis hinc inde verſus *KL* & *NO*, dilatabit ſeſe tam verſus ſpatia illa *KL*, *NO* utrinque ſita,

ſita, quam verſus pulſuum rariora intervalla; eoque pacto rarius ſemper evadens e regione intervallorum ac denſius e regione pulſuum, participabit eorundem motum. Et quoniam pulſuum progreſſivus motus oritur a perpetua relaxatione partium denſiorum verſus antecedentia intervalla rariora; & pulſus eadem fere celeritate ſeſe in medii partes quieſcentes *KL*, *NO* hinc inde relaxare debent; pulſus illi eadem fere celeritate ſeſe dilatabunt undique in ſpatia immota *KL*, *NO*, qua propagantur directe a centro *A*; ideoque ſpatium totum *KLON* occupabunt. *Q. E. D.* Hoc experimur in ſonis, qui vel monte interpoſito audiuntur, vel in cubiculum per feneſtram admiſſi ſeſe in omnes cubiculi partes dilatant, inque angulis omnibus audiuntur, non tam reflexi a parietibus oppoſitis, quam a feneſtra directe propagati, quantum ex ſenſu judicare licet.

Caſ. 3. Ponamus denique quod motus cujuſcunque generis propagetur ab *A* per foramen *BC*: & quoniam propagatio iſta non fit, niſi quatenus partes medii centro *A* propiores urgent commoventque partes ulteriores; & partes quæ urgentur fluidæ ſunt, ideoque recedunt quaquaverſum in regiones ubi minus premuntur: recedent eædem verſus medii partes omnes quieſcentes, tam laterales *KL* & *NO*, quam anteriores *PQ*, eoque pacto motus omnis, quam primum per foramen *BC* tranſiit, dilatari incipiet & inde tanquam a principio & centro, in partes omnes directe propagari. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XLIII. THEOREMA XXXIV.

Corpus omne tremulum in medio elaſtico propagabit motum pulſuum undique in directum; in medio vero non elaſtico motum circularem excitabit.

Caſ. 1. Nam partes corporis tremuli vicibus alternis eundo & redeundo, itu ſuo urgebunt & propellent partes medii ſibi proximas, & urgendo compriment eaſdem & condenſabunt; dein reditu ſuo ſinent partes compreſſas recedere & ſeſe expandere. Igitur partes medii corpori tremulo proximæ ibunt & redibunt per vices, ad inſtar partium corporis illius tremuli: & qua ratione partes corporis hujus agitabant haſce medii partes, hæ ſimilibus tremoribus agitatæ agitabunt partes ſibi proximas, eæque ſimiliter agitatæ agitabunt ulteriores, & ſic deinceps in infinitum. Et quemadmodum

medii partes primæ eundo condenſantur & redeundo relaxantur, ſic partes reliquæ quoties eunt condenſabuntur, & quoties redeunt ſeſe expandent. Et propterea non omnes ibunt & ſimul redibunt (ſic enim determinatas ab invicem diſtantias ſervando, non rarefierent & condenſarentur per vices) ſed accedendo ad invicem ubi condenſantur, & recedendo ubi rarefiunt, aliquæ earum ibunt dum aliæ redeunt; idque vicibus alternis in infinitum. Partes autem euntes & eundo condenſatæ, ob motum ſuum progreſſivum, quo feriunt obſtacula, ſunt pulſus; & propterea pulſus ſucceſſivi a corpore omni tremulo in directum propagabuntur; idque æqualibus circiter ab invicem diſtantiis, ob æqualia temporis intervalla, quibus corpus tremoribus ſuis ſingulis ſingulos pulſus excitat. Et quanquam corporis tremuli partes eant & redeant ſecundum plagam aliquam certam & determinatam, tamen pulſus inde per medium propagati ſeſe dilatabunt ad latera, per propoſitionem præcedentem; & a corpore illo tremulo tanquam centro communi, ſecundum ſuperficies propemodum ſphæricas & concentricas, undique propagabuntur. Cujus rei exemplum aliquod habemus in undis, quæ ſi digito tremulo excitentur, non ſolum pergent hinc inde ſecundum plagam motus digiti, ſed, in modum circulorum concentricorum, digitum ſtatim cingent & undique propagabuntur. Nam gravitas undarum ſupplet locum vis elaſticæ.

Caſ. 2. Quod ſi medium non ſit elaſticum: quoniam ejus partes a corporis tremuli partibus vibratis preſſæ condenſari nequeunt, propagabitur motus in inſtanti ad partes ubi medium faciliime cedit, hoc eſt, ad partes quas corpus tremulum alioqui vacuas a tergo relinqueret. Idem eſt caſus cum caſu corporis in medio quocunque projecti. Medium cedendo projectilibus, non recedit in infinitum; ſed in circulum eundo, pergit ad ſpatia quæ corpus relinquit a tergo. Igitur quoties corpus tremulum pergit in partem quamcunque, medium cedendo perget per circulum ad partes quas corpus relinquit; & quoties corpus regreditur ad locum priorem, medium inde repelletur & ad locum ſuum priorem redibit. Et quamvis corpus tremulum non ſit firmum, ſed modis omnibus flexile, ſi tamen magnitudine datum maneat, quoniam tremoribus ſuis nequit medium ubivis urgere, quin alibi eidem ſimul cedat; efficiet ut medium,

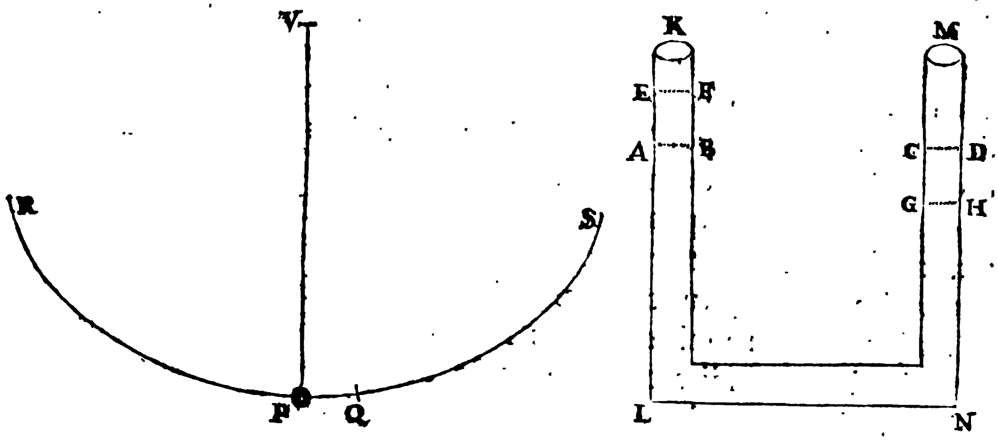
um, recedendo a partibus ubi premitur, pergat ſemper in orbem ad partes quæ eidem cedunt. *Q. E. D.* Liber Secundus.

Corol. Hallucinantur igitur qui credunt agitationem partium flammæ ad preſſionem, per medium ambiens, ſecundum lineas rectas propagandum conducere. Debebit ejuſmodi preſſio non ab agitatione ſola partium flammæ, ſed a totius dilatatione derivari.

PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XXXV.

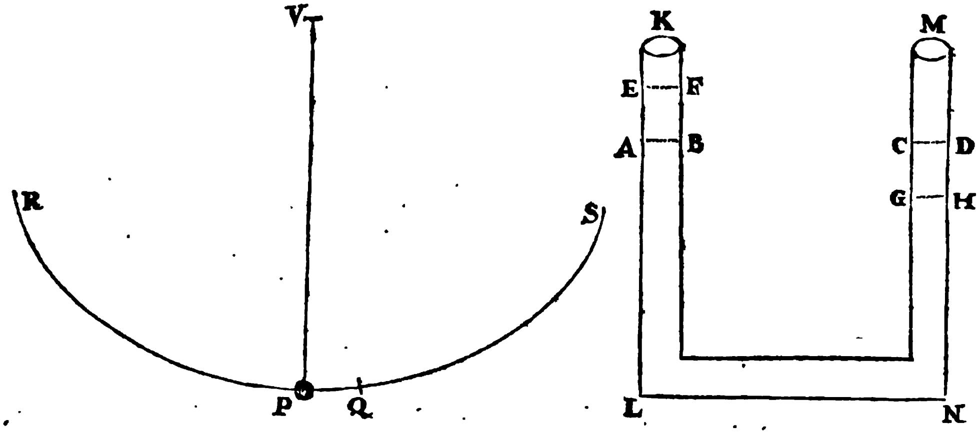
Si aqua in canalis cruribus erectis KL, MN *vicibus alternis aſcendat & deſcendat; conſtruatur autem pendulum cujus longitudo inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis æquetur ſemiſſi longitudinis aquæ in canali: dico quod aqua aſcendet & deſcendet iiſdem temporibus quibus pendulum oſcillatur.*

Longitudinem aquæ menſuro ſecundum axes canalis & crurum, eandem ſummæ horum axium æquando; & reſiſtentiam aquæ, quæ oritur ab attritu canalis, hic non conſidero. Deſignent igitur *AB*, *CD* mediocrem altitudinem aquæ in crure utroque; & ubi aqua



in crure *KL* aſcendit ad altitudinem *EF*, deſcenderit aqua in crure *MN* ad altitudinem *GH*. Sit autem *P* corpus pendulum, *VP* filum, *V* punctum ſuſpenſionis, *RPQS* cyclois quam pendulum deſcribat, *P* ejus punctum infimum, *PQ* arcus altitudini *AE* æqualis.

lis. Vis, qua motus aquæ alternis vicibus acceleratur & retardatur, eſt exceſſus ponderis aquæ in alterutro crure ſupra pondus in altero, ideoque, ubi aqua in crure *KL* aſcendit ad *EF*, & in crure altero deſcendit ad *GH*, vis illa eſt pondus duplicatum aquæ *EABF*, & propterea eſt ad pondus aquæ totius ut *AE* ſeu *PQ* ad *VP* ſeu



PR. Vis etiam, qua pondus *P* in loco quovis *Q* acceleratur & retardatur in cycloide (per corol. prop. LI.) eſt ad ejus pondus totum, ut ejus diſtantia *PQ* a loco infimo *P*, ad cycloidis longitudinem *PR*. Quare aquæ & penduli, æqualia ſpatia *AE*, *PQ* deſcribentium, vires motrices ſunt ut pondera movenda; ideoque, ſi aqua & pendulum in principio quieſcunt, vires illæ movebunt eadem æqualiter temporibus æqualibus, efficientque ut motu reciproco ſimul eant & redeant. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur aquæ aſcendentis & deſcendentis, ſive motus intenſior ſit ſive remiſſior, vices omnes ſunt iſochronæ.

Corol. 2. Si longitudo aquæ totius in canali ſit pedum *Pariſienſium* $6\frac{1}{9}$: aqua tempore minuti unius ſecundi deſcendet, & tempore minuti alterius ſecundi aſcendet; & ſic deinceps vicibus alternis in infinitum. Nam pendulum pedum $3\frac{1}{18}$ longitudinis tempore minuti unius ſecundi oſcillatur.

Corol. 3. Aucta autem vel diminuta longitudine aquæ, augetur vel diminuitur tempus reciprocationis in longitudinis ratione ſubduplicata.

PROPO-

PROPOSITIO XLV. THEOREMA XXXVI.

Undarum velocitas eſt in ſubduplicata ratione latitudinum.

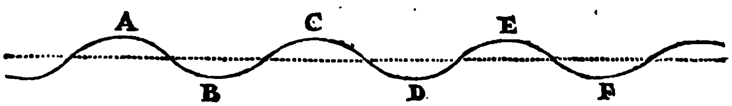
Conſequitur ex conſtructione propoſitionis ſequentis.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA X.

Invenire velocitatem undarum.

Conſtituatur pendulum cujus longitudo, inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis, æquetur latitudini undarum: & quo tempore pendulum illud oſcillationes ſingulas peragit, eodem undæ progrediendo latitudinem ſuam propemodum conficient.

Undarum latitudinem voco menſuram tranſverſam, quæ vel vallibus imis, vel ſummis culminibus interjacet. Deſignet *ABCDEF* ſuperficiem aquæ ſtagnantis, undis ſucceſſivis aſcendentem ac deſcendentem; ſintque *A*, *C*, *E*, &c. undarum culmina, & *B*, *D*, *F*, &c. valles intermedii. Et quoniam motus undarum fit per aquæ ſucceſſivum aſcenſum & deſcenſum, ſic ut ejus partes *A*, *C*, *E*, &c.

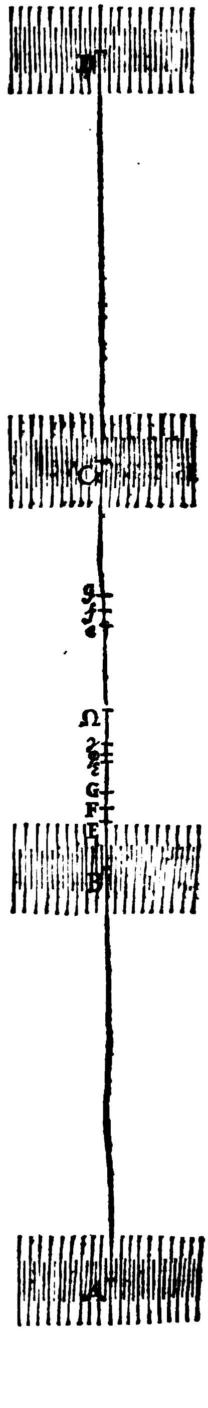


quæ nunc altiſſimæ ſunt, mox fiant infimæ; & vis motrix, qua partes altiſſimæ deſcendunt & infimæ aſcendunt, eſt pondus aquæ elevatæ; alternus ille aſcenſus & deſcenſus analogus erit motui reciproco aquæ in canali, eaſdemque temporis leges obſervabit: & propterea (per prop. XLIV.) ſi diſtantiæ inter undarum loca altiſſima *A*, *C*, *E* & infima *B*, *D*, *F* æquentur duplæ penduli longitudini; partes altiſſimæ *A*, *C*, *E*, tempore oſcillationis unius evadent infimæ, & tempore oſcillationis alterius denuo aſcendent. Igitur inter tranſitum undarum ſingularum tempus erit oſcillationum duarum; hoc eſt, unda deſcribet latitudinem ſuam, quo tempore pendulum illud bis oſcillatur; ſed eodem tempore pendulum, cujus longitudo quadrupla eſt, ideoque æquat undarum latitudinem, oſcillabitur ſemel. *Q. E. I.*

Corol. 1. Igitur undæ, quæ pedes *Pariſienſes* $3\frac{1}{11}$ latæ ſunt, tempore minuti unius ſecundi progrediendo latitudinem ſuam conficient; ideoque tempore minuti unius primi percurrent pedes $183\frac{1}{3}$, & horæ ſpatio pedes 11000 quamproxime.

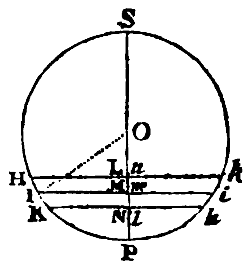
Corol. 2. Et undarum majorum vel minorum velocitas augebitur vel diminuetur in ſubduplicata ratione latitudinis.

Hæc ita ſe habent ex hypotheſi quod partes aquæ recta aſcendunt vel recta deſcendunt; ſed aſcenſus & deſcenſus ille verius fit per circulum, ideoque tempus hac propoſitione non niſi quamproxime definitum eſſe affirmo.



PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

Pulſibus per fluidum propagatis, ſingulæ fluidi particulæ, motu reciproco breviſſimo euntes & redeuntes, accelerantur ſemper & retardantur pro lege oſcillantis penduli.



Deſignent *AB*, *BC*, *CD*, &c. pulſuum ſucceſſivorum æquales diſtantias; *ABC* plagam motus pulſuum ab *A* verſus *B* propagati; *E*, *F*, *G* puncta tria phyſica medii quieſcentis in recta *AC* ad æquales ab invicem diſtantias ſita; *Ee*, *Ff*, *Gg* ſpatia æqualia perbrevia per quæ puncta illa motu reciproco ſingulis vibrationibus eunt & redeunt; ε, φ, γ loca quævis intermedia eorundem punctorum; & *EF*, *FG* lineolas phyſicas ſeu medii partes lineares punctis illis interjectas, & ſucceſſive tranſlatas in loca $\varepsilon\varphi$, $\varphi\gamma$ & *ef*, *fg*. Rectæ *Ee* æqualis ducatur recta *PS*. Biſecetur eadem in *O*, centroque *O* & intervallo *OP* deſcribatur circulus *SIPi*. Per hujus circumferentiam totam cum partibus ſuis exponatur tempus totum vibrationis unius

unius cum ipſius partibus proportionalibus; ſic ut completo tempore quovis PH vel $PHSb$, ſi demittatur ad PS perpendiculum HL vel hl, & capiatur $E\epsilon$ æqualis PL vel Pl, punctum phyſicum E reperiatur in ϵ. Hac lege punctum quodvis E, eundo ab E per ϵ ad e, & inde redeundo per ϵ ad E, iiſdem accelerationis ac retardationis gradibus vibrationes ſingulas peraget cum oſcillante pendulo. Probandum eſt quod ſingula medii puncta phyſica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur medium tali motu a cauſa quacunque cieri, & videamus quid inde ſequatur.

In circumferentia $PHSh$ capiantur æquales arcus HI, IK vel hi, ik, eam habentes rationem ad circumferentiam totam quam habent æquales rectæ EF, FG ad pulſuum intervallum totum BC. Et demiſſis perpendiculis IM, KN vel im, kn; quoniam puncta E, F, G motibus ſimilibus ſucceſſive agitantur, & vibrationes ſuas integras ex itu & reditu compoſitas interea peragunt dum pulſus transfertur a B ad C; ſi PH vel $PHSh$ ſit tempus ab initio motus puncti E, erit PI vel $PHSi$ tempus ab initio motus puncti F, & PK vel $PHSk$ tempus ab initio motus puncti G; & propterea $E\epsilon$, $F\phi$, $G\gamma$ erunt ipſis PL, PM, PN in itu punctorum, vel ipſis Pl, Pm, Pn in punctorum reditu, æquales reſpective. Unde $\epsilon\gamma$ ſeu $EG+G\gamma-E\epsilon$ in itu punctorum æqualis erit $EG-LN$, in reditu autem æqualis $EG+ln$. Sed $\epsilon\gamma$ latitudo eſt ſeu expanſio partis medii EG in loco $\epsilon\gamma$; & propterea expanſio partis illius in itu eſt ad ejus expanſionem mediocrem, ut $EG-LN$ ad EG; in reditu autem ut $EG+ln$ ſeu $EG+LN$ ad EG. Quare cum ſit LN ad KH ut IM ad radium OP, & KH ad EG ut circumferentia $PHShP$ ad BC, id eſt, ſi ponatur V pro radio circuli circumferentiam habentis æqualem intervallo pulſuum BC, ut OP ad V; & ex æquo LN ad EG ut IM ad V: erit expanſio partis EG punctive phyſici F in loco $\epsilon\gamma$ ad expanſionem mediocrem, quam pars illa habet in loco ſuo primo EG, ut $V-IM$ ad V in itu, utque $V+im$ ad V in reditu. Unde vis elaſtica puncti F in loco $\epsilon\gamma$ eſt ad vim ejus elaſticam mediocrem in loco EG, ut $\frac{1}{V-IM}$ ad $\frac{1}{V}$ in itu, in reditu vero ut $\frac{1}{V+im}$ ad $\frac{1}{V}$. Et eodem argumento vires elaſticæ punctorum

phyſico-

phyſicorum E & G in itu, ſunt ut $\frac{1}{V-HL}$ & $\frac{1}{V-KN}$ ad $\frac{1}{V}$; & virium differentia ad medii vim elaſticam mediocrem, ut $\frac{HL-KN}{VV-V\times HL-V\times KN+HL\times KN}$ ad $\frac{1}{V}$. Hoc eſt, ut $\frac{HL-KN}{VV}$ ad $\frac{1}{V}$, ſive ut $HL-KN$ ad V, ſi modo (ob anguſtos limites vibrationum) ſupponamus HL & KN indefinite minores eſſe quantitate V. Quare cum quantitas V detur, differentia virium eſt ut $HL-KN$, hoc eſt (ob proportionales $HL-KN$ ad HK, & OM ad OI vel OP, dataſque HK & OP) ut OM; id eſt, ſi Ff biſecetur in Ω, ut $\Omega\phi$. Et eodem argumento differentia virium elaſticarum punctorum phyſicorum ϵ & γ, in reditu lineolæ phyſicæ $\epsilon\gamma$ eſt ut $\Omega\phi$. Sed differentia illa (id eſt, exceſſus vis elaſticæ puncti ϵ ſupra vim elaſticam puncti γ) eſt vis qua interjecta medii lineola phyſica $\epsilon\gamma$ acceleratur in itu & retardatur in reditu; & propterea vis acceleratrix lineolæ phyſicæ $\epsilon\gamma$, eſt ut ipſius diſtantia a medio vibrationis loco Ω. Proinde tempus (per prop. XXXVIII. lib. I.) recte exponitur per arcum PI; & medii pars linearis $\epsilon\gamma$ lege præſcripta movetur, id eſt, lege oſcillantis penduli: eſtque par ratio partium omnium linearium ex quibus medium totum componitur. *Q. E. D.*

Corol. Hinc patet quod numerus pulſuum propagatorum idem ſit cum numero vibrationum corporis tremuli, neque multiplicatur in eorum progreſſu. Nam lineola phyſica $\epsilon\gamma$, quamprimum ad locum ſuum primum redierit, quieſcet; neque deinceps movebitur, niſi vel ab impetu corporis tremuli, vel ab impetu pulſuum qui a corpore tremulo propagantur, motu novo cieatur. Quieſcet igitur quamprimum pulſus a corpore tremulo propagari deſinunt.

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XXXVIII.

Pulſuum in fluido elaſtico propagatorum velocitates ſunt in ratione compoſita ex ſubduplicata ratione vis elaſticæ directe & ſubduplicata ratione denſitatis inverſe; ſi modo fluidi vis elaſtica ejuſdem condenſationi proportionalis eſſe ſupponatur.

Caſ. I. Si media ſint homogenea, & pulſuum diſtantiæ in his mediis æquentur inter ſe, ſed motus in uno medio intenſior ſit: con-

tractiones

tractiones & dilatationes partium analogarum erunt ut iidem motus. Accurata quidem non eſt hæc proportio. Veruntamen niſi contractiones & dilatationes ſint valde intenſæ, non errabit ſenſibiliter, ideoque pro phyſice accurata haberi poteſt. Sunt autem vires elaſticæ motrices ut contractiones & dilatationes; & velocitates partium æqualium ſimul genitæ ſunt ut vires. Ideoque æquales & correſpondentes pulſuum correſpondentium partes itus & reditus ſuos per ſpatia contractionibus & dilatationibus proportionalia, cum velocitatibus quæ ſunt ut ſpatia, ſimul peragent: & propterea pulſus, qui tempore itus & reditus unius latitudinem ſuam progrediendo conficiunt, & in loca pulſuum proxime præcedentium ſemper ſuccedunt, ob æqualitatem diſtantiarum, æquali cum velocitate in medio utroque progredientur.

Caſ. 2. Sin pulſuum diſtantiæ ſeu longitudines ſint majores in uno medio quam in altero; ponamus quod partes correſpondentes ſpatia latitudinibus pulſuum proportionalia ſingulis vicibus eundo & redeundo deſcribant: & æquales erunt earum contractiones & dilatationes. Ideoque ſi media ſint homogenea, æquales erunt etiam vires illæ elaſticæ motrices quibus reciproco motu agitantur. Materia autem his viribus movenda eſt ut pulſuum latitudo; & in eadem ratione eſt ſpatium per quod ſingulis vicibus eundo & redeundo moveri debent. Eſtque tempus itus & reditus unius in ratione compoſita ex ratione ſubduplicata materiæ & ratione ſubduplicata ſpatii, atque ideo ut ſpatium. Pulſus autem temporibus itus & reditus unius eundo latitudines ſuas conficiunt, hoc eſt, ſpatia temporibus proportionalia percurrunt; & propterea ſunt æquiveloces.

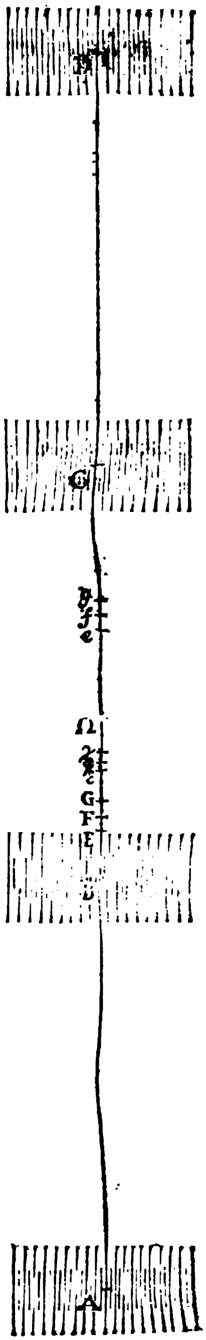
Caſ. 3. In mediis igitur denſitate & vi elaſtica paribus, pulſus omnes ſunt æquiveloces. Quod ſi medii vel denſitas vel vis elaſtica intendatur, quoniam vis motrix in ratione vis elaſticæ, & materia movenda in ratione denſitatis augetur; tempus, quo motus iidem peragantur ac prius, augebitur in ſubduplicata ratione denſitatis, ac diminuetur in ſubduplicata ratione vis elaſticæ. Et propterea velocitas pulſuum erit in ratione compoſita ex ratione ſubduplicata denſitatis medii inverſe & ratione ſubduplicata vis elaſticæ directe. *Q. E. D.*

Hæc propoſitio ulterius patebit ex conſtructione ſequentis.

Bbb PROPO-

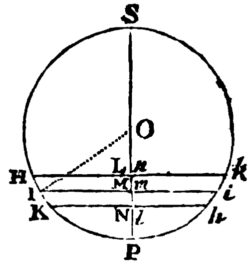
PROPOSITIO XLIX. PROBLEMA XI.

Datis medii denſitate & vi elaſtica, invenire velocitatem pulſuum.



Fingamus medium ab incumbente pondere pro more aëris noſtri comprimi; ſitque A altitudo medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens, & cujus denſitas eadem ſit cum denſitate medii compreſſi, in quo pulſus propagantur. Conſtitui autem intelligatur pendulum, cujus longitudo inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis ſit A: & quo tempore pendulum illud oſcillationem integram ex itu & reditu compoſitam peragit, eodem pulſus eundo conficiet ſpatium circumferentiæ circuli radio A deſcripti æquale.

Nam ſtantibus quæ in propoſitione XLVII. conſtructa ſunt, ſi linea quævis phyſica *EF*, ſingulis vibrationibus deſcribendo ſpatium *PS*, urgeatur in extremis itus & reditus cujuſque locis *P* & *S*, a vi elaſtica quæ ipſius ponderi æquetur; peraget hæc vibrationes ſingulas quo tempore eadem in cycloide, cujus perimeter tota longitudini *PS* æqualis eſt, oſcillari poſſet: id adeo quia vires æquales æqualia corpuſcula per æqualia ſpatia ſimul impellent. Quare cum oſcillationum tempora ſint in ſubduplicata ratione longitudinis pendulorum, & longitudo penduli æquetur dimidio arcui cycloidis totius; foret tempus vibrationis unius ad tempus oſcillationis penduli, cujus longitudo eſt A, in ſubduplicata ratione longitudinis $\frac{1}{2}$ *PS* ſeu *PO* ad longitudinem A. Sed vis elaſtica, qua lineola phyſica *EG*, in locis ſuis extremis *P*, *S* exiſtens, urgetur, erat (in demonſtratione propoſitionis XLVII.) ad ejus vim totam elaſticam ut *HL*—*KN* ad V, hoc eſt (cum punctum *K* jam



K jam incidat in *P*) ut *HK* ad V: & vis illa tota, hoc eſt pondus incumbens, quo lineola *EG* comprimitur, eſt ad pondus lineolæ ut ponderis incumbentis altitudo A ad lineolæ longitudinem *EG*; ideoque ex æquo, vis qua lineola *EG* in locis ſuis *P* & *S* urgetur, eſt ad lineolæ illius pondus ut $HK \times A$ ad $V \times EG$, ſive ut $PO \times A$ ad VV, nam *HK* erat ad *EG* ut *PO* ad V. Quare cum tempora, quibus æqualia corpora per æqualia ſpatia impelluntur, ſint reciproce in ſubduplicata ratione virium, erit tempus vibrationis unius, urgente vi illa elaſtica, ad tempus vibrationis, urgente vi ponderis, in ſubduplicata ratione VV ac $PO \times A$, atque ideo ad tempus oſcillationis penduli cujus longitudo eſt A in ſubduplicata ratione VV ad $PO \times A$, & ſubduplicata ratione *PO* ad A conjunctim; id eſt, in ratione integra V ad A. Sed tempore vibrationis unius ex itu & reditu compoſitæ, pulſus progrediendo conficit latitudinem ſuam *BC*. Ergo tempus, quo pulſus percurrit ſpatium *BC*, eſt ad tempus oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ, ut V ad A, id eſt, ut *BC* ad circumferentiam circuli cujus radius eſt A. Tempus autem, quo pulſus percurret ſpatium *BC*, eſt ad tempus quo percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem, in eadem ratione; ideoque tempore talis oſcillationis pulſus percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem. *Q. E. D.*

Corol. 1. Velocitas pulſuum ea eſt, quam acquirunt gravia æqualiter accelerato motu cadendo, & caſu ſuo deſcribendo dimidium altitudinis A. Nam tempore caſus hujus, cum velocitate cadendo acquiſita, pulſus percurret ſpatium quod erit æquale toti altitudini A; ideoque tempore oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ percurret ſpatium æquale circumferentiæ circuli radio A deſcripti: eſt enim tempus caſus ad tempus oſcillationis ut radius circuli ad ejuſdem circumferentiam.

Corol. 2. Unde cum altitudo illa A ſit ut fluidi vis elaſtica directe & denſitas ejuſdem inverſe; velocitas pulſuum erit in ratione compoſita ex ſubduplicata ratione denſitatis inverſe & ſubduplicata ratione vis elaſticæ directe.

PROPOSITIO L. PROBLEMA XII.

Invenire pulſuum diſtantias.

Corporis, cujus tremore pulſus excitantur, inveniatur numerus vibrationum dato tempore. Per numerum illum dividatur ſpatium quod pulſus eodem tempore percurrere poſſit, & pars inventa erit pulſus unius latitudo. *Q. E. I.*

Scholium.

Spectant propoſitiones noviſſimæ ad motum lucis & ſonorum. Lux enim cum propagetur ſecundum lineas rectas, in actione ſola (per prop. XLI. & XLII.) conſiſtere nequit. Soni vero propterea quod a corporibus tremulis oriantur, nihil aliud ſunt quam aëris pulſus propagati, per prop. XLIII. Confirmatur id ex tremoribus quos excitant in corporibus objectis, ſi modo vehementes *ſint* & graves, quales ſunt ſoni tympanorum. Nam tremores celeriores & breviores difficilius excitantur. Sed & ſonos quoſvis, in chordas corporibus ſonoris uniſonas impactos, excitare tremores notiſſimum eſt. Confirmatur etiam ex velocitate ſonorum. Nam cum pondera ſpecifica aquæ pluvialis & argenti vivi ſint ad invicem ut 1 ad $13\frac{2}{3}$ circiter, & ubi mercurius in *Barometro* altitudinem attingit digitorum *Anglicorum* 30, pondus ſpecificum aëris & aquæ pluvialis ſint ad invicem ut 1 ad 870 circiter: erunt pondera ſpecifica aëris & argenti vivi ut 1 ad 11890. Proinde cum altitudo argenti vivi ſit 30 digitorum, altitudo aëris uniformis, cujus pondus aërem noſtrum ſubjectum comprimere poſſet, erit 356700 digitorum, ſeu pedum *Anglicorum* 29725. Eſtque hæc altitudo illa ipſa quam in conſtructione ſuperioris problematis nominavimus A. Circuli radio 29725 pedum deſcripti circumferentia eſt pedum 186768. Et cum pendulum digitos $39\frac{1}{5}$ longum oſcillationem ex itu & reditu compoſitam tempore minutorum duorum ſecundorum, uti notum eſt, abſolvat; pendulum pedes 29725 ſeu digitos 356700 longum oſcillationem conſimilem tempore minutorum ſecundorum $190\frac{3}{4}$ abſolvere debebit. Eo igitur tempore ſonus progrediendo conficiet pedes 186768, ideoque tempore minuti unius ſecundi pedes 979.

Cæterum

Cæterum in hoc computo nulla habetur ratio craſſitudinis ſolidarum particularum aëris, per quam ſonus utique propagatur in inſtanti. Cum pondus aëris ſit ad pondus aquæ ut 1 ad 870, & ſales ſint fere duplo denſiores quam aqua; ſi particulæ aëris ponantur eſſe ejuſdem circiter denſitatis cum particulis vel aquæ vel ſalium, & raritas aëris oriatur ab intervallis particularum: diameter particulæ aëris erit ad intervallum inter centra particularum, ut 1 ad 9 vel 10 circiter, & ad intervallum inter particulas ut 1 ad 8 vel 9. Proinde ad pedes 979, quos ſonus tempore minuti unius ſecundi juxta calculum ſuperiorem conficiet, addere licet pedes $\frac{979}{9}$ ſeu 109 circiter, ob craſſitudinem particularum aëris: & ſic ſonus tempore minuti unius ſecundi conficiet pedes 1088 circiter.

His adde quod vapores in aëre latentes, cum ſint alterius elateris & alterius toni, vix aut ne vix quidem participant motum aëris veri quo ſoni propagantur. His autem quieſcentibus, motus ille celerius propagabitur per ſolum aërem verum, idque in ſubduplicata ratione minoris materiæ. Ut ſi atmoſphæra conſtet ex decem partibus aëris veri & una parte vaporum, motus ſonorum celerior erit in ſubduplicata ratione 11 ad 10, vel in integra circiter ratione 21 ad 20, quam ſi propagaretur per undecim partes aëris veri: ideoque motus ſonorum ſupra inventus, augendus erit in hac ratione. Quo pacto ſonus, tempore minuti unius ſecundi, conficiet pedes 1142.

Hæc ita ſe habere debent tempore verno & autumnali, ubi aër per calorem temperatum rareſcit & ejus vis elaſtica nonnihil intenditur. At hyberno tempore, ubi aër per frigus condenſatur, & ejus vis elaſtica remittitur, motus ſonorum tardior eſſe debet in ſubduplicata ratione denſitatis; & viciſſim æſtivo tempore debet eſſe velocior.

Conſtat autem per experimenta quod ſoni tempore minuti unius ſecundi eundo conficiunt pedes *Londinenſes* plus minus 1142, *Pariſienſes* vero 1070.

Cognita ſonorum velocitate innoteſcunt etiam intervalla pulſuum. Invenit utique *D. Sauveur*, factis a ſe experimentis, quod fiſtula aperta, cujus longitudo eſt pedum *Pariſienſium* plus minus quinque, ſonum edit ejuſdem toni cum ſono chordæ quæ tempore minuti unius ſecundi centies recurrit. Sunt igitur pulſus plus minus centum in ſpatio pedum *Pariſienſium* 1070, quos ſonus tempore minuti

nuti unius ſecundi percurrit; ideoque pulſus unus occupat ſpatium pedum *Pariſienſium* quaſi $10\frac{7}{11}$, id eſt, duplam circiter longitudinem fiſtulæ. Unde verſimile eſt quod latitudines pulſuum, in omnium apertarum fiſtularum ſonis, æquentur duplis longitudinibus fiſtularum.

Porro cur ſoni ceſſante motu corporis ſonori ſtatim ceſſant, neque diutius audiuntur ubi longiſſime diſtamus a corporibus ſonoris, quam cum proxime abſumus, patet ex corollario propoſitionis XLVII. libri hujus. Sed & cur ſoni in tubis ſtentorophonicis valde augentur ex allatis principiis manifeſtum eſt. Motus enim omnis reciprocus ſingulis recurſibus a cauſa generante augeri ſolet. Motus autem in tubis dilatationem ſonorum impedientibus, tardius amittitur & fortius recurrit, & propterea a motu novo ſingulis recurſibus impreſſo magis augetur. Et hæc ſunt præcipua phænomena ſonorum.

SECTIO IX.

De motu circulari fluidorum.

HYPOTHESIS.

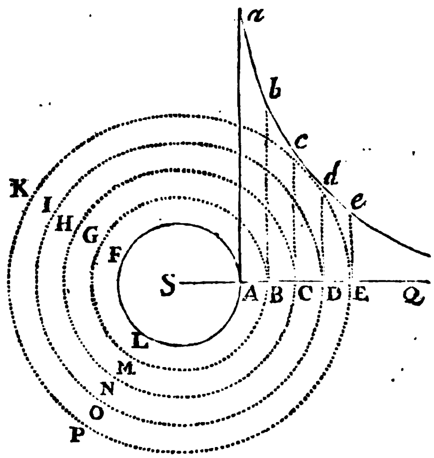
Reſiſtentiam, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, cæteris paribus, proportionalem eſſe velocitati, qua partes fluidi ſeparantur ab invicem.

PROPOSITIO LI. THEOREMA XXXIX.

Si cylindrus ſolidus infinite longus in fluido uniformi & infinito circa axem poſitione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulſu ſolo agatur fluidum in orbem, perſeveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu ſuo; dico quod tempora periodica partium fluidi ſunt ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindri.

Sit *AFL* cylindrus uniformiter circa axem *S* in orbem actus, & circulis concentricis *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c. diſtinguatur fluidum

fluidum in orbes cylindricos innumeros concentricos ſolidos ejuſdem craſſitudinis. Et quoniam homogeneum eſt fluidum, impreſſiones contiguorum orbium in ſe mutuo factæ erunt (per hypotheſin) ut eorum tranſlationes ab invicem, & ſuperficies contiguæ in quibus impreſſiones fiunt. Si impreſſio in orbem aliquem major eſt vel minor ex parte concava quam ex parte convexa; prævalebit impreſſio fortior, & motum orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipſius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut orbis unuſquiſque in motu ſuo uniformiter perſeveret, debent impreſſiones ex parte utraque ſibi invicem æquari & fieri in regiones contrarias. Unde cum impreſſiones ſunt ut contiguæ ſuperficies & harum tranſlationes ab invicem, erunt tranſlationes inverſe ut ſuperficies, hoc eſt, inverſe ut ſuperficierum diſtantiæ ab axe. Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ tranſlationes applicatæ ad diſtantias, ſive ut tranſlationes directe & diſtantiæ inverſe; hoc eſt, conjunctis rationibus, ut quadrata diſtantiarum inverſe. Quare ſi ad infinitæ rectæ *SABCDEQ* partes ſingulas erigantur perpendicula *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, &c. ipſarum *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE*, &c. quadratis reciproce proportionalia, & per terminos perpendicularium duci intelligatur linea curva hyperbolica; erunt ſummæ differentiarum, hoc eſt, motus toti angulares, ut reſpondentes ſummæ linearum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, id eſt, ſi ad conſtituendum medium uniformiter fluidum, orbium numerus augeatur & latitudo minuatur in infinitum, ut areæ hyperbolicæ his ſummis analogæ *AaQ*, *BbQ*, *CcQ*, *DdQ*, *EeQ*, &c. Et tempora motibus angularibus reciproce proportionalia, erunt etiam his areis reciproce proportionalia. Eſt igitur tempus periodicum particulæ cujuſvis *D* reciproce ut area *DdQ*, hoc eſt (per notas curvarum quadraturas) directe ut diſtantia *SD*. *Q. E. D.*



Corol. 1. Hinc motus angulares particularum fluidi ſunt reciproce ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindri, & velocitates abſolutæ ſunt æquales.

Corol.

Corol. 2. Si fluidum in vaſe cylindrico longitudinis infinitæ contineatur, & cylindrum alium interiorem contineat, revolvatur autem cylindrus uterque circa axem communem, ſintque revolutionum tempora ut ipſorum ſemidiametri, & perſeveret fluidi pars unaquæque in motu ſuo: erunt partium ſingularum tempora periodica ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindrorum.

Corol. 3. Si cylindro & fluido ad hunc modum motis addatur vel auferatur communis quilibet motus angularis; quoniam hoc novo motu non mutatur attritus mutuus partium fluidi, non mutabuntur motus partium inter ſe. Nam tranſlationes partium ab invicem pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perſeverabit motu, qui, attritu utrinque in contrarias partes facto, non magis acceleratur quam retardatur.

Corol. 4. Unde ſi toti cylindrorum & fluidi ſyſtemati auferatur motus omnis angularis cylindri exterioris, habebitur motus fluidi in cylindro quieſcente.

Corol. 5. Igitur ſi fluido & cylindro exteriore quieſcentibus, revolvatur cylindrus interior uniformiter; communicabitur motus circularis fluido, & paulatim per totum fluidum propagabitur; nec prius deſinet augeri quam fluidi partes ſingulæ motum corollario quarto definitum acquirant.

Corol. 6. Et quoniam fluidum conatur motum ſuum adhuc latius propagare, hujus impetu circumagetur etiam cylindrus exterior niſi violenter detentus; & accelerabitur ejus motus quoad uſque tempora periodica cylindri utriuſque æquentur inter ſe. Quod ſi cylindrus exterior violenter detineatur, conabitur is motum fluidi retardare; & niſi cylindrus interior vi aliqua extrinſecus impreſſa motum illum conſervet, efficiet ut idem paulatim ceſſet.

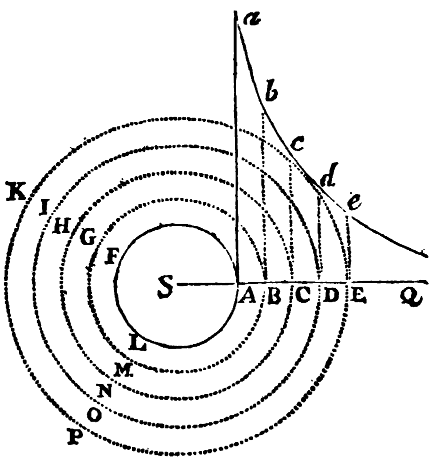
Quæ omnia in aqua profunda ſtagnante experiri licet.

PROPO-

PROPOSITIO LII. THEOREMA XL.

Si ſphæra ſolida, in fluido uniformi & infinito, circa axem poſitione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulſu ſolo agatur fluidum in orbem; perſeveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu ſuo: dico quod tempora periodica partium fluidi erunt ut quadrata diſtantiarum a centro ſphæræ.

Caſ. 1. Sit *AFL* ſphæra uniformiter circa axem *S* in orbem acta, & circulis concentricis *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c. diſtinguatur fluidum in orbes innumeros concentricos ejuſdem craſſitudinis. Finge autem orbes illos eſſe ſolidos; & quoniam homogeneum eſt fluidum, impreſſiones contiguorum orbium in ſe mutuo factæ, erunt (per hypotheſin) ut eorum tranſlationes ab invicem & ſuperficies contiguæ in quibus impreſſiones fiunt. Si impreſſio in orbem aliquem major eſt vel minor ex parte concava quam ex parte convexa; prævalebit impreſſio fortior, & velocitatem orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipſius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut orbis unuſquiſque in motu ſuo perſeveret uniformiter, debebunt impreſſiones ex parte utraque ſibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cum impreſſiones ſint ut contiguæ ſuperficies & harum tranſlationes ab invicem; erunt tranſlationes inverſe ut ſuperficies, hoc eſt, inverſe ut quadrata diſtantiarum ſuperficierum a centro. Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ tranſlationes applicatæ ad diſtantias, ſive ut tranſlationes directe & diſtantiæ inverſe; hoc eſt, conjunctis rationibus ut cubi diſtantiarum inverſe. Quare ſi ad rectæ infinitæ *SABCDEQ* partes ſingulas erigantur perpendicula *Aa*, *Bb*, *Cc*,



Corol. 2. Si fluidum in vaſe cylindrico longitudinis infinitæ contineatur, & cylindrum alium interiorem contineat, revolvatur autem cylindrus uterque circa axem communem, ſintque revolutionum tempora ut ipſorum ſemidiametri, & perſeveret fluidi pars unaquæque in motu ſuo: erunt partium ſingularum tempora periodica ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindrorum.

Corol. 3. Si cylindro & fluido ad hunc modum motis addatur vel auferatur communis quilibet motus angularis; quoniam hoc novo motu non mutatur attritus mutuus partium fluidi, non mutabuntur motus partium inter ſe. Nam tranſlationes partium ab invicem pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perſeverabit motu, qui, attritu utrinque in contrarias partes facto, non magis acceleratur quam retardatur.

Corol. 4. Unde ſi toti cylindrorum & fluidi ſyſtemati auferatur motus omnis angularis cylindri exterioris, habebitur motus fluidi in cylindro quieſcente.

Corol. 5. Igitur ſi fluido & cylindro exteriore quieſcentibus, revolvatur cylindrus interior uniformiter; communicabitur motus circularis fluido, & paulatim per totum fluidum propagabitur; nec prius deſinet augeri quam fluidi partes ſingulæ motum corollario quarto definitum acquirant.

Corol. 6. Et quoniam fluidum conatur motum ſuum adhuc latius propagare, hujus impetu circumagetur etiam cylindrus exterior niſi violenter detentus; & accelerabitur ejus motus quoad uſque tempora periodica cylindri utriuſque æquentur inter ſe. Quod ſi cylindrus exterior violenter detineatur, conabitur is motum fluidi retardare; & niſi cylindrus interior vi aliqua extrinſecus impreſſa motum illum conſervet, efficiet ut idem paulatim ceſſet.

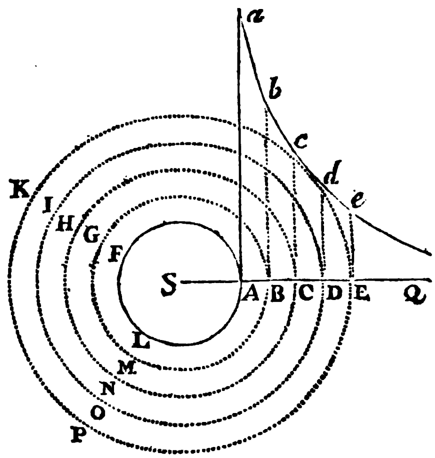
Quæ omnia in aqua profunda ſtagnante experiri licet.

PROPO-

PROPOSITIO LII. THEOREMA XL.

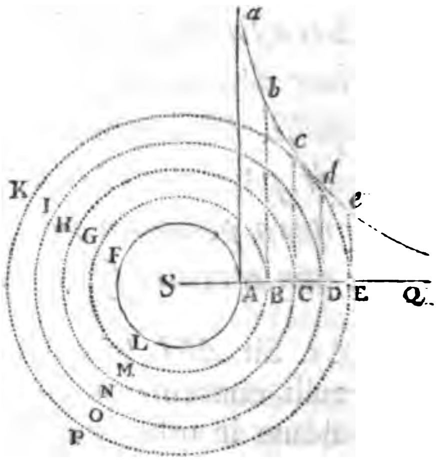
Si ſphæra ſolida, in fluido uniformi & infinito, circa axem poſitione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulſu ſolo agatur fluidum in orbem; perſeveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu ſuo: dico quod tempora periodica partium fluidi erunt ut quadrata diſtantiarum a centro ſphæræ.

Caſ. 1. Sit *AFL* ſphæra uniformiter circa axem *S* in orbem acta, & circulis concentricis *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c. diſtinguatur fluidum in orbes innumeros concentricos ejuſdem craſſitudinis. Finge autem orbes illos eſſe ſolidos; & quoniam homogeneum eſt fluidum, impreſſiones contiguorum orbium in ſe mutuo factæ, erunt (per hypotheſin) ut eorum tranſlationes ab invicem & ſuperficies contiguæ in quibus impreſſiones fiunt. Si impreſſio in orbem aliquem major eſt vel minor ex parte concava quam ex parte convexa; prævalebit impreſſio fortior, & velocitatem orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipſius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut orbis unuſquiſque in motu ſuo perſeveret uniformiter, debebunt impreſſiones ex parte utraque ſibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cum impreſſiones ſint ut contiguæ ſuperficies & harum tranſlationes ab invicem; erunt tranſlationes inverſe ut ſuperficies, hoc eſt, inverſe ut quadrata diſtantiarum ſuperficierum a centro. Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ tranſlationes applicatæ ad diſtantias, ſive ut tranſlationes directe & diſtantiæ inverſe; hoc eſt, conjunctis rationibus ut cubi diſtantiarum inverſe. Quare ſi ad rectæ infinitæ *SABCDEQ* partes ſingulas erigantur perpendicula *Aa*, *Bb*, *Cc*,



De Motu Corporum

Dd, *Ee*, &c. ipſarum *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE*, &c. cubis reciproce proportionalia, erunt ſummæ differentiarum, hoc eſt, motus totius angulares, ut reſpondentes ſummæ linearum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*: id eſt (ſi ad conſtituendum medium uniformiter fluidum, numerus orbium augeatur & latitudo minuatur in infinitum) ut areæ hyperbolicæ his ſummis analogæ *AaQ*, *BbQ*, *CcQ*, *DdQ*, *EeQ*, &c. Et tempora periodica motibus angularibus reciproce proportionalia erunt etiam his areis reciproce proportionalia. Eſt igitur tempus periodicum orbis cujuſvis *DIO* reciproce ut area *DdQ*, hoc eſt, per notas curvarum quadraturas, directe ut quadratum diſtantiæ *SD*. Id quod volui primo demonſtrare.



Caſ. 2. A centro ſphæræ ducantur infinitæ rectæ quam plurimæ, quæ cum axe datos contineant angulos, æqualibus differentiis ſe mutuo ſuperantes; & his rectis circa axem revolutis concipe orbes in annulos innumeros ſecari; & annulus unuſquiſque habebit annulos quatuor ſibi contiguos, unum interiorem, alterum exteriorem & duos laterales. Attritu interioris & exterioris non poteſt annulus unuſquiſque, niſi in motu juxta legem caſus primi facto, æqualiter & in partes contrarias urgeri. Patet hoc ex demonſtratione caſus primi. Et propterea annulorum ſeries quælibet a globo in infinitum recta pergens, movebitur pro lege caſus primi, niſi quatenus impeditur ab attritu annulorum ad latera. At in motu hac lege facto attritus annulorum ad latera nullus eſt; neque ideo motum, quo minus hac lege fiat, impediet. Si annuli, qui a centro æqualiter diſtant, vel citius revolverentur vel tardius juxta polos quam juxta eclipticam; tardiores accelerarentur, & velociores retardarentur ab attritu mutuo, & ſic vergerent ſemper tempora periodica ad æqualitatem, pro lege caſus primi. Non impedit igitur hic attritus quo minus motus fiat ſecundum legem caſus primi, & propterea lex illa obtinebit: hoc eſt, annulorum ſingulorum tempora periodica erunt ut quadrata diſtantiarum ipſorum a centro globi. Quod volui ſecundo demonſtrare.

Caſ.

Caſ. 3. Dividatur jam annulus unuſquiſque ſectionibus tranſverſis in particulas innumeras conſtituentes ſubſtantiam abſolute & uniformiter fluidam; & quoniam hæ ſectiones non ſpectant ad legem motus circularis, ſed ad conſtitutionem fluidi ſolummodo conducunt, perſeverabit motus circularis ut prius. His ſectionibus annuli omnes quam minimi aſperitatem & vim attritus mutui aut non mutabunt, aut mutabunt æqualiter. Et manente cauſarum proportione manebit effectuum proportio, hoc eſt, proportio motuum & periodicorum temporum. *Q. E. D.* Cæterum cum motus circularis, & inde orta vis centrifuga, major ſit ad eclipticam quam ad polos; debebit cauſa aliqua adeſſe qua particulæ ſingulæ in circulis ſuis retineantur; ne materia, quæ ad eclipticam eſt, recedat ſemper a centro & per exteriora vorticis migret ad polos, indeque per axem ad eclipticam circulatione perpetua revertatur.

Corol. 1. Hinc motus angulares partium fluidi circa axem globi, ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a centro globi, & velocitates abſolutæ reciproce ut eadem quadrata applicata ad diſtantias ab axe.

Corol. 2. Si globus in fluido quieſcente ſimilari & infinito circa axem poſitione datum uniformi cum motu revolvatur, communicabitur motus fluido in morem vorticis, & motus iſte paulatim propagabitur in infinitum; neque prius ceſſabit in ſingulis fluidi partibus accelerari, quam tempora periodica ſingularum partium ſint ut quadrata diſtantiarum a centro globi.

Corol. 3. Quoniam vorticis partes interiores ob majorem ſuam velocitatem atterunt & urgent exteriores, motumque ipſis ea actione perpetuo communicant, & exteriores illi eandem motus quantitatem in alios adhuc exteriores ſimul transferunt, eaque actione ſervant quantitatem motus ſui plane invariatam; patet quod motus perpetuo transfertur a centro ad circumferentiam vorticis, & per infinitatem circumferentiæ abſorbetur. Materia inter ſphæricas duas quaſvis ſuperficies vortici concentricas nunquam accelerabitur, eo quod motum omnem a materia interiore acceptum transfert ſemper in exteriorem.

Corol. 4. Proinde ad conſervationem vorticis conſtanter in eodem movendi ſtatu, requiritur principium aliquod activum, a quo globus eandem ſemper quantitatem motus accipiat, quam imprimit in ma-

DE MOTU CORPORUM teriam vorticis. Sine tali principio neceſſe eſt ut globus & vorticis partes interiores, propagantes ſemper motum ſuum in exteriores, neque novum aliquem motum recipientes, tardeſcant paulatim & in orbem agi deſinant.

Corol. 5. Si globus alter huic vortici ad certam ab ipſius centro diſtantiam innataret, & interea circa axem inclinatione datum vi aliqua conſtanter revolveretur; hujus motu raperetur fluidum in vorticem: & primo revolveretur hic vortex novus & exiguus una cum globo circa centrum alterius, & interea latius ſerperet ipſius motus, & paulatim propagaretur in infinitum, ad modum vorticis primi. Et eadem ratione, qua hujus globus raperetur motu vorticis alterius, raperetur etiam globus alterius motu hujus, ſic ut globi duo circa intermedium aliquod punctum revolverentur, ſeque mutuo ob motum illum circularem fugerent, niſi per vim aliquam cohibiti. Poſtea ſi vires conſtanter impreſſæ, quibus globi in motibus ſuis perſeverant, ceſſarent, & omnia legibus mechanicis permitterentur, langueſceret paulatim motus globorum (ob rationem in corol. 3. & 4. aſſignatam) & vortices tandem conquieſcerent.

Corol. 6. Si globi plures datis in locis circum axes poſitione datos certis cum velocitatibus conſtanter revolverentur, fierent vortices totidem in infinitum pergentes. Nam globi ſinguli eadem ratione, qua unus aliquis motum ſuum propagat in infinitum, propagabunt etiam motus ſuos in infinitum, adeo ut fluidi infiniti pars unaquæque eo agitetur motu qui ex omnium globorum actionibus reſultat. Unde vortices non definientur certis limitibus, ſed in ſe mutuo paulatim excurrent; globique per actiones vorticum in ſe mutuo perpetuo movebuntur de locis ſuis, uti in corollario ſuperiore expoſitum eſt; neque certam quamvis inter ſe poſitionem ſervabunt, niſi per vim aliquam retenti. Ceſſantibus autem viribus illis quæ in globos conſtanter impreſſæ conſervant hoſce motus, materia ob rationem in corollario tertio & quarto aſſignatam, paulatim requieſcet & in vortices agi deſinet.

Corol. 7. Si fluidum ſimilare claudatur in vaſe ſphærico, ac globi in centro conſiſtentis uniformi rotatione agatur in vorticem, globus autem & vas in eandem partem circa axem eundem revolvantur, ſintque eorum tempora periodica ut quadrata ſemidiametrorum: partes fluidi non prius perſeverabunt in motibus ſuis ſine accelera-

tione

tione & retardatione, quam ſint eorum tempora periodica ut quadrata diſtantiarum a centro vorticis. Alia nulla vorticis conſtitutio poteſt eſſe permanens.

Corol. 8. Si vas, fluidum incluſum, & globus ſervent hunc motum, & motu præterea communi angulari circa axem quemvis datum revolvantur; quoniam hoc motu novo non mutatur attritus partium fluidi in ſe invicem, non mutabuntur motus partium inter ſe. Nam tranſlationes partium inter ſe pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perſeverabit motu, quo fit ut attritu ex uno latere non magis tardetur quam acceleretur attritu ex altero.

Corol. 9. Unde ſi vas quieſcat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi. Nam concipe planum tranſire per axem globi & motu contrario revolvi; & pone ſummam temporis revolutionis hujus & revolutionis globi eſſe ad tempus revolutionis globi, ut quadratum ſemidiametri vaſis ad quadratum ſemidiametri globi: & tempora periodica partium fluidi reſpectu plani hujus erunt ut quadrata diſtantiarum ſuarum a centro globi.

Corol. 10. Proinde ſi vas vel circa axem eundem cum globo, vel circa diverſum aliquem data cum velocitate quacunque moveatur, dabitur motus fluidi. Nam ſi ſyſtemati toti auferatur vaſis motus angularis, manebunt motus omnes iidem inter ſe qui prius, per corol. VIII. Et motus iſti per corol. IX. dabuntur.

Corol. 11. Si vas & fluidum quieſcant & globus uniformi cum motu revolvatur, propagabitur motus paulatim per fluidum totum in vas, & circumagetur vas niſi violenter detentum, neque prius deſinent fluidum & vas accelerari, quam ſint eorum tempora periodica æqualia temporibus periodicis globi. Quod ſi vas vi aliqua detineatur vel revolvatur motu quovis conſtanti & uniformi, deveniet medium paulatim ad ſtatum motus in corollariis VIII. IX. & X. definiti, nec in alio unquam ſtatu quocunque perſeverabit. Deinde vero ſi, viribus illis ceſſantibus quibus vas & globus certis motibus revolvebantur, permittatur ſyſtema totum legibus mechanicis; vas & globus in ſe invicem agent mediante fluido, neque motus ſuos in ſe mutuo per fluidum propagare prius ceſſabunt, quam eorum tempora periodica æquentur inter ſe, & ſyſtema totum ad inſtar corporis unius ſolidi ſimul revolvatur.

teriam vorticis. Sine tali principio neceſſe eſt ut globus & vorticis partes interiores, propagantes ſemper motum ſuum in exteriores, neque novum aliquem motum recipientes, tardeſcant paulatim & in orbem agi deſinant.

Corol. 5. Si globus alter huic vortici ad certam ab ipſius centro diſtantiam innataret, & interea circa axem inclinatione datum vi aliqua conſtanter revolveretur; hujus motu raperetur fluidum in vorticem: & primo revolveretur hic vortex novus & exiguus una cum globo circa centrum alterius, & interea latius ſerperet ipſius motus, & paulatim propagaretur in infinitum, ad modum vorticis primi. Et eadem ratione, qua hujus globus raperetur motu vorticis alterius, raperetur etiam globus alterius motu hujus, ſic ut globi duo circa intermedium aliquod punctum revolverentur, ſeque mutuo ob motum illum circularem fugerent, niſi per vim aliquam cohibiti. Poſtea ſi vires conſtanter impreſſæ, quibus globi in motibus ſuis perſeverant, ceſſarent, & omnia legibus mechanicis permitterentur, langueſceret paulatim motus globorum (ob rationem in corol. 3. & 4. aſſignatam) & vortices tandem conquieſcerent.

Corol. 6. Si globi plures datis in locis circum axes poſitione datos certis cum velocitatibus conſtanter revolverentur, fierent vortices totidem in infinitum pergentes. Nam globi ſinguli eadem ratione, qua unus aliquis motum ſuum propagat in infinitum, propagabunt etiam motus ſuos in infinitum, adeo ut fluidi infiniti pars unaquæque eo agitetur motu qui ex omnium globorum actionibus reſultat. Unde vortices non definientur certis limitibus, ſed in ſe mutuo paulatim excurrent; globique per actiones vorticum in ſe mutuo perpetuo movebuntur de locis ſuis, uti in corollario ſuperiore expoſitum eſt; neque certam quamvis inter ſe poſitionem ſervabunt, niſi per vim aliquam retenti. Ceſſantibus autem viribus illis quæ in globos conſtanter impreſſæ conſervant hoſce motus, materia ob rationem in corollario tertio & quarto aſſignatam, paulatim requieſcet & in vortices agi deſinet.

Corol. 7. Si fluidum ſimilare claudatur in vaſe ſphærico, ac globi in centro conſiſtentis uniformi rotatione agatur in vorticem, globus autem & vas in eandem partem circa axem eundem revolvantur, ſintque eorum tempora periodica ut quadrata ſemidiametrorum: partes fluidi non prius perſeverabunt in motibus ſuis ſine accelera-

tione

tione & retardatione, quam ſint eorum tempora periodica ut quadrata diſtantiarum a centro vorticis. Alia nulla vorticis conſtitutio poteſt eſſe permanens.

Corol. 8. Si vas, fluidum incluſum, & globus ſervent hunc motum, & motu præterea communi angulari circa axem quemvis datum revolvantur; quoniam hoc motu novo non mutatur attritus partium fluidi in ſe invicem, non mutabuntur motus partium inter ſe. Nam tranſlationes partium inter ſe pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perſeverabit motu, quo fit ut attritu ex uno latere non magis tardetur quam acceleretur attritu ex altero.

Corol. 9. Unde ſi vas quieſcat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi. Nam concipe planum tranſire per axem globi & motu contrario revolvi; & pone ſummam temporis revolutionis hujus & revolutionis globi eſſe ad tempus revolutionis globi, ut quadratum ſemidiametri vaſis ad quadratum ſemidiametri globi: & tempora periodica partium fluidi reſpectu plani hujus erunt ut quadrata diſtantiarum ſuarum a centro globi.

Corol. 10. Proinde ſi vas vel circa axem eundem cum globo, vel circa diverſum aliquem data cum velocitate quacunque moveatur, dabitur motus fluidi. Nam ſi ſyſtemati toti auferatur vaſis motus angularis, manebunt motus omnes iidem inter ſe qui prius, per corol. VIII. Et motus iſti per corol. IX. dabuntur.

Corol. 11. Si vas & fluidum quieſcant & globus uniformi cum motu revolvatur, propagabitur motus paulatim per fluidum totum in vas, & circumagetur vas niſi violenter detentum, neque prius deſinent fluidum & vas accelerari, quam ſint eorum tempora periodica æqualia temporibus periodicis globi. Quod ſi vas vi aliqua detineatur vel revolvatur motu quovis conſtanti & uniformi, deveniet medium paulatim ad ſtatum motus in corollariis VIII. IX. & X. definiti, nec in alio unquam ſtatu quocunque perſeverabit. Deinde vero ſi, viribus illis ceſſantibus quibus vas & globus certis motibus revolvebantur, permittatur ſyſtema totum legibus mechanicis; vas & globus in ſe invicem agent mediante fluido, neque motus ſuos in ſe mutuo per fluidum propagare prius ceſſabunt, quam eorum tempora periodica æquentur inter ſe, & ſyſtema totum ad inſtar corporis unius ſolidi ſimul revolvatur.

teriam vorticis. Sine tali principio neceſſe eſt ut globus & vorticis partes interiores, propagantes ſemper motum ſuum in exteriores, neque novum aliquem motum recipientes, tardeſcant paulatim & in orbem agi deſinant.

Corol. 5. Si globus alter huic vortici ad certam ab ipſius centro diſtantiam innataret, & interea circa axem inclinatione datum vi aliqua conſtanter revolveretur; hujus motu raperetur fluidum in vorticem: & primo revolveretur hic vortex novus & exiguus una cum globo circa centrum alterius, & interea latius ſerperet ipſius motus, & paulatim propagaretur in infinitum, ad modum vorticis primi. Et eadem ratione, qua hujus globus raperetur motu vorticis alterius, raperetur etiam globus alterius motu hujus, ſic ut globi duo circa intermedium aliquod punctum revolverentur, ſeque mutuo ob motum illum circularem fugerent, niſi per vim aliquam cohibiti. Poſtea ſi vires conſtanter impreſſæ, quibus globi in motibus ſuis perſeverant, ceſſarent, & omnia legibus mechanicis permitterentur, langueſceret paulatim motus globorum (ob rationem in corol. 3. & 4. aſſignatam) & vortices tandem conquieſcerent.

Corol. 6. Si globi plures datis in locis circum axes poſitione datos certis cum velocitatibus conſtanter revolverentur, fierent vortices totidem in infinitum pergentes. Nam globi ſinguli eadem ratione, qua unus aliquis motum ſuum propagat in infinitum, propagabunt etiam motus ſuos in infinitum, adeo ut fluidi infiniti pars unaquæque eo agitetur motu qui ex omnium globorum actionibus reſultat. Unde vortices non definientur certis limitibus, ſed in ſe mutuo paulatim excurrent; globique per actiones vorticum in ſe mutuo perpetuo movebuntur de locis ſuis, uti in corollario ſuperiore expoſitum eſt; neque certam quamvis inter ſe poſitionem ſervabunt, niſi per vim aliquam retenti. Ceſſantibus autem viribus illis quæ in globos conſtanter impreſſæ conſervant hoſce motus, materia ob rationem in corollario tertio & quarto aſſignatam, paulatim requieſcet & in vortices agi deſinet.

Corol. 7. Si fluidum ſimilare claudatur in vaſe ſphærico, ac globi in centro conſiſtentis uniformi rotatione agatur in vorticem, globus autem & vas in eandem partem circa axem eundem revolvantur, ſintque eorum tempora periodica ut quadrata ſemidiametrorum: partes fluidi non prius perſeverabunt in motibus ſuis ſine accelera-

tione

tione & retardatione, quam ſint eorum tempora periodica ut quadrata diſtantiarum a centro vorticis. Alia nulla vorticis conſtitutio poteſt eſſe permanens.

Corol. 8. Si vas, fluidum incluſum, & globus ſervent hunc motum, & motu præterea communi angulari circa axem quemvis datum revolvantur; quoniam hoc motu novo non mutatur attritus partium fluidi in ſe invicem, non mutabuntur motus partium inter ſe. Nam tranſlationes partium inter ſe pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perſeverabit motu, quo fit ut attritu ex uno latere non magis tardetur quam acceleretur attritu ex altero.

Corol. 9. Unde ſi vas quieſcat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi. Nam concipe planum tranſire per axem globi & motu contrario revolvi; & pone ſummam temporis revolutionis hujus & revolutionis globi eſſe ad tempus revolutionis globi, ut quadratum ſemidiametri vaſis ad quadratum ſemidiametri globi: & tempora periodica partium fluidi reſpectu plani hujus erunt ut quadrata diſtantiarum ſuarum a centro globi.

Corol. 10. Proinde ſi vas vel circa axem eundem cum globo, vel circa diverſum aliquem data cum velocitate quacunque moveatur, dabitur motus fluidi. Nam ſi ſyſtemati toti auferatur vaſis motus angularis, manebunt motus omnes iidem inter ſe qui prius, per corol. VIII. Et motus iſti per corol. IX. dabuntur.

Corol. 11. Si vas & fluidum quieſcant & globus uniformi cum motu revolvatur, propagabitur motus paulatim per fluidum totum in vas, & circumagetur vas niſi violenter detentum, neque prius deſinent fluidum & vas accelerari, quam ſint eorum tempora periodica æqualia temporibus periodicis globi. Quod ſi vas vi aliqua detineatur vel revolvatur motu quovis conſtanti & uniformi, deveniet medium paulatim ad ſtatum motus in corollariis VIII. IX. & X. definiti, nec in alio unquam ſtatu quocunque perſeverabit. Deinde vero ſi, viribus illis ceſſantibus quibus vas & globus certis motibus revolvebantur, permittatur ſyſtema totum legibus mechanicis; vas & globus in ſe invicem agent mediante fluido, neque motus ſuos in ſe mutuo per fluidum propagare prius ceſſabunt, quam eorum tempora periodica æquentur inter ſe, & ſyſtema totum ad inſtar corporis unius ſolidi ſimul revolvatur.

Scholium.

In his omnibus ſuppono fluidum ex materia quoad denſitatem & fluiditatem uniformi conſtare. Tale eſt in quo globus idem eodem cum motu, in eodem temporis intervallo, motus ſimiles & æquales, ad æquales ſemper a ſe diſtantias, ubivis in fluido conſtitutus, propagare poſſit. Conatur quidem materia per motum ſuum circularem recedere ab axe vorticis, & propterea premit materiam omnem ulteriorem. Ex hac preſſione fit attritus partium fortior & ſeparatio ab invicem difficilior; & per conſequens diminuitur materiæ fluiditas. Rurſus ſi partes fluidi ſunt alicubi craſſiores ſeu majores, fluiditas ibi minor erit, ob pauciores ſuperficies in quibus partes ſeparentur ab invicem. In hujuſmodi caſibus deficientem fluiditatem vel lubricitate partium vel lentore aliave aliqua conditione reſtitui ſuppono. Hoc niſi fiat, materia ubi minus fluida eſt magis cohærebit & ſegnior erit, ideoque motum tardius recipiet & longius propagabit quam pro ratione ſuperius aſſignata. Si figura vaſis non ſit ſphærica, movebuntur particulæ in lineis non circularibus ſed conformibus eidem vaſis figuræ, & tempora periodica erunt ut quadrata mediocrium diſtantiarum a centro quamproxime. In partibus inter centrum & circumferentiam, ubi latiora ſunt ſpatia, tardiores erunt motus, ubi anguſtiora velociores, neque tamen particulæ velociores petent circumferentiam. Arcus enim deſcribent minus curvos, & conatus recedendi a centro non minus diminuetur per decrementum hujus curvaturæ, quam augebitur per incrementum velocitatis. Pergendo a ſpatiis anguſtioribus in latiora recedent paulo longius a centro, ſed iſto receſſu tardeſcent; & accedendo poſtea de latioribus ad anguſtiora accelerabuntur, & ſic per vices tardeſcent & accelerabuntur particulæ ſingulæ in perpetuum. Hæc ita ſe habebunt in vaſe rigido. Nam in fluido infinito conſtitutio vorticum innoteſcit per propoſitionis hujus corollarium ſextum.

Proprietates autem vorticum hac propoſitione inveſtigare conatus ſum, ut pertentarem ſiqua ratione phænomena cœleſtia per vortices explicari poſſint. Nam phænomenon eſt, quod planetarum circa jovem revolventium tempora periodica ſunt in ratione ſeſquiplicata diſtantiarum a centro jovis; & eadem regula obtinet in planetis qui circa ſolem revolvuntur. Obtinent autem hæ regulæ in plane-

tis

ris utriſque quam accuratiſſime, quatenus obſervationes aſtronomicæ hactenus prodidere. Ideoque ſi planetæ illi a vorticibus circa jovem & ſolem revolventibus deferantur, debebunt etiam hi vortices eadem lege revolvi. Verum tempora periodica partium vorticis prodierunt in ratione duplicata diſtantiarum a centro motus: neque poteſt ratio illa diminui & ad rationem ſeſquiplicatam reduci, niſi vel materia vorticis eo fluidior ſit quo longius diſtat a centro, vel reſiſtentia, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, ex aucta velocitate qua partes fluidi ſeparantur ab invicem, augeatur in majori ratione quam ea eſt in qua velocitas augetur. Quorum tamen neutrum rationi conſentaneum videtur. Partes craſſiores & minus fluidæ, niſi graves ſint in centrum, circumferentiam petent; & veriſimile eſt quod, etiamſi demonſtrationum gratia hypotheſin talem initio ſectionis hujus propoſuerim, ut reſiſtentia velocitati proportionalis eſſet, tamen reſiſtentia in minori ſit ratione quam ea velocitatis eſt. Quo conceſſo, tempora periodica partium vorticis erunt in majori quam duplicata ratione diſtantiarum ab ipſius centro. Quod ſi vortices (uti aliquorum eſt opinio) celerius moveantur prope centrum, dein tardius uſque ad certum limitem, tum denuo celerius juxta circumferentiam; certe nec ratio ſeſquiplicata neque alia quævis certa ac determinata obtinere poteſt. Viderint itaque philoſophi quo pacto phænomenon illud rationis ſeſquiplicatæ per vortices explicari poſſit.

PROPOSITIO LIII. THEOREMA XLI.

Corpora, quæ in vortice delata in orbem redeunt, ejuſdem ſunt denſitatis cum vortice, & eadem lege cum ipſius partibus quoad velocitatem & curſus determinationem moventur.

Nam ſi vorticis pars aliqua exigua, cujus particulæ ſeu puncta phyſica datum ſervant ſitum inter ſe, congelari ſupponatur: hæc, quoniam neque quoad denſitatem ſuam, neque quoad vim inſitam aut figuram ſuam mutatur, movebitur eadem lege ac prius: & contra, ſi vorticis pars congelata & ſolida ejuſdem ſit denſitatis cum reliquo vortice, & reſolvatur in fluidum; movebitur hæc eadem lege ac prius, niſi quatenus ipſius particulæ jam fluidæ factæ moveantur

inter

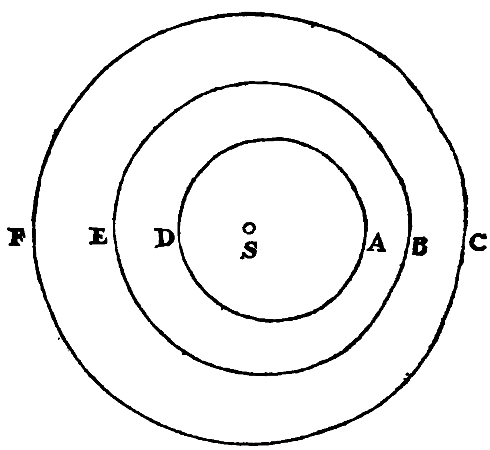
inter ſe. Negligatur igitur motus particularum inter ſe, tanquam ad totius motum progreſſivum nil ſpectans, & motus totius idem erit ac prius. Motus autem idem erit cum motu aliarum vorticis partium a centro æqualiter diſtantium, propterea quod ſolidum in fluidum reſolutum fit pars vorticis cæteris partibus conſimilis. Ergo ſolidum, ſi ſit ejuſdem denſitatis cum materia vorticis, eodem motu cum ipſius partibus movebitur, in materia proxime ambiente relative quieſcens. Sin denſius ſit, jam magis conabitur recedere a centro vorticis quam prius; ideoque vorticis vim illam, qua prius in orbita ſua tanquam in æquilibrio conſtitutum retinebatur, jam ſuperans, recedet a centro & revolvendo deſcribet ſpiralem, non amplius in eundem orbem rediens. Et eodem argumento ſi rarius ſit, accedet ad centrum. Igitur non redibit in eundem orbem niſi ſit ejuſdem denſitatis cum fluido. Eo autem in caſu oſtenſum eſt, quod revolveretur eadem lege cum partibus fluidi a centro vorticis æqualiter diſtantibus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ergo ſolidum quod in vortice revolvitur & in eundem orbem ſemper redit, relative quieſcit in fluido cui innatat.

Corol. 2. Et ſi vortex ſit quoad denſitatem uniformis, corpus idem ad quamlibet a centro vorticis diſtantiam revolvi poteſt.

Scholium.

Hinc liquet planetas a vorticibus corporeis non deferri. Nam planetæ ſecundum hypotheſin *Copernicæam* circa ſolem delati revolvuntur in ellipſibus umbilicum habentibus in ſole, & radiis ad ſolem ductis areas deſcribunt temporibus proportionales. At partes vorticis tali motu revolvi nequeunt. Deſignent *AD*, *BE*, *CF*, orbes tres circa ſolem *S* deſcriptos, quorum extimus *CF* circulus ſit ſoli concentricus, & interiorum duorum aphelia ſint *A*, *B* & perihelia *D*, *E*. Ergo corpus quod revolvitur in orbe *CF*, radio ad ſolem ducto areas temporibus proportionales



portionales deſcribendo, movebitur uniformi cum motu. Corpus autem, quod revolvitur in orbe *BE*, tardius movebitur in aphelio *B* & velocius in perihelio *E*, ſecundum leges aſtronomicas; cum tamen ſecundum leges mechanicas materia vorticis in ſpatio anguſtiore inter *A* & *C* velocius moveri debeat quam in ſpatio latiore inter *D* & *F*; id eſt, in aphelio velocius quam in perihelio. Quæ duo repugnant inter ſe. Sic in principio ſigni virginis, ubi aphelium martis jam verſatur, diſtantia inter orbes martis & veneris eſt ad diſtantiam eorundem orbium in principio ſigni piſcium ut ternarius ad binarium circiter, & propterea materia vorticis inter orbes illos in principio piſcium debet eſſe velocior quam in principio virginis in ratione ternarii ad binarium. Nam quo anguſtius eſt ſpatium per quod eadem materiæ quantitas eodem revolutionis unius tempore tranſit, eo majori cum velocitate tranſire debet. Igitur ſi terra in hac materia cœleſti relative quieſcens ab ea deferretur, & una circa ſolem revolveretur, foret hujus velocitas in principio piſcium ad ejuſdem velocitatem in principio virginis in ratione ſeſquialtera. Unde ſolis motus diurnus apparens in principio virginis major eſſet quam minutorum primorum ſeptuaginta, & in principio piſcium minor quam minutorum quadraginta & octo: cum tamen (experientia teſte) apparens iſte ſolis motus major ſit in principio piſcium quam in principio virginis, & propterea terra velocior in principio virginis quam in principio piſcium. Itaque hypotheſis vorticum cum phænomenis aſtronomicis omnino pugnat, & non tam ad explicandos quam ad perturbandos motus cœleſtes conducit. Quomodo vero motus iſti in ſpatiis liberis ſine vorticibus peraguntur intelligi poteſt ex libro primo, & in mundi ſyſtemate jam plenius docebitur.

DE
MUNDI SYSTEMATE.
LIBER TERTIUS.

IN libris præcedentibus principia philoſophiæ tradidi, non tamen philoſophica ſed mathematica tantum, ex quibus videlicet in rebus philoſophicis diſputari poſſit. Hæc ſunt motuum & virium leges & conditiones, quæ ad philoſophiam maxime ſpectant. Eadem tamen, ne ſterilia videantur, illuſtravi ſcholiis quibuſdam philoſophicis, ea tractans quæ generalia ſunt, & in quibus philoſophia maxime fundari videtur, uti corporum denſitatem & reſiſtentiam, ſpatia corporibus vacua, motumque lucis & ſonorum. Supereſt ut ex iiſdem principiis doceamus conſtitutionem ſyſtematis mundani. De hoc argumento compoſueram librum tertium methodo populari, ut a pluribus legeretur. Sed quibus principia poſita ſatis intellecta non fuerint, ii vim conſequentiarum minime percipient, neque præjudicia deponent, quibus a multis retro annis inſueverunt: & propterea ne res in diſputationes trahatur, ſummam libri illius tranſtuli in propoſitiones, more mathematico, ut ab iis ſolis legantur qui principia prius evolverint. Veruntamen quoniam propoſitiones ibi quam plurimæ occurrant, quæ lectoribus etiam mathematice doctis moram nimiam injicere poſſint, auctor eſſe nolo ut quiſquam eas omnes evolvat; ſuffecerit ſiquis definitiones, leges motuum & ſectiones tres priores libri primi ſedulo legat, dein tranſeat ad hunc librum de mundi ſyſtemate, & reliquas librorum priorum propoſitiones hic citatas pro lubitu conſulat.

REGULÆ

REGULÆ PHILOSOPHANDI.

REGULA I.

Cauſas rerum naturalium non plures admitti debere, quam quæ & veræ ſint & earum phænomenis explicandis ſufficiant.

DIcunt utique philoſophi: Natura nihil agit fruſtra, & fruſtra fit per plura quod fieri poteſt per pauciora. Natura enim ſimplex eſt & rerum cauſis ſuperfluis non luxuriat.

REGULA II.

Ideoque effectuum naturalium ejuſdem generis eædem aſſignandæ ſunt cauſæ, quatenus fieri poteſt.

Uti reſpirationis in homine & in beſtia; deſcenſus lapidum in *Europa* & in *America*; lucis in igne culinari & in ſole; reflexionis lucis in terra & in planetis.

REGULA III.

Qualitates corporum quæ intendi & remitti nequeunt, quæque corporibus omnibus competunt in quibus experimenta inſtituere licet, pro qualitatibus corporum univerſorum habendæ ſunt.

Nam qualitates corporum non niſi per experimenta innoteſcunt, ideoque generales ſtatuendæ ſunt quotquot cum experimentis ge-

neraliter quadrant; & quæ minui non poſſunt, non poſſunt auferri. Certe contra experimentorum tenorem ſomnia temere confingenda non ſunt, nec a naturæ analogia recedendum eſt, cum ea ſimplex eſſe ſoleat & ſibi ſemper conſona. Extenſio corporum non niſi per ſenſus innoteſcit, nec in omnibus ſentitur: ſed quia ſenſibilibus omnibus competit, de univerſis affirmatur. Corpora plura dura eſſe experimur. Oritur autem durities totius a duritie partium, & inde non horum tantum corporum quæ ſentiuntur, ſed aliorum etiam omnium particulas indiviſas eſſe duras merito concludimus. Corpora omnia impenetrabilia eſſe non ratione ſed ſenſu colligimus. Quæ tractamus, impenetrabilia inveniuntur, & inde concludimus impenetrabilitatem eſſe proprietatem corporum univerſorum. Corpora omnia mobilia eſſe, & viribus quibuſdam (quas vires inertiæ vocamus) perſeverare in motu vel quiete, ex hiſce corporum viſorum proprietatibus colligimus. Extenſio, durities, impenetrabilitas, mobilitas & vis inertiæ totius oritur ab extenſione, duritie, impenetrabilitate, mobilitate & viribus inertiæ partium: & inde concludimus omnes omnium corporum partes minimas extendi & duras eſſe & impenetrabiles & mobiles & viribus inertiæ præditas. Et hoc eſt fundamentum philoſophiæ totius. Porro corporum partes diviſas & ſibi mutuo contiguas ab invicem ſeparari poſſe, ex phænomenis novimus, & partes indiviſas in partes minores ratione diſtingui poſſe ex mathematica certum eſt. Utrum vero partes illæ diſtinctæ & nondum diviſæ per vires naturæ dividi & ab invicem ſeparari poſſint, incertum eſt. At ſi vel unico conſtaret experimento quod particula aliqua indiviſa, frangendo corpus durum & ſolidum, diviſionem pateretur: concluderemus vi hujus regulæ, quod non ſolum partes diviſæ ſeparabiles eſſent, ſed etiam quod indiviſæ in infinitum dividi poſſent.

Denique ſi corpora omnia in circuitu terræ gravia eſſe in terram, idque pro quantitate materiæ in ſingulis, & lunam gravem eſſe in terram pro quantitate materiæ ſuæ, & viciſſim mare noſtrum grave eſſe in lunam, & planetas omnes graves eſſe in ſe mutuo, & cometarum ſimilem eſſe gravitatem in ſolem, per experimenta & obſervationes aſtronomicas univerſaliter conſtet: dicendum erit per hanc regulam quod corpora omnia in ſe mutuo gravitant. Nam & fortius erit argumentum ex phænomenis de gravitate univerſali, quam

de

de corporum impenetrabilitate: de qua utique in corporibus cœleſtibus nullum experimentum, nullam prorſus obſervationem habemus. Attamen gravitatem corporibus eſſentialem eſſe minime affirmo. Per vim inſitam intelligo ſolam vim inertiæ. Hæc immutabilis eſt. Gravitas recedendo a terra, diminuitur.

REGULA IV.

In philoſophia experimentali, propoſitiones ex phænomenis per inductionem collectæ, non obſtantibus contrariis hypotheſibus, pro veris aut accurate aut quamproxime haberi debent, donec alia occurrerint phænomena, per quæ aut accuratiores reddantur aut exceptionibus obnoxiæ.

Hoc fieri debet ne argumentum inductionis tollatur per hypotheſes.

PHÆNO-

De Mundi Systemate

PHÆNOMENA.

PHÆNOMENON I.

Planetas circumjoviales, radiis ad centrum jovis ductis, areas deſcribere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica, ſtellis fixis quieſcentibus, eſſe in ratione ſeſquiplicata diſtantiarum ab ipſius centro.

COnſtat ex obſervationibus aſtronomicis. Orbes horum planetarum non differunt ſenſibiliter a circulis jovi concentricis, & motus eorum in his circulis uniformes deprehenduntur. Tempora vero periodica eſſe in ſeſquiplicata ratione ſemidiametrorum orbium conſentiunt aſtronomi; & idem ex tabula ſequente manifeſtum eſt.

Satellitum jovialium tempora periodica.

$1^d. 18^h. 27'. 34''.$ $3^d. 13^h. 13'. 42''.$ $7^d. 3^h. 42'. 36''.$ $16^d. 16^h. 32'. 9''.$

Diſtantiæ ſatellitum a centro jovis.

Ex obſervationibus	1	2	3	4	
Borelli	$5\frac{2}{3}$	$8\frac{2}{3}$	14	$24\frac{2}{3}$	Semidiam. Jovis
Townlei *per microm.*	5,52	8,78	13,47	24,72	
Caſſini *per teleſcop.*	5	8	13	23	
Caſſini *per eclipſ. ſatell.*	$5\frac{2}{3}$	9	$14\frac{23}{60}$	$25\frac{3}{10}$	
Ex temporibus periodicis.	5,667	9,017	14,384	25,299	

Elongationes ſatellitum jovis & diametrum ejus D. *Pound* micrometris optimis determinavit ut ſequitur. Elongatio maxima heliocentrica ſatellitis quarti a centro jovis micrometro in tubo quindecim pedes longo capta fuit, & prodiit in mediocri jovis a terra diſtantia 8′. 16″ circiter. Ea ſatellitis tertii micrometro in teleſcopio pedes

pedes 123 longo capta fuit, & prodiit in eadem jovis a terra diſtantia 4′. 42″. Elongationes maximæ reliquorum ſatellitum in eadem jovis a terra diſtantia ex temporibus periodicis prodeunt 2′. 56″. 47‴, & 1′. 51″. 6‴.

Diameter jovis micrometro in teleſcopio pedes 123 longo ſæpius capta fuit, & ad mediocrem jovis a ſole vel terra diſtantiam reducta, ſemper minor prodiit quam 40″, nunquam minor quam 38″, ſæpius 39″. In teleſcopiis brevioribus hæc diameter eſt 40″ vel 41″. Nam lux jovis per inæqualem refrangibilitatem nonnihil dilatatur, & hæc dilatatio minorem habet rationem ad diametrum jovis in longioribus & perfectoribus teleſcopiis quam in brevioribus & minus perfectis. Tempora quibus ſatellites duo, primus ac tertius, tranſibant per corpus jovis, ab initio ingreſſus ad initium exitus, & ab ingreſſu completo ad exitum completum, obſervata ſunt ope teleſcopii ejuſdem longioris. Et diameter jovis in mediocri ejus a terra diſtantia prodiit per tranſitum primi ſatellitis $37\frac{1}{8}$″, & per tranſitum tertii $37\frac{3}{8}$″. Tempus etiam quo umbra primi ſatellitis tranſiit per corpus jovis obſervatum fuit, & inde diameter jovis in mediocri ejus a terra diſtantia prodiit 37″ circiter. Aſſumamus diametrum ejus eſſe $37\frac{1}{4}$″ quamproxime; & elongationes maximæ ſatellitis primi, ſecundi, tertii, & quarti æquales erunt ſemidiametris jovis 5,965, 9,494, 15,141, & 26,63 reſpective.

PHÆNOMENON II.

Planetas circumſaturnios, radiis ad ſaturnum ductis, areas deſcribere temporibus proportionales, & eorum tempora periodica, ſtellis fixis quieſcentibus, eſſe in ratione ſeſquiplicata diſtantiarum ab ipſius centro.

Caſſinus utique ex obſervationibus ſuis diſtantias eorum a centro ſaturni & periodica tempora hujuſmodi eſſe ſtatuit.

Satellitum ſaturniorum tempora periodica.

$1^d. 21^h. 18'. 27''$. $2^d. 17^h. 41'. 22''$. $4^d. 12^h. 25'. 12''$. $15^d. 22^h. 41'. 14''$. $79^d. 7^h. 48'. 00''$.

Diſtantiæ

Diſtantiæ ſatellitum a centro ſaturni in ſemidiametris annuli.

Ex obſervationibus	$1\frac{19}{20}$.	$2\frac{1}{2}$.	$3\frac{1}{2}$.	8.	24.
Ex temporibus periodicis.	1,93.	2,47.	3,45.	8.	23,35.

Quarti ſatellitis elongatio maxima a centro ſaturni ex obſervationibus colligi ſolet eſſe ſemidiametrorum octo quamproxime. At elongatio maxima ſatellitis hujus a centro ſaturni, micrometro optimo in teleſcopio Hugeniano pedes 123 longo capta, prodiit ſemidiametrorum octo cum ſeptem decimis partibus ſemidiametri. Et ex hac obſervatione & temporibus periodicis, diſtantiæ ſatellitum a centro ſaturni in ſemidiametris annuli ſunt 2,1. 2,69. 3,75. 8,7. & 25,35. Saturni diameter in eodem teleſcopio erat ad diametrum annuli ut 3 ad 7, & diameter annuli diebus Maii 28 & 29 anni 1719. prodiit 43″. Et inde diameter annuli in mediocri ſaturni a terra diſtantia eſt 42″, & diameter ſaturni 18″. Hæc ita ſunt in teleſcopiis longiſſimis & optimis, propterea quod magnitudines apparentes corporum cœleſtium in longioribus teleſcopiis majorem habeant proportionem ad dilatationem lucis in terminis illorum corporum quam in brevioribus. Si rejiciatur lux omnis erratica, manebit diameter ſaturni haud major quam 16″.

PHÆNOMENON III.

Planetas quinque primarios mercurium, venerem, martem, jovem & ſaturnum orbibus ſuis ſolem cingere.

Mercurium & venerem circa ſolem revolvi ex eorum phaſibus lunaribus demonſtratur. Plena facie lucentes ultra ſolem ſiti ſunt; dimidiata e regione ſolis; falcata cis ſolem, per diſcum ejus ad modum macularum nonnunquam tranſeuntes. Ex martis quoque plena facie prope ſolis conjunctionem, & gibboſa in quadraturis, certum eſt, quod is ſolem ambit. De jove etiam & ſaturno idem ex eorum phaſibus ſemper plenis demonſtratur: hos enim luce a ſole mutuata ſplendere ex umbris ſatellitum in ipſos projectis manifeſtum eſt.

PHÆNOMENON IV.

Planetarum quinque primariorum, & vel ſolis circa terram vel terræ circa ſolem tempora periodica, ſtellis fixis quieſcentibus, eſſe in ratione ſeſquiplicata mediocrium diſtantiarum a ſole.

Hæc a *Keplero* inventa ratio in confeſſo eſt apud omnes. Eadem utique ſunt tempora periodica, eædemque orbium dimenſiones, ſive ſol circa terram, ſive terra circa ſolem revolvatur. Ac de menſura quidem temporum periodicorum convenit inter aſtronomos univerſos. Magnitudines autem orbium *Keplerus* & *Bullialdus* omnium diligentiſſime ex obſervationibus determinaverunt: & diſtantiæ mediocres, quæ temporibus periodicis reſpondent, non differunt ſenſibiliter a diſtantiis quas illi invenerunt, ſuntque inter ipſas ut plurimum intermediæ; uti in tabula ſequente videre licet.

Planetarum ac telluris tempora periodica circa ſolem reſpectu fixarum, in diebus & partibus decimalibus diei.

♄	♃	♂	♁	♀	☿
10759,275.	4332,514.	686,9785.	365,2565.	224,6176.	87,9692.

Planetarum ac telluris diſtantiæ mediocres a ſole.

	♄	♃	♂	♁	♀	☿
Secundum *Keplerum*	951000.	519650.	152350.	100000.	72400.	38806.
Secundum *Bullialdum*	954198.	522520.	152350.	100000.	72398.	38585.
Secundum tempora periodica	954006.	520096.	152369.	100000.	72333.	38710.

De diſtantiis mercurii & veneris a ſole diſputandi non eſt locus, cum hæ per eorum elongationes a ſole determinentur. De diſtantiis etiam ſuperiorum planetarum a ſole tollitur omnis diſputatio per eclipſes ſatellitum jovis. Etenim per eclipſes illas determinatur poſitio umbræ quam jupiter projicit, & eo nomine habetur jovis longitudo heliocentrica. Ex longitudinibus autem heliocentrica & geocentrica inter ſe collatis determinatur diſtantia jovis.

De Mundi Systemate

PHÆNOMENON V.

Planetas primarios, radiis ad terram ductis, areas deſcribere temporibus minime proportionales; at radiis ad ſolem ductis, areas temporibus proportionales percurrere.

Nam reſpectu terræ nunc progrediuntur, nunc ſtationarii ſunt, nunc etiam regrediuntur: At ſolis reſpectu ſemper progrediuntur, idque propemodum uniformi cum motu, ſed paulo celerius tamen in periheliis ac tardius in apheliis, ſic ut arearum æquabilis ſit deſcriptio. Propoſitio eſt aſtronomis notiſſima, & in jove apprime demonſtratur per eclipſes ſatellitum, quibus eclipſibus heliocentricas planetæ hujus longitudines & diſtantias a ſole determinari diximus.

PHÆNOMENON VI.

Lunam radio ad centrum terræ ducto, aream tempori proportionalem deſcribere.

Patet ex lunæ motu apparente cum ipſius diametro apparente collato. Perturbatur autem motus lunaris aliquantulum a vi ſolis, ſed errorum inſenſibiles minutias in hiſce phænomenis negligo.

PROPO-

PROPOSITIONES.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Vires, quibus planetæ circumjoviales perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis & in orbibus ſuis retinentur, reſpicere centrum jovis, & eſſe reciproce ut quadrata diſtantiarum locorum ab eodem centro.

PAtet pars prior propoſitionis per phænomenon primum, & propoſitionem ſecundam vel tertiam libri primi: & pars poſterior per phænomenon primum, & corollarium ſextum propoſitionis quartæ ejuſdem libri.

Idem intellige de planetis qui ſaturnum comitantur, per phænomenon ſecundum.

PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Vires, quibus planetæ primarii perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, & in orbibus ſuis retinentur, reſpicere ſolem, & eſſe reciproce ut quadrata diſtantiarum ab ipſius centro.

Patet pars prior propoſitionis per phænomenon quintum, & propoſitionem ſecundam libri primi: & pars poſterior per phænomenon quartum, & propoſitionem quartam ejuſdem libri. Accuratiſſime autem demonſtratur hæc pars propoſitionis per quietem apheliorum. Nam aberratio quam minima a ratione duplicata (per corol. 1. prop. XLV. lib. 1.) motum apſidum in ſingulis revolutionibus notabilem, in pluribus enormem efficere deberet.

PROPOSITIO III. THEOREMA III.

Vim, qua luna retinetur in orbe ſuo, reſpicere terram, & eſſe reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro.

Patet aſſertionis pars prior per phænomenon ſextum, & propoſitionem ſecundam vel tertiam libri primi: & pars poſterior per motum tardiſſimum lunaris apogæi. Nam motus ille, qui ſingulis revolutionibus eſt graduum tantum trium & minutorum trium in conſequentia, contemni poteſt. Patet enim (per corol. 1. prop. XLV. lib. 1.) quod ſi diſtantia lunæ a centro terræ ſit ad ſemidiametrum terræ ut D ad 1; vis a qua motus talis oriatur ſit reciproce ut $D^{2\frac{4}{243}}$, id eſt, reciproce ut ea ipſius D dignitas cujus index eſt $2\frac{4}{243}$, hoc eſt, in ratione diſtantiæ paulo majore quam duplicata inverſe, ſed quæ partibus $59\frac{3}{4}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit. Oritur vero ab actione ſolis (uti poſthac dicetur) & propterea hic negligendus eſt. Actio ſolis quatenus lunam diſtrahit a terra, eſt ut diſtantia lunæ a terra quamproxime; ideoque (per ea quæ dicuntur in corol. 2. prop. XLV. lib. 1.) eſt ad lunæ vim centripetam ut 2 ad 357,45 circiter, ſeu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Et neglecta ſolis vi tantilla, vis reliqua qua luna retinetur in orbe erit reciproce ut D^2. Id quod etiam plenius conſtabit conferendo hanc vim cum vi gravitatis, ut fit in propoſitione ſequente.

Corol. Si vis centripeta mediocris qua luna retinetur in orbe augeatur primo in ratione $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$, deinde etiam in ratione duplicata ſemidiametri terræ ad mediocrem diſtantiam centri lunæ a centro terræ: habebitur vis centripeta lunaris ad ſuperficiem terræ, poſito quod vis illa deſcendendo ad ſuperficiem terræ perpetuo augeatur in reciproca altitudinis ratione duplicata.

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

Lunam gravitare in terram, & vi gravitatis retrahi ſemper a motu rectilineo, & in orbe ſuo retineri.

Lunæ diſtantia mediocris a terra in ſyzygiis eſt ſemidiametrorum terreſtrium, ſecundum *Ptolemæum* & pleroſque aſtronomorum 59, ſecundum

ſecundum *Vendelinum* & *Hugenium* 60, ſecundum *Copernicum* $60\frac{1}{3}$, ſecundum *Streetum* $60\frac{2}{5}$, & ſecundum *Tychonem* $56\frac{1}{2}$. Aſt *Tycho*, & quotquot ejus tabulas refractionum ſequuntur, conſtituendo refractiones ſolis & lunæ (omnino contra naturam lucis) majores quam fixarum, idque ſcrupulis quaſi quatuor vel quinque, auxerunt parallaxin lunæ ſcrupulis totidem, hoc eſt, quaſi duodecima vel decima quinta parte totius parallaxeos. Corrigatur iſte error, & diſtantia evadet quaſi $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum terreſtrium, fere ut ab aliis aſſignatum eſt. Aſſumamus diſtantiam mediocrem ſexaginta ſemidiametrorum in ſyzygiis; & lunarem periodum reſpectu fixarum compleri diebus 27, horis 7, minutis primis 43, ut ab aſtronomis ſtatuitur; atque ambitum terræ eſſe pedum Pariſienſium 123249600, uti a *Gallis* menſurantibus definitum eſt: & ſi luna motu omni privari fingatur ac dimitti, ut urgente vi illa omni, qua (per corol. prop. III.) in orbe ſuo retinetur, deſcendat in terram; hæc ſpatio minuti unius primi cadendo deſcribet pedes Pariſienſes $15\frac{1}{12}$. Colligitur hoc ex calculo vel per propoſitionem XXXVI. libri primi, vel (quod eodem recidit) per corollarium nonum propoſitionis quartæ ejuſdem libri, confecto. Nam arcus illius quem luna tempore minuti unius primi, medio ſuo motu, ad diſtantiam ſexaginta ſemidiametrorum terreſtrium deſcribat, ſinus verſus eſt pedum Pariſienſium $15\frac{1}{12}$ circiter, vel magis accurate pedum 15. dig. 1. & lin. $1\frac{4}{9}$. Unde cum vis illa accedendo ad terram augeatur in duplicata diſtantiæ ratione inverſa, ideoque ad ſuperficiem terræ major ſit partibus 60×60 quam ad lunam; corpus vi illa in regionibus noſtris cadendo, deſcribere deberet ſpatio minuti unius primi pedes Pariſienſes $60 \times 60 \times 15\frac{1}{12}$, & ſpatio minuti unius ſecundi pedes $15\frac{1}{12}$, vel magis accurate pedes 15. dig. 1. & lin. $1\frac{4}{9}$. Et eadem vi gravia revera deſcendunt in terram. Nam penduli, in latitudine Lutetiæ Pariſiorum ad ſingula minuta ſecunda oſcillantis, longitudo eſt pedum trium Pariſienſium & linearum $8\frac{1}{2}$, ut obſervavit *Hugenius*. Et altitudo, quam grave tempore minuti unius ſecundi cadendo deſcribit, eſt ad dimidiam longitudinem penduli hujus in duplicata ratione circumferentiæ circuli ad diametrum ejus (ut indicavit etiam *Hugenius*) ideoque eſt pedum Pariſienſium 15. dig. 1. lin. $1\frac{7}{9}$. Et propterea vis qua luna in orbe ſuo retinetur, ſi deſcendatur in ſuperficiem terræ, æqualis evadit vi gravitatis apud nos, ideoque (per reg. I.

&

DE MUNDI SYSTEMATE &. II.) eſt illa ipſa vis quam nos gravitatem dicere ſolemus. Nam ſi gravitas ab ea diverſa eſſet, corpora viribus utriſque conjunctis terram petendo duplo velocius deſcenderent, & ſpatio minuti unius ſecundi cadendo deſcriberent pedes Pariſienſes $30\frac{1}{6}$: omnino contra experientiam.

Calculus hic fundatur in hypotheſi quod terra quieſcit. Nam ſi terra & luna moveantur circum ſolem, & interea quoque circum commune gravitatis centrum revolvantur: manente lege gravitatis diſtantia centrorum lunæ ac terræ ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum terreſtrium circiter; uti computationem ineunti patebit. Computatio autem iniri poteſt per prop. LX. lib. I.

Scholium.

Demonſtratio propoſitionis ſic fuſius explicari poteſt. Si lunæ plures circum terram revolverentur, perinde ut fit in ſyſtemate ſaturni vel jovis: harum tempora periodica (per argumentum inductionis) obſervarent legem planetarum a *Keplero* detectam, & propterea harum vires centripetæ forent reciproce ut quadrata diſtantiarum a centro terræ, per prop. I. hujus. Et ſi earum infima eſſet parva, & vertices altiſſimorum montium prope tangeret: hujus vis centripeta qua retineretur in orbe, gravitates corporum in verticibus illorum montium (per computationem præcedentem) æquaret quamproxime, efficeretque ut eadem lunula, ſi motu omni quo pergit in orbe ſuo privaretur, defectu vis centrifugæ qua in orbe permanſerat, deſcenderet in terram, idque eadem cum velocitate qua gravia cadunt in illorum montium verticibus, propter æqualitatem virium quibus deſcendunt. Et ſi vis illa qua lunula illa infima deſcendit, diverſa eſſet a gravitate, & lunula illa etiam gravis eſſet in terram more corporum in verticibus montium: eadem lunula vi utraque conjuncta duplo velocius deſcenderet. Quare cum vires utræque, & hæ corporum gravium, & illæ lunarum, centrum terræ reſpiciant, & ſint inter ſe ſimiles & æquales, eædem (per reg. I. & II.) eandem habebunt cauſam. Et propterea vis illa, qua luna retinetur in orbe ſuo, ea ipſa erit quam nos gravitatem dicere ſolemus: idque maxime ne lunula in vertice montis vel gravitate careat, vel duplo velocius cadat quam corpora gravia ſolent cadere.

PROPO-

PROPOSITIO V. THEOREMA V.

Planetas circumjoviales gravitare in jovem, circumſaturnios in ſaturnum, & circumſolares in ſolem, & vi gravitatis ſuæ retrahi ſemper a motibus rectilineis, & in orbibus curvilineis retineri.

Nam revolutiones planetarum circumjovialium circa jovem, circumſaturniorum circa ſaturnum, & mercurii ac veneris reliquorumque circumſolarium circa ſolem ſunt phænomena ejuſdem generis cum revolutione lunæ circa terram ; & propterea (per reg. II.) a cauſis ejuſdem generis dependent : præſertim cum demonſtratum ſit quod vires, a quibus revolutiones illæ dependent, reſpiciant centra jovis, ſaturni ac ſolis, & recedendo a jove, ſaturno & ſole decreſcant eadem ratione ac lege, qua vis gravitatis decreſcit in receſſu a terra.

Corol. 1. Gravitas igitur datur in planetas univerſos. Nam venerem, mercurium, cæteroſque eſſe corpora ejuſdem generis cum jove & ſaturno, nemo dubitat. Et cum attractio omnis per motus legem tertiam mutua ſit, jupiter in ſatellites ſuos omnes, ſaturnus in ſuos, terraque in lunam, & ſol in planetas omnes primarios gravitabit.

Corol. 2. Gravitatem, quæ planetam unumquemque reſpicit, eſſe reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro.

Corol. 3. Graves ſunt planetæ omnes in ſe mutuo per corol. I. & 2. Et hinc jupiter & ſaturnus prope conjunctionem ſe invicem attrahendo, ſenſibiliter perturbant motus mutuos, ſol perturbat motus lunares, ſol & luna perturbant mare noſtrum, ut in ſequentibus explicabitur.

Scholium.

Hactenus vim illam qua corpora cœleſtia in orbibus ſuis retinentur centripetam appellavimus. Eandem jam gravitatem eſſe conſtat, & propterea gravitatem in poſterum vocabimus. Nam cauſa vis illius centripetæ, qua luna retinetur in orbe, extendi debet ad omnes planetas per reg. I, II. & IV.

PROPO-

PROPOSITIO VI. THEOREMA VI.

Corpora omnia in planetas ſingulos gravitare, & pondera eorum in eundem quemvis planetam, paribus diſtantiis a centro planetæ, proportionalia eſſe quantitati materiæ in ſingulis.

Deſcenſus gravium omnium in terram (dempta ſaltem inæquali retardatione quæ ex aëris perexigua reſiſtentia oritur) æqualibus temporibus fieri, jamdudum obſervarunt alii; & accuratiſſime quidem notare licet æqualitatem temporum in pendulis. Rem tentavi in auro, argento, plumbo, vitro, arena, ſale communi, ligno, aqua, tritico. Comparabam pyxides duas ligneas rotundas & æquales. Unam implebam ligno, & idem auri pondus ſuſpendebam (quam potui exacte) in alterius centro oſcillationis. Pyxides ab æqualibus pedum undecim filis pendentes, conſtituebant pendula, quoad pondus, figuram, & aëris reſiſtentiam omnino paria: & paribus oſcillationibus, juxta poſitæ, ibant una & redibant diutiſſime. Proinde copia materiæ in auro (per corol. 1. & 6. prop. XXIV. lib. II.) erat ad copiam materiæ in ligno, ut vis motricis actio in totum aurum ad ejuſdem actionem in totum lignum; hoc eſt, ut pondus ad pondus. Et ſic in cæteris. In corporibus ejuſdem ponderis differentia materiæ, quæ vel minor eſſet quam pars milleſima materiæ totius, his experimentis manifeſto deprehendi potuit. Jam vero naturam gravitatis in planetas eandem eſſe atque in terram, non eſt dubium. Elevari enim fingantur corpora hæc terreſtria ad uſque orbem lunæ, & una cum luna motu omni privata demitti, ut in terram ſimul cadant; & per jam ante oſtenſa certum eſt quod temporibus æqualibus deſcribent æqualia ſpatia cum luna, ideoque quod ſunt ad quantitatem materiæ in luna, ut pondera ſua ad ipſius pondus. Porro quoniam ſatellites jovis temporibus revolvuntur quæ ſunt in ratione ſeſquiplicata diſtantiarum a centro jovis, erunt eorum gravitates acceleratrices in jovem reciproce ut quadrata diſtantiarum a centro jovis; & propterea in æqualibus a jove diſtantiis, eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales. Proinde temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo, deſcriberent æqualia ſpatia; perinde

ut

ut ſit in gravibus in hac terra noſtra. Et eodem argumento planetæ circumſolares, ab æqualibus a ſole diſtantiis demiſſi, deſcenſu ſuo in ſolem æqualibus temporibus æqualia ſpatia deſcriberent. Vires autem, quibus corpora inæqualia æqualiter accelerantur, ſunt ut corpora; hoc eſt, pondera ut quantitates materiæ in planetis. Porro jovis & ejus ſatellitum pondera in ſolem proportionalia eſſe quantitatibus materiæ eorum patet ex motu ſatellitum quam maxime regulari; per corol 3. prop. LXV. lib. I. Nam ſi horum aliqui magis traherentur in ſolem, pro quantitate materiæ ſuæ, quam cæteri: motus ſatellitum (per corol. 2. prop. LXV. lib. I.) ex inæqualitate attractionis perturbarentur. Si, paribus a ſole diſtantiis, ſatelles aliquis gravior eſſet in ſolem pro quantitate materiæ ſuæ, quam jupiter pro quantitate materiæ ſuæ, in ratione quacunque data, puta *d* ad *e*: diſtantia inter centrum ſolis & centrum orbis ſatellitis, major ſemper foret quam diſtantia inter centrum ſolis & centrum jovis in ratione ſubduplicata quam proxime; uti calculo quodam inito inveni. Et ſi ſatelles minus gravis eſſet in ſolem in ratione illa *d* ad *e*, diſtantia centri orbis ſatellitis a ſole minor foret quam diſtantia centri jovis a ſole in ratione illa ſubduplicata. Ideoque ſi in æqualibus a ſole diſtantiis, gravitas acceleratrix ſatellitis cujuſvis in ſolem major eſſet vel minor quam gravitas acceleratrix jovis in ſolem, parte tantum milleſima gravitatis totius; foret diſtantia centri orbis ſatellitis a ſole major vel minor quam diſtantia jovis a ſole parte $\frac{1}{2000}$ diſtantiæ totius, id eſt, parte quinta diſtantiæ ſatellitis extimi a centro jovis: quæ quidem orbis eccentricitas foret valde ſenſibilis. Sed orbes ſatellitum ſunt jovi concentrici, & propterea gravitates acceleratrices jovis & ſatellitum in ſolem æquantur inter ſe. Et eodem argumento pondera ſaturni & comitum ejus in ſolem, in æqualibus a ſole diſtantiis, ſunt ut quantitates materiæ in ipſis: & pondera lunæ ac terræ in ſolem vel nulla ſunt, vel earum maſſis accurate proportionalia. Aliqua autem ſunt per corol. 1. & 3. prop. V.

Quinetiam pondera partium ſingularum planetæ cujuſque in alium quemcunque ſunt inter ſe ut materia in partibus ſingulis. Nam ſi partes aliquæ plus gravitarent, aliæ minus, quam pro quantitate materiæ: planeta totus, pro genere partium quibus maximæ abundet, gravitaret magis vel minus quam pro quantitate materiæ totius.

De Mundi Systemate

Sed nec refert utrum partes illæ externæ ſint vel internæ. Nam ſi verbi gratia corpora terreſtria, quæ apud nos ſunt, in orbem lunæ elevari fingantur, & conferantur cum corpore lunæ: ſi horum pondera eſſent ad pondera partium externarum lunæ ut quantitates materiæ in iiſdem, ad pondera vero partium internarum in majori vel minori ratione, forent eadem ad pondus lunæ totius in majori vel minori ratione: contra quam ſupra oſtenſum eſt.

Corol. 1. Hinc pondera corporum non pendent ab eorum formis & texturis. Nam ſi cum formis variari poſſent; forent majora vel minora, pro varietate formarum, in æquali materia: omnino contra experientiam.

Corol. 2. Corpora univerſa, quæ circa terram ſunt, gravia ſunt in terram; & pondera omnium, quæ æqualiter a centro terræ diſtant, ſunt ut quantitates materiæ in iiſdem. Hæc eſt qualitas omnium in quibus experimenta inſtituere licet, & propterea per reg. III. de univerſis affirmanda eſt. Si æther aut corpus aliud quodcunque vel gravitate omnino deſtitueretur, vel pro quantitate materiæ ſuæ minus gravitaret: quoniam id (ex mente *Ariſtotelis*, *Carteſii* & aliorum) non differt ab aliis corporibus niſi in forma materiæ, poſſet idem per mutationem formæ gradatim tranſmutari in corpus ejuſdem conditionis cum iis, quæ pro quantitate materiæ quam maxime gravitant, & viciſſim corpora maxime gravia, formam illius gradatim induendo, poſſent gravitatem ſuam gradatim amittere. Ac proinde pondera penderent a formis corporum, poſſentque cum formis variari, contra quam probatum eſt in corollario ſuperiore.

Corol. 3. Spatia omnia non ſunt æqualiter plena. Nam ſi ſpatia omnia æqualiter plena eſſent, gravitas ſpecifica fluidi quo regio aëris impleretur, ob ſummam denſitatem materiæ, nil cederet gravitati ſpecificæ argenti vivi, vel auri, vel corporis alterius cujuſcunque denſiſſimi; & propterea nec aurum neque aliud quodcunque corpus in aëre deſcendere poſſet. Nam corpora in fluidis, niſi ſpecifice graviora ſint, minime deſcendunt. Quod ſi quantitas materiæ in ſpatio dato per rarefactionem quamcunque diminui poſſit, quidni diminui poſſit in infinitum?

Corol. 4. Si omnes omnium corporum particulæ ſolidæ ſint ejuſdem denſitatis, neque ſine poris rarefieri poſſint, vacuum datur.

Ejuſdem

Ejuſdem denſitatis eſſe dico, quarum vires inertiæ ſunt ut magnitudines.

Corol. 5. Vis gravitatis diverſi eſt generis a vi magnetica. Nam attractio magnetica non eſt ut materia attracta. Corpora aliqua magis trahuntur, alia minus, plurima non trahuntur. Et vis magnetica in uno & eodem corpore intendi poteſt & remitti, eſtque nonnunquam longe major pro quantitate materiæ quam vis gravitatis, & in receſſu a magnete deſcreſcit in ratione diſtantiæ non duplicata, ſed fere triplicata, quantum ex craſſis quibuſdam obſervationibus animadvertere potui.

PROPOSITIO VII. THEOREMA VII.

Gravitatem in corpora univerſa fieri, eamque proportionalem eſſe quantitati materiæ in ſingulis.

Planetas omnes in ſe mutuo graves eſſe jam ante probavimus, ut & gravitatem in unumquemque ſeorſim ſpectatum eſſe reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum a centro planetæ. Et inde conſequens eſt (per prop. LXIX. lib. I. & ejus corollaria) gravitatem in omnes proportionalem eſſe materiæ in iiſdem.

Porro cum planetæ cujuſvis *A* partes omnes graves ſint in planetam quemvis *B*, & gravitas partis cujuſque ſit ad gravitatem totius, ut materia partis ad materiam totius, & actioni omni reactio (per motus legem tertiam) æqualis ſit; planeta *B* in partes omnes planetæ *A* viciſſim gravitabit, & erit gravitas ſua in partem unamquamque ad gravitatem ſuam in totum, ut materia partis ad materiam totius. *Q. E. D.*

Corol. I. Oritur igitur & componitur gravitas in planetam totum ex gravitate in partes ſingulas. Cujus rei exempla habemus in attractionibus magneticis & electricis. Oritur enim attractio omnis in totum ex attractionibus in partes ſingulas. Res intelligetur in gravitate, concipiendo planetas plures minores in unum globum coire & planetam majorem componere. Nam vis totius ex viribus partium componentium oriri debebit. Siquis objiciat quod corpora omnia, quæ apud nos ſunt, hac lege gravitare deberent in ſe mutuo, cum tamen ejuſmodi gravitas neutiquam ſentiatur: reſpondeo quod

DE MUNDI SYSTEMATE

gravitas in hæc corpora, cum ſit ad gravitatem in terram totam ut ſunt hæc corpora ad terram totam, longe minor eſt quam quæ ſentiri poſſit.

Corol. 2. Gravitatio in ſingulas corporis particulas æquales eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum a particulis. Patet per corol 3. prop. LXXIV. lib. I.

PROPOSITIO VIII. THEOREMA VIII.

Si globorum duorum in ſe mutuo gravitantium materia undique in regionibus, quæ a centris æqualiter diſtant, homogenea ſit: erit pondus globi alterutrius in alterum reciproce ut quadratum diſtantiæ inter centra.

Poſtquam inveniſſem gravitatem in planetam totum oriri & componi ex gravitatibus in partes; & eſſe in partes ſingulas reciproce proportionalem quadratis diſtantiarum a partibus: dubitabam an reciproca illa proportio duplicata obtineret accurate in vi tota ex viribus pluribus compoſita, an vero quam proxime. Nam fieri poſſet ut proportio, quæ in majoribus diſtantiis ſatis accurate obtineret, prope ſuperficiem planetæ ob inæquales particularum diſtantias & ſitus diſſimiles, notabiliter erraret. Tandem vero, per prop. LXXV. & LXXVI. libri primi & ipſarum corollaria, intellexi veritatem propoſitionis de qua hic agitur.

Corol. 1. Hinc inveniri & inter ſe comparari poſſunt pondera corporum in diverſos planetas. Nam pondera corporum æqualium circum planetas in circulis revolventium ſunt (per corol. 2. prop. IV. lib. I.) ut diametri circulorum directe & quadrata temporum periodicorum inverſe; & pondera ad ſuperficies planetarum, aliaſve quaſvis a centro diſtantias, majora ſunt vel minora (per hanc propoſitionem) in duplicata ratione diſtantiarum inverſa. Sic ex temporibus periodicis veneris circum ſolem dierum 224 & horarum $16\frac{3}{4}$, ſatellitis extimi circumjovialis circum jovem dierum 16 & horarum $16\frac{8}{15}$, ſatellitis Hugeniani circum ſaturnum dierum 15 & horarum $22\frac{2}{3}$, & lunæ circum terram dierum 27. hor. 7. min. 43, collatis cum diſtantia mediocri veneris a ſole & cum elongationibus maximis heliocentricis ſatellitis extimi circumjovialis a centro jovis 8′. 16″. ſatellitis Huge-

Hugeniani a centro ſaturni 3′. 4″. & lunæ a centro terræ 10′. 33″. computum ineundo inveni quod corporum æqualium & a centro ſolis, jovis, ſaturni ac terræ æqualiter diſtantium pondera ſint in ſolem, jovem, ſaturnum ac terram ut 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$, & $\frac{1}{169282}$ reſpective, & auctis vel diminutis diſtantiis, pondera diminuuntur vel augentur in duplicata ratione: pondera æqualium corporum in ſolem, jovem, ſaturnum ac terram in diſtantiis 10000, 997, 791, & 109 ab eorum centris, atque ideo in eorum ſuperficiebus, erunt ut 10000, 943, 529, & 435 reſpective. Quanta ſint pondera corporum in ſuperficie lunæ dicetur in ſequentibus.

Corol. 2. Innoteſcit etiam quantitas materiæ in planetis ſingulis. Nam quantitates materiæ in planetis ſunt ut eorum vires in æqualibus diſtantiis ab eorum centris, id eſt, in ſole, jove, ſaturno ac terra ſunt ut 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$, & $\frac{1}{169282}$ reſpective. Si parallaxis ſolis ſtatuatur major vel minor quam 10″. 30‴, debebit quantitas materiæ in terra augeri vel diminui in triplicata ratione.

Corol. 3. Innoteſcunt etiam denſitates planetarum. Nam pondera corporum æqualium & homogeneorum in ſphæras homogeneas ſunt in ſuperficiebus ſphærarum ut ſphærarum diametri, per prop. LXXII. lib. I. ideoque ſphærarum heterogenearum denſitates ſunt ut pondera illa applicata ad ſphærarum diametros. Erant autem veræ ſolis, jovis, ſaturni ac terræ diametri ad invicem ut 10000, 997, 791, & 109, & pondera in eoſdem ut 10000, 943, 529 & 435 reſpective, & propterea denſitates ſunt ut 100, 94½, 67 & 400. Denſitas terræ quæ prodit ex hoc computo non pendet a parallaxi ſolis, ſed determinatur per parallaxin lunæ, & propterea hic recte definitur. Eſt igitur ſol paulo denſior quam jupiter, & jupiter quam ſaturnus, & terra quadruplo denſior quam ſol. Nam per ingentem ſuum calorem ſol rareſcit. Luna vero denſior eſt quam terra, ut in ſequentibus patebit.

Corol. 4. Denſiores igitur ſunt planetæ qui ſunt minores, cæteris paribus. Sic enim vis gravitatis in eorum ſuperficiebus ad æqualitatem magis accedit. Sed & denſiores ſunt planetæ, cæteris paribus, qui ſunt ſoli propiores; ut jupiter ſaturno, & terra jove. In diverſis utique diſtantiis a ſole collocandi erant planetæ ut quilibet pro gradu denſitatis calore ſolis majore vel minore frueretur. Aqua noſtra, ſi terra locaretur in orbe ſaturni, rigeſceret, ſi in orbe mer-

curii

curii in vapores ſtatim abiret. Nam lux ſolis, cui calor proportionalis eſt, ſeptuplo denſior eſt in orbe mercurii quam apud nos: & thermometro expertus ſum quod ſeptuplo ſolis æſtivi calore aqua ebullit. Dubium vero non eſt quin materia mercurii ad calorem accommodetur, & propterea denſior ſit hac noſtra; cum materia omnis denſior ad operationes naturales obeundas majorem calorem requirat.

PROPOSITIO IX. THEOREMA IX.

Gravitatem pergendo a ſuperficiebus planetarum deorſum decreſcere in ratione diſtantiarum a centro quam proxime.

Si materia planetæ quoad denſitatem uniformis eſſet, obtineret hæc propoſitio accurate: per prop. LXXIII. lib. I. Error igitur tantus eſt, quantus ab inæquabili denſitate oriri poſſit.

PRPOSITIO X. THEOREMA X.

Motus planetarum in cœlis diutiſſime conſervari poſſe.

In ſcholio propoſitionis XL. lib. II. oſtenſum eſt quod globus aquæ congelatæ, in aëre noſtro libere movendo & longitudinem ſemidiametri ſuæ deſcribendo, ex reſiſtentia aëris amitteret motus ſui partem $\frac{1}{4586}$. Obtinet autem eadem proportio quam proxime in globis utcunque magnis & velocibus. Jam vero globum terræ noſtræ denſiorem eſſe, quam ſi totus ex aqua conſtaret, ſic colligo. Si globus hicce totus eſſet aqueus, quæcunque rariora eſſent quam aqua, ob minorem ſpecificam gravitatem emergerent & ſupernatarent. Eaque de cauſa globus terreus aquis undique coopertus, ſi rarior eſſet quam aqua, emergeret alicubi, & aqua omnis inde defluens congregaretur in regione oppoſita. Et par eſt ratio terræ noſtræ maribus magna ex parte circumdatæ. Hæc ſi denſior non eſſet, emergeret ex maribus, & parte ſui pro gradu levitatis extaret ex aqua, maribus omnibus in regionem oppoſitam confluentibus. Eodem argumento maculæ ſolares leviores ſunt quam materia lucida ſolaris cui ſupernatant. Et in formatione qualicunque planetarum, ex aqua materia omnis gravior, quo tempore maſſa fluida erat, centrum

centrum petebat. Unde cum terra communis ſuprema quaſi duplo gravior ſit quam aqua, & paulo inferius in fodinis quaſi triplo vel quadruplo aut etiam quintuplo gravior reperiatur: veriſimile eſt quod copia materiæ totius in terra quaſi quintuplo vel ſextuplo major ſit quam ſi tota ex aqua conſtaret; præſertim cum terram quaſi quadruplo denſiorem eſſe quam jovem jam ante oſtenſum ſit. Quare ſi jupiter paulo denſior ſit quam aqua, hic ſpatio dierum triginta, quibus longitudinem 459 ſemidiametrorum ſuarum deſcribit, amitteret in medio ejuſdem denſitatis cum aëre noſtro motus ſui partem fere decimam. Verum cum reſiſtentia mediorum minuatur in ratione ponderis ac denſitatis, ſic ut aqua, quæ partibus $13\frac{2}{3}$ levior eſt quam argentum vivum, minus reſiſtat in eadem ratione; & aer, qui partibus 860 levior eſt quam aqua, minus reſiſtat in eadem ratione: ſi aſcendatur in cœlos ubi pondus medii, in quo planetæ moventur, diminuitur in immenſum, reſiſtentia prope ceſſabit. Oſtendimus utique in ſcholio ad prop. XXII. lib. II. quod ſi aſcenderetur ad altitudinem milliarium ducentorum ſupra terram, aër ibi rarior foret quam ad ſuperficiem terræ in ratione 30 ad 0,0000000000003998, ſeu 75000000000000 ad 1 circiter. Et hinc ſtella jovis in medio ejuſdem denſitatis cum aere illo ſuperiore revolvendo, tempore annorum 1000000, ex reſiſtentia medii non amitteret motus ſui partem decimam centeſimam milleſimam. In ſpatiis utique terræ proximis, nihil invenitur quod reſiſtentiam creet præter aërem exhalationes & vapores. His ex vitro cavo cylindrico diligentiſſime exhauſtis gravia intra vitrum liberrime & ſine omni reſiſtentia ſenſibili cadunt; ipſum aurum & pluma tenuiſſima ſimul demiſſa æquali cum velocitate cadunt, & caſu ſuo deſcribendo altitudinem pedum quatuor ſex vel octo ſimul incidunt in fundum, ut experientia compertum eſt. Et propterea ſi in cœlos aſcendatur aëre & exhalationibus vacuos, planetæ & cometæ ſine omni reſiſtentia ſenſibili per ſpatia illa diutiſſime movebuntur.

HYPO-

HYPOTHESIS I.

Centrum ſyſtematis mundani quieſcere.

Hoc ab omnibus conceſſum eſt, dum aliqui terram, alii ſolem in centro ſyſtematis quieſcere contendant. Videamus quid inde ſequatur.

PROPOSITIO XI. THEOREMA XI.

Commune centrum gravitatis terræ, ſolis & planetarum omnium quieſcere.

Nam centrum illud (per legum corol. iv.) vel quieſcet vel progredietur uniformiter in directum. Sed centro illo ſemper progrediente, centrum mundi quoque movebitur contra hypotheſin.

PROPOSITIO XII. THEOREMA XII.

Solem motu perpetuo agitari, ſed nunquam longe recedere a communi gravitatis centro planetarum omnium.

Nam cum (per corol. 2. prop. viii.) materia in ſole ſit ad materiam in jove ut 1067 ad 1, & diſtantia jovis a ſole ſit ad ſemidiametrum ſolis in ratione paulo majore; incidet commune centrum gravitatis jovis & ſolis in punctum paulo ſupra ſuperficiem ſolis. Eodem argumento cum materia in ſole ſit ad materiam in ſaturno ut 3021 ad 1, & diſtantia ſaturni a ſole ſit ad ſemidiametrum ſolis in ratione paulo minore: incidet commune centrum gravitatis ſaturni & ſolis in punctum paulo infra ſuperficiem ſolis. Et ejuſdem calculi veſtigiis inſiſtendo ſi terra & planetæ omnes ex una ſolis parte conſiſterent, commune omnium centrum gravitatis vix integra ſolis diametro a centro ſolis diſtaret. Aliis in caſibus diſtantia centrorum ſemper minor eſt. Et propterea cum centrum illud gravitatis perpetuo quieſcit, ſol pro vario planetarum ſitu in omnes partes movebitur, ſed a centro illo nunquam longe recedet.

Corol. Hinc commune gravitatis centrum terræ, ſolis & planetarum omnium pro centro mundi habendum eſt. Nam cum terra, ſol

ſol & planetæ omnes gravitent in ſe mutuo, & propterea, pro vi gravitatis ſuæ, ſecundum leges motus perpetuo agitentur: perſpicuum eſt quod horum centra mobilia pro mundi centro quieſcente haberi nequeunt. Si corpus illud in centro locandum eſſet in quod corpora omnia maxime gravitant (uti vulgi eſt opinio) privilegium iſtud concedendum eſſet ſoli. Cum autem ſol moveatur, eligendum erit punctum quieſcens, a quo centrum ſolis quam minime diſcedit, & a quo idem adhuc minus diſcederet, ſi modo ſol denſior eſſet & major, ut minus moveretur.

PROPOSITIO XIII. THEOREMA XIII.

Planetæ moventur in ellipſibus umbilicum habentibus in centro ſolis, & radiis ad centrum illud ductis areas deſcribunt temporibus proportionales.

Diſputavimus ſupra de his motibus ex phænomenis. Jam cognitis motuum principiis, ex his colligimus motus cœleſtes a priori. Quoniam pondera planetarum in ſolem ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a centro ſolis; ſi ſol quieſceret & planetæ reliqui non agerent in ſe mutuo, forent orbes eorum elliptici, ſolem in umbilico communi habentes, & areæ deſcriberentur temporibus proportionales (per prop. I. & XI. & corol. I. prop. XIII. lib. I.) actiones autem planetarum in ſe mutuo perexiguæ ſunt (ut poſſint contemni) & motus planetarum in ellipſibus circa ſolem mobilem minus perturbant (per prop. LXVI. lib. I.) quam ſi motus iſti circa ſolem quieſcentem peragerentur.

Actio quidem jovis in ſaturnum non eſt omnino contemnenda. Nam gravitas in jovem eſt ad gravitatem in ſolem (paribus diſtantiis) ut 1 ad 1067; ideoque in conjunctione jovis & ſaturni, quoniam diſtantia ſaturni a jove eſt ad diſtantiam ſaturni a ſole fere ut 4 ad 9, erit gravitas ſaturni in jovem ad gravitatem ſaturni in ſolem ut 81 ad 16×1067 ſeu 1 ad 211 circiter. Et hinc oritur perturbatio orbis ſaturni in ſingulis planetæ hujus cum jove conjunctionibus adeo ſenſibilis ut ad eandem aſtronomi hæreant. Pro vario ſitu planetæ in his conjunctionibus, eccentricitas ejus nunc augetur nunc diminuitur, aphelium nunc promovetur nunc forte retrahitur, & medius

De Mundi Systemate

motus per vices acceleratur & retardatur. Error tamen omnis in motu ejus circum ſolem a tanta vi oriundus (præterquam in motu medio) evitari fere poteſt conſtituendo umbilicum inferiorem orbis ejus in communi centro gravitatis jovis & ſolis (per prop. LXVII. lib. I.) & propterea ubi maximus eſt, vix ſuperat minuta duo prima. Et error maximus in motu medio vix ſuperat minuta duo prima annuatim. In conjunctione autem jovis & ſaturni gravitates acceleratrices ſolis in ſaturnum, jovis in ſaturnum & jovis in ſolem ſunt fere ut 16, 81 & $\frac{16 \times 81 \times 3021}{25}$ ſeu 156609, ideoque differentia gravitatum ſolis in ſaturnum & jovis in ſaturnum eſt ad gravitatem jovis in ſolem ut 65 ad 156609 ſeu 1 ad 2409. Huic autem differentiæ proportionalis eſt maxima ſaturni efficacia ad perturbandum motum jovis, & propterea perturbatio orbis jovialis longe minor eſt quam ea ſaturnii. Reliquorum orbium perturbationes ſunt adhuc longe minores, præterquam quod orbis terræ ſenſibiliter perturbatur a luna. Commune centrum gravitatis terræ & lunæ, ellipſin circum ſolem in umbilico poſitum percurrit, & radio ad ſolem ducto areas in eadem temporibus proportionales deſcribit, terra vero circum hoc centrum commune motu menſtruo revolvitur.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA XIV.

Orbium aphelia & nodi quieſcunt.

Aphelia quieſcunt, per prop. XI. lib. I. ut & orbium plana, per ejuſdem libri prop. I. & quieſcentibus planis quieſcunt nodi. Attamen a planetarum revolventium & cometarum actionibus in ſe invicem orientur inæqualitates aliquæ, ſed quæ ob parvitatem hic contemni poſſunt.

Corol. 1. Quieſcunt etiam ſtellæ fixæ, propterea quod datas ad aphelia nodoſque poſitiones ſervant.

Corol. 2. Ideoque cum nulla ſit earum parallaxis ſenſibilis ex terræ motu annuo oriunda, vires earum ob immenſam corporum diſtantiam nullos edent ſenſibiles effectus in regione ſyſtematis noſtri. Quinimo fixæ in omnes cœli partes æqualiter diſperſæ contrariis attractionibus vires mutuas deſtruunt, per prop. LXX. lib. I.

Scholium.

Cum planetæ ſoli propiores (nempe mercurius, venus, terra, & mars) ob corporum parvitatem parum agant in ſe invicem: horum aphelia & nodi quieſcent, niſi quatenus a viribus jovis, ſaturni & corporum ſuperiorum turbentur. Et inde colligi poteſt per theoriam gravitatis, quod horum aphelia moventur aliquantulum in conſequentia reſpectu fixarum, idque in proportione ſeſquiplicata diſtantiarum horum planetarum a ſole. Ut ſi aphelium martis in annis centum conficiat 33′. 20″ in conſequentia reſpectu fixarum; aphelia terræ, veneris, & mercurii in annis centum conficient 17′. 40″, 10′. 53″, & 4′. 16″ reſpective. Et hi motus, ob parvitatem, negliguntur in hac propoſitione.

PROPOSITIO XV. PROBLEMA I.

Invenire orbium principales diametros.

Capiendæ ſunt hæ in ratione ſubſeſquiplicata temporum periodicorum, per prop. xv. lib. I. deinde ſigillatim augendæ in ratione ſummæ maſſarum ſolis & planetæ cujuſque revolventis ad primam duarum medie proportionalium inter ſummam illam & ſolem, per prop. LX. lib. I.

PROPOSITIO XVI. PROBLEMA II.

Invenire orbium eccentricitates & aphelia.

Problema conſit per prop. XVIII. lib. I.

PROPOSITIO XVII. THEOREMA XV.

Planetarum motus diurnos uniformes eſſe, & librationem lunæ ex ipſius motu diurno oriri.

Patet per motus legem I. & corol. 22. prop. LXVI. lib. I. Jupiter utique reſpectu fixarum revolvitur horis 9. 56′, mars horis 24. 39′. venus horis 23 circiter, terra horis 23. 56′, ſol diebus 25½ & luna diebus 27. 7 hor. 43′. Hæc ita ſe habere ex phænomenis manifeſtum eſt. Maculæ in corpore ſolis ad eundem ſitum in diſco ſolis redeunt diebus 27½ circiter, reſpectu terræ; ideoque reſpectu fixarum ſol revolvitur diebus 25½ circiter. Quoniam vero lunæ circa

 axem

De Mundi Systemate

axem ſuum uniformiter revolventis dies menſtruus eſt: hujus facies eadem ulteriorem umbilicum orbis ejus ſemper reſpiciet quamproxime, & propterea pro ſitu umbilici illius deviabit hinc inde a terra. Hæc eſt libratio lunæ in longitudinem: Nam libratio in latitudinem orta eſt ex latitudine lunæ & inclinatione axis ejus ad planum eclipticæ. Hanc librationis lunaris theoriam D. *N. Mercator* in aſtronomia ſua initio anni 1676 edita, ex literis meis plenius expoſuit. Simili motu extimus ſaturni ſatelles circa axem ſuum revolvi videtur, eadem ſui facie ſaturnum perpetuo reſpiciens. Nam circum ſaturnum revolvendo, quoties ad orbis ſui partem orientalem accedit, ægerrime videtur, & plerumque videri ceſſat: id quod evenire poteſt per maculas quaſdam in ea corporis parte quæ terræ tunc obvertitur, ut *Caſſinus* notavit. Simili etiam motu ſatelles extimus jovialis circa axem ſuum revolvi videtur, propterea quod in parte corporis jovi averſa maculam habeat quæ tanquam in corpore jovis cernitur ubicunque ſatelles inter jovem & oculos noſtros tranſit.

PROPOSITIO XVIII. THEOREMA XVI.

Axes planetarum diametris quæ ad eoſdem axes normaliter ducuntur minores eſſe.

Planetæ ſublato omni motu circulari diurno figuram ſphæricam, ob æqualem undique partium gravitatem, affectare deberent. Per motum illum circularem fit ut partes ab axe recedentes juxta æquatorem aſcendere conentur. Ideoque materia ſi fluida ſit aſcenſu ſuo ad æquatorem diametros adaugebit, axem vero deſcenſu ſuo ad polos diminuet. Sic jovis diameter (conſentientibus aſtronomorum obſervationibus) brevior deprehenditur inter polos quam ab oriente in occidentem. Eodem argumento, niſi terra noſtra paulò altior eſſet ſub æquatore quam ad polos, maria ad polos ſubſiderent, & juxta æquatorem aſcendendo, ibi omnia inundarent.

PROPOSITIO XIX. PROBLEMA III.

Invenire proportionem axis planetæ ad diametros eidem perpendiculares.

Norwoodus noſter circa annum 1635 menſurando diſtantiam pedum Londi-

Londinenſium 905751 inter *Londinum* & *Eboracum*, & obſervando differentiam latitudinum 2 *gr.* 28′ collegit menſuram gradus unius eſſe pedum Londinenſium 367196, id eſt, hexapedarum Pariſienſium 57300.

Picartus menſurando arcum gradus unius & 22′. 55″ in meridiano inter *Ambianum* & *Malvoiſinam*, invenit arcum gradus unius eſſe hexapedarum Pariſienſium 57060. *Caſſinus* ſenior menſuravit diſtantiam in meridiano a villa *Collioure* in *Rouſſilion* ad obſervatorium Pariſienſe; & filius ejus addidit diſtantiam ab obſervatorio ad turrem urbis *Dunkirk*. Diſtantia tota erat hexapedarum 486156½, & differentia latitudinum villæ *Collioure* & urbis *Dunkirk* erat graduum octo & 31′. 11⅚″. Unde arcus gradus unius prodit hexapedarum Pariſienſium 57061. Et ex his menſuris colligitur ambitus terræ pedum Pariſienſium 123249600, & ſemidiameter ejus pedum 19615800, ex hypotheſi quod terra ſit ſphærica.

In latitudine *Lutetiæ Pariſiorum* corpus grave tempore minuti unius ſecundi cadendo deſcribit pedes Pariſienſes 15 dig. 1 lin. 1⅞. ut ſupra, id eſt, lineas 2173⅞. Pondus corporis diminuitur per pondus aëris ambientis. Ponamus pondus amiſſum eſſe partem undecimam milleſimam ponderis totius, & corpus illud grave cadendo in vacuo deſcribet altitudinem linearum 2174 tempore minuti unius ſecundi.

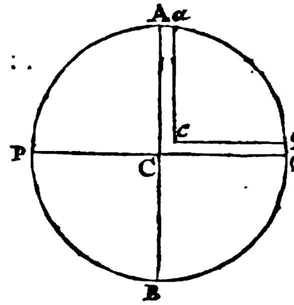
Corpus in circulo ad diſtantiam pedum 19615800 a centro, ſingulis diebus ſidereis horarum 23. 56′. 4″ uniformiter revolvens tempore minuti unius ſecundi deſcribet arcum pedum 1433,46, cujus ſinus verſus eſt pedum 0,0523656, ſeu linearum 7,54064. Ideoque vis, qua gravia deſcendunt in latitudine *Lutetiæ*, eſt ad vim centrifugam corporum in æquatore a terræ motu diurno oriundam, ut 2174 ad 7,54064.

Vis centrifuga corporum in æquatore terræ eſt ad vim centrifugam, qua corpora directe tendunt a terra in latitudine *Lutetiæ* graduum 48. 50′. 10″, in duplicata ratione radii ad ſinum complementi latitudinis illius, id eſt, ut 7,54064 ad 3,267. Addatur hæc vis ad vim qua gravia deſcendunt in latitudine illa *Lutetiæ*, & corpus in latitudine illa vi tota gravitatis cadendo, tempore minuti unius ſecundi deſcribet lineas 2177,267, ſeu pedes Pariſienſes 15 dig. 1 & lin. 5,267. Et vis tota gravitatis in latitudine illa erit ad vim

centri-

centrifugam corporum in æquatore terræ ut 2177,267 ad 7,54064 ſeu 289 ad 1.

Unde ſi *APBQ* figuram terræ deſignet jam non amplius ſphæricam ſed revolutione ellipſeos circum axem minorem *PQ* genitam, ſitque *ACQqca* canalis aquæ plena, a polo *Qq* ad centrum *Cc*, & inde ad æquatorem *Aa* pergens: debebit pondus aquæ in canalis crure *ACca*, eſſe ad pondus aquæ in crure altero *QCcq* ut 289 ad 288, eo quod vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam e ponderis partibus 289 ſuſtinebit ac detrahet, & pondus 288 in altero crure ſuſtinebit reliquas. Porro (ex propoſitionis XCI. corol. 2. lib. 1.) computationem ineundo, invenio quod ſi terra conſtaret ex uniformi materia, motuque omni privaretur, & eſſet ejus axis *PQ* ad diametrum *AB* ut 100 ad 101: gravitas in loco *Q* in terram foret ad gravitatem in eodem loco *Q* in ſphæram centro *C* radio *PC* vel *QC* deſcriptam, ut 126 ad 125. Et eodem argumento gravitas in loco *A* in ſphæroidem, convolutione ellipſeos *APBQ* circa axem *AB* deſcriptam, eſt ad gravitatem in eodem loco *A* in ſphæram centro *C* radio *AC* deſcriptam, ut 125 ad 126. Eſt autem gravitas in loco *A* in terram media proportionalis inter gravitates in dictam ſphæroidem & ſphæram: propterea quod ſphæra, diminuendo diametrum *PQ* in ratione 101 ad 100, vertitur in figuram terræ; & hæc figura diminuendo in eadem ratione diametrum tertiam, quæ diametris duabus *AB*, *PQ* perpendicularis eſt, vertitur in dictam ſphæroidem; & gravitas in *A*, in caſu utroque, diminuitur in eadem ratione quam proxime. Eſt igitur gravitas in *A* in ſphæram centro *C* radio *AC* deſcriptam, ad gravitatem in *A* in terram ut 126 ad $125\frac{1}{2}$, & gravitas in loco *Q* in ſphæram centro *C* radio *QC* deſcriptam, eſt ad gravitatem in loco *A* in ſphæram centro *C* radio *AC* deſcriptam, in ratione diametrorum (per prop. LXXII. lib. 1.) id eſt, ut 100 ad 101. Conjungantur jam hæ tres rationes, 126 ad 125, 126 ad $125\frac{1}{2}$, & 100 ad 101: & fiet gravitas in loco *Q* in terram ad gravitatem in loco *A* in terram, ut $126 \times 126 \times 100$ ad $125 \times 125\frac{1}{2} \times 101$, ſeu ut 501 ad 500.



Jam

Jam cum (per corol. 3. prop. xci. lib. 1.) gravitas in canalis crure utrovis *ACca* vel *QCcq* ſit ut diſtantia locorum a centro terræ; ſi crura illa ſuperficiebus tranſverſis & æquidiſtantibus diſtinguantur in partes totis proportionales, erunt pondera partium ſingularum in crure *ACca* ad pondera partium totidem in crure altero, ut magnitudines & gravitates acceleratrices conjunctim; id eſt, ut 101 ad 100 & 500 ad 501, hoc eſt, ut 505 ad 501. Ac proinde ſi vis centrifuga partis cujuſque in crure *ACca* ex motu diurno oriunda, fuiſſet ad pondus partis ejuſdem ut 4 ad 505, eo ut de pondere partis cujuſque, in partes 505 diviſo, partes quatuor detraheret; manerent pondera in utroque crure æqualia, & propterea fluidum conſiſteret in æquilibrio. Verum vis centrifuga partis cujuſque eſt ad pondus ejuſdem ut 1 ad 289, hoc eſt, vis centrifuga quæ deberet eſſe ponderis pars $\frac{4}{505}$ eſt tantum pars $\frac{1}{289}$. Et propterea dico, ſecundum regulam auream, quod ſi vis centrifuga $\frac{4}{505}$ faciat ut altitudo aquæ in crure *ACca* ſuperet altitudinem aquæ in crure *QCcq* parte centeſima totius altitudinis: vis centrifuga $\frac{1}{289}$ faciet ut exceſſus altitudinis in crure *ACca* ſit altitudinis in crure altero *QCcq* pars tantum $\frac{1}{289}$. Eſt igitur diameter terræ ſecundum æquatorem ad ipſius diametrum per polos ut 230 ad 229. Ideoque cum terræ ſemidiameter mediocris, juxta menſuram *Picarti*, ſit pedum Pariſienſium 19615800, ſeu milliarium 3923,16 (poſito quod milliare ſit menſura pedum 5000) terra altior erit ad æquatorem quam ad polos exceſſu pedum 85472, ſeu milliarum $17\frac{1}{10}$. Et altitudo ejus ad æquatorem erit 19658600 pedum circiter, & ad polos 19573000 pedum.

Si planeta major ſit vel minor quam terra manente ejus denſitate ac tempore periodico revolutionis diurnæ, manebit proportio vis centrifugæ ad gravitatem, & propterea manebit etiam proportio diametri inter polos ad diametrum ſecundum æquatorem. At ſi motus diurnus in ratione quacunque acceleretur vel retardetur, augebitur vel minuetur vis centrifuga in duplicata illa ratione, & propterea differentia diametrorum augebitur vel minuetur in eadem duplicata ratione quamproxime. Et ſi denſitas planetæ augeatur vel minuatur in ratione quavis, gravitas etiam in ipſum tendens augebitur vel minuetur in eadem ratione, & differentia diametrorum viciſſim minuetur in ratione gravitatis auctæ vel augebitur in ratione

gravitatis

gravitatis diminutæ. Unde cum terra reſpectu fixarum revolvatur horis 23. 56′, jupiter autem horis 9. 56′, ſintque temporum quadrata ut 29 ad 5, & revolventium denſitates ut 400 ad $94\frac{1}{2}$: differentia diametrorum jovis erit ad ipſius diametrum minorem ut $\frac{29}{5} \times \frac{400}{94\frac{1}{2}} \times \frac{1}{229}$ ad 1, ſeu 1 ad $9\frac{1}{3}$ quamproxime. Eſt igitur diameter jovis ab oriente in occidentem ducta, ad ejus diametrum inter polos ut $10\frac{1}{3}$ ad $9\frac{1}{3}$ quamproxime. Unde cum ejus diameter major ſit 37″, ejus diameter minor quæ polis interjacet, erit 33″. 25‴. Pro luce erratica addantur 3″ circiter, & hujus planetæ diametri apparentes evadent 40″ & 36″. 25‴: quæ ſunt ad invicem ut $11\frac{1}{6}$ ad $10\frac{1}{6}$ quamproxime. Hoc ita ſe habet ex hypotheſi quod corpus jovis ſit uniformiter denſum. At ſi corpus ejus ſit denſius verſus planum æquatoris quam verſus polos, diametri ejus poſſunt eſſe ad invicem ut 12 ad 11, vel 13 ad 12, vel forte 14 ad 13. Et *Caſſinus* quidem anno 1691 obſervavit, quod jovis diameter ab oriente in occidentem porrecta diametrum alteram ſuperaret parte ſui circiter *decima quinta*. *Poundus* autem noſter teleſcopio pedum 123 longitudinis & optimo micrometro, diametros jovis anno 1719, menſuravit ut ſequitur.

Tempora.		*Diam. max.*	*Diam. min.*	*Diametri ad invicem.*	
dies	*hor.*	*part.*	*part.*		
Jan. 28	6	13,40	12,28	*ut* 12	*ad* 11
Mar. 6	7	13,12	12,20	$13\frac{3}{4}$	$12\frac{1}{4}$
Mar. 9	7	13,12	12,08	$12\frac{2}{3}$	$11\frac{2}{3}$
Apr. 9	9	12,32	11,48	$14\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$

Congruit igitur theoria cum phænomenis. Nam planetæ magis incaleſcunt ad lucem ſolis verſus æquatores ſuos, & propterea *paulo* magis ibi decoquuntur quam verſus polos.

Quinetiam gravitatem per rotationem diurnam terræ noſtræ minui ſub æquatore, atque ideo terram ibi altius ſurgere quam ad polos (ſi materia ejus uniformiter denſa ſit) patebit per experimenta pendulorum quæ recenſentur in propoſitione ſequente.

PROPO-

PROPOSITIO XX. PROBLEMA IV.

Invenire & inter ſe comparare pondera corporum in terræ hujus regionibus diverſis.

Quoniam pondera inæqualium crurum canalis aqueæ *ACQqca* æqualia ſunt; & pondera partium, cruribus totis proportionalium & ſimiliter in totis ſitarum, ſunt ad invicem ut pondera totorum, ideoque etiam æquantur inter ſe; erunt pondera æqualium & in cruribus ſimiliter ſitarum partium reciproce ut crura, id eſt, reciproce ut 230 ad 229. Et par eſt ratio homogeneorum & æqualium quorumvis & in canalis cruribus ſimiliter ſitorum corporum. Horum pondera ſunt reciproce ut crura, id eſt, reciproce ut diſtantiæ corporum a centro terræ. Proinde ſi corpora in ſupremis canalium partibus, ſive in ſuperficie terræ conſiſtant; erunt pondera eorum ad invicem reciproce ut diſtantiæ eorum a centro. Et eodem argumento pondera, in aliis quibuſcunque per totam terræ ſuperficiem regionibus, ſunt reciproce ut diſtantiæ locorum a centro; & propterea, ex hypotheſi quod terra ſphærois ſit, dantur proportione.

Unde tale conſit theorema, quod incrementum ponderis pergendo ab æquatore ad polos, ſit quam proxime ut ſinus verſus latitudinis duplicatæ, vel quod perinde eſt, ut quadratum ſinus recti latitudinis. Et in eadem circiter ratione augentur arcus graduum latitudinis in meridiano. Ideoque cum latitudo *Lutetiæ Pariſiorum* ſit 48 gr. 50′, ea locorum ſub æquatore 00 gr. 00′, & ea locorum ad polos 90 gr. & duplorum ſinus verſi ſint 11334, 00000 & 20000, exiſtente radio 10000, & gravitas ad polum ſit ad gravitatem ſub æquatore ut 230 ad 229, & exceſſus gravitatis ad polum ad gravitatem ſub æquatore ut 1 ad 229: erit exceſſus gravitatis in latitudine *Lutetiæ* ad gravitatem ſub æquatore, ut $1 \times \frac{11334}{20000}$ ad 229, ſeu 5667 ad 2290000. Et propterea gravitates totæ in his locis erunt ad invicem ut 2295667 ad 2290000. Quare cum longitudines pendulorum æqualibus temporibus oſcillantium ſint ut gravitates, & in latitudine *Lutetiæ Pariſiorum* longitudo penduli ſingulis minutis ſecundis oſcillantis ſit pedum trium Pariſienſium & linearum $8\frac{1}{2}$, vel potius ob pondus aëris $8\frac{5}{9}$: longitudo penduli ſub æquatore ſuperabitur a longitudine ſynchroni penduli Pariſienſis, exceſſu lineæ unius & 87 partium milleſimarum lineæ. Et ſimili computo conſit tabula ſequens.

Latitudo loci.	*Longitudo penduli.*		*Menſura gradus unius in meridiano.*
grad.	*ped.*	*lin.*	*hexapedæ.*
0	3	7,468	56637
5	3	7,482	56642
10	3	7,526	56659
15	3	7,596	56687
20	3	7,692	56724
25	3	7,812	56769
30	3	7,948	56823
35	3	8,099	56882
40	3	8,261	56945
1	3	8,294	56958
2	3	8,327	56971
3	3	8,361	56984
4	3	8,394	56997
45	3	8,428	57010
6	3	8,461	57022
7	3	8,494	57035
8	3	8,528	57048
9	3	8,561	57061
50	3	8,594	57074
55	3	8,756	57137
60	3	8,907	57196
65	3	9,044	57250
70	3	9,162	57295
75	3	9,258	57332
80	3	9,329	57360
85	3	9,372	57377
90	3	9,387	57382

Conſtat autem per hanc tabulam quod graduum inæqualitas tam parva ſit, ut in rebus geographicis figura terræ pro ſphærica haberi poſſit: præſertim ſi terra paulo denſior ſit verſus planum æquatoris quam verſus polos.

Jam vero aſtronomi aliqui in longinquas regiones ad obſervationes aſtronomicas faciendas miſſi, obſervarunt quod horologia oſcillatoria tardius moverentur prope æquatorem quam in regionibus noſtris. Et primo quidem D. *Richer* hoc obſervavit anno 1672 in inſula *Cayennæ*. Nam dum obſervaret tranſitum fixarum per meridianum menſe

menſe *Auguſto*, reperit horologium ſuum tardius moveri quam pro medio motu ſolis, exiſtente differentia 2′. 28″ ſingulis diebus. Deinde faciendo ut pendulum ſimplex ad minuta ſingula ſecunda per horologium optimum menſurata oſcillaret, notavit longitudinem penduli ſimplicis, & hoc fecit ſæpius ſingulis ſeptimanis per menſes decem. Tum in *Galliam* redux contulit longitudinem hujus penduli cum longitudine penduli Pariſienſis (quæ erat trium pedum Pariſienſium, & octo linearum cum tribus quintis partibus lineæ) & reperit breviorem eſſe, exiſtente differentia lineæ unius cum quadrante.

Poſtea *Halleius* noſter circa annum 1677 ad inſulam *Sanctæ Hellenæ* navigans, reperit horologium ſuum oſcillatorium ibi tardius moveri quam *Londini*, ſed differentiam non notavit. Pendulum vero brevius reddidit pluſquam octava parte digiti, ſeu linea una cum ſemiſſe. Et ad hoc efficiendum, cum longitudo cochleæ in ima parte penduli non ſufficeret, annulum ligneum thecæ cochleæ & ponderi pendulo interpoſuit.

Deinde anno 1682 D. *Varin* & D. *Des Hayes* invenerunt longitudinem penduli ſingulis minutis ſecundis oſcillantis in obſervatorio regio Pariſienſi eſſe ped. 3. lin. $8\frac{5}{9}$. Et in inſula *Gorea* eadem methodo longitudinem penduli ſynchroni invenerunt eſſe ped. 3. lin. $6\frac{5}{9}$, exiſtente longitudinum differentia lin. 2. Et eodem anno ad inſulas *Guadaloupam* & *Martinicam* navigantes, invenerunt longitudinem penduli ſynchroni in his inſulis eſſe ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$.

Poſthac D. *Couplet* filius anno 1697 menſe *Julio*, horologium ſuum oſcillatorium ad motum ſolis medium in obſervatorio regio Pariſienſi ſic aptavit, ut tempore ſatis longo horologium cum motu ſolis congrueret. Deinde *Ulyſſipponem* navigans invenit quod menſe *Novembri* proximo horologium tardius iret quam prius, exiſtente differentia 2′. 13″ in horis 24. Et menſe *Martio* ſequente *Paraibam* navigans invenit ibi horologium ſuum tardius ire quam *Pariſiis*, exiſtente differentia 4′. 12″ in horis 24. Et affirmat pendulum ad minuta ſecunda oſcillans brevius fuiſſe *Ulyſſipponi* lineis $2\frac{1}{2}$ & *Paraibæ* lineis $3\frac{2}{3}$ quam *Pariſiis*. Rectius poſuiſſet differentias eſſe $1\frac{1}{3}$ & $2\frac{5}{9}$. Nam hæ differentiæ differentiis temporum 2′. 13″, & 4′. 12″ reſpondent. Craſſioribus hujus obſervationibus minus fidendum eſt.

Annis proximis (1699 & 1700) D. *Des Hayes* ad *Americam* denuo navigans, determinavit quod in inſulis *Cayennæ* & *Granadæ* longitudo penduli ad minuta ſecunda oſcillantis, eſſet paulo minor quam ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$, quodque in inſula *S. Chriſtophori* longitudo illa eſſet ped. 3. lin. $6\frac{3}{4}$, & quod in inſula *S. Dominici* eadem eſſet ped. 3. lin. 7.

Annoque 1704. *P. Feuelleus* invenit in *Porto-belo* in *America* longitudinem penduli ad minuta ſecunda oſcillantis, eſſe pedum trium Pariſienſium & linearum tantum $5\frac{7}{12}$, id eſt, tribus fere lineis breviorem quam *Lutetiæ Pariſiorum*, ſed errante obſervatione. Nam deinde ad inſulam *Martinicam* navigans, invenit longitudinem penduli iſochroni eſſe pedum tantum trium Pariſienſium & linearum $5\frac{10}{12}$.

Latitudo autem *Paraibæ* eſt $6^{gr.}\,38'$ ad auſtrum, & ea *Porto-beli* $9^{gr.}\,33'$ ad boream, & latitudines inſularum *Cayennæ*, *Goreæ*, *Guadaloupæ*, *Martinicæ*, *Granadæ*, *Sancti Chriſtophori*, & *Sancti Dominici* ſunt reſpective $4^{gr.}\,55'$, $14^{gr.}\,40'$, $14^{gr.}\,00'$, $14^{gr.}\,44'$, $12^{gr.}\,6'$, $17^{gr.}\,19'$, & $19^{gr.}\,48'$ ad boream. Et exceſſus longitudinis penduli Pariſienſis ſupra longitudines pendulorum iſochronorum in his latitudinibus obſervatas ſunt paulo majores quam pro tabula longitudinum penduli ſuperius computata. Et propterea terra aliquanto altior eſt ſub æquatore quam pro ſuperiore calculo, & denſior ad centrum quam in fodinis prope ſuperficiem, niſi forte calores in zona torrida longitudinem pendulorum aliquantulum auxerint.

Obſervavit utique D. *Picartus* quod virga ferrea, quæ tempore hyberno ubi gelabant frigora erat pedis unius longitudine, ad ignem calefacta evaſit pedis unius cum quarta parte lineæ. Deinde D. *de la Hire* obſervavit quod virga ferrea quæ tempore conſimili hyberno ſex erat pedum longitudinis, ubi ſoli æſtivo exponebatur evaſit ſex pedum longitudinis cum duabus tertiis partibus lineæ. In priore caſu calor major fuit quam in poſteriore, in hoc vero major fuit quam calor externarum partium corporis humani. Nam metalla ad ſolem æſtivum valde incaleſcunt. At virga penduli in horologio oſcillatorio nunquam exponi ſolet calori ſolis æſtivi, nunquam calorem concipit calori externæ ſuperficiei corporis humani æqualem. Et propterea virga penduli in horologio tres pedes longa, paulo quidem longior erit tempore æſtivo quam hyberno, ſed exceſſu

quartam

quartam partem lineæ unius vix ſuperante. Proinde differentia tota longitudinis pendulorum quæ in diverſis regionibus iſochrona ſunt, diverſo calori attribui non poteſt. Sed neque erroribus aſtronomorum e *Gallia* miſſorum tribuenda eſt hæc differentia. Nam quamvis eorum obſervationes non perfecte congruant inter ſe, tamen errores ſunt adeo parvi ut contemni poſſint. Et in hoc concordant omnes, quod iſochrona pendula ſunt breviora ſub æquatore quam in obſervatorio regio Pariſienſi, exiſtente differentia non minore quam lineæ unius cum quadrante, non majore quam linearum $2\frac{2}{3}$. Per obſervationes D. *Richeri* in *Cayenna* factas differentia fuit lineæ unius cum quadrante. Per eas D. *Des Hayes* differentia illa correcta prodiit lineæ unius cum ſemiſſe vel unius cum tribus quartis partibus lineæ. Per eas aliorum minus accuratas prodiit eadem quaſi duarum linearum. Et hæc diſcrepantia partim ab erroribus obſervationum, partim a diſſimilitudine partium internarum terræ & altitudine montium, & partim a diverſis aëris caloribus, oriri potuit.

Virga ferrea pedes tres longa, tempore hyberno in *Anglia*, brevior eſt quam tempore æſtivo, ſexta parte lineæ unius, quantum ſentio. Ob calores ſub æquatore auferatur hæc quantitas de differentia lineæ unius cum quadrante a *Richero* obſervata, & manebit linea $1\frac{1}{12}$: quæ cum linea $1\frac{87}{1000}$ per theoriam jam ante collecta probe congruit. *Richerus* autem obſervationes in *Cayenna* factas, ſingulis ſeptimanis per menſes decem iteravit, & longitudines penduli in virga ferrea ibi notatas cum longitudinibus ejus in *Gallia* ſimiliter notatis contulit. Quæ diligentia & cautela in aliis obſervatoribus defuiſſe videtur. Si hujus obſervationibus fidendum eſt, terra altior erit ad æquatorem quam ad polos exceſſu milliarium ſeptendecim circiter, ut ſupra per theoriam prodiit.

PROPO-

PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVII.

Puncta æquinoctialia regredi, & axem terræ ſingulis revolutionibus annuis nutando bis inclinari in eclipticam & bis redire ad poſitionem priorem.

Patet per corol. 20. prop. LXVI. lib. I. Motus tamen iſte nutandi perexiguus eſſet debet, & vix aut ne vix quidem ſenſibilis.

PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVIII.

Motus omnes lunares, omneſque motuum inæqualitates ex allatis principiis conſequi.

Planetas majores, interea dum circa ſolem feruntur, poſſe alios minores circum ſe revolventes planetas deferre, & minores illos in ellipſibus, umbilicos in centris majorum habentibus, revolvi debere patet per prop. LXV. lib. I. Actione autem ſolis perturbabuntur eorum motus multimode, iiſque adficientur inæqualitatibus quæ in luna noſtra notantur. Hæc utique (per corol. 2, 3, 4, & 5. prop. LXVI.) velocius movetur, ac radio ad terram ducto deſcribit aream pro tempore majorem, orbemque habet minus curvum, atque ideo propius accedit ad terram, in ſyzygiis quam in quadraturis, *niſi* quatenus impedit motus eccentricitatis. Eccentricitas enim maxima eſt (per corol. 9. prop. LXVI.) ubi apogæum lunæ in ſyzygiis verſatur, & minima ubi idem in quadraturis conſiſtit; & inde luna in perigæo velocior eſt & nobis propior, in apogæo autem tardior & remotior in ſyzygiis quam in quadraturis. Progreditur inſuper apogæum, & regrediuntur nodi, ſed motu inæquabili. Et apogæum quidem (per corol. 7. & 8. prop. LXVI.) velocius progreditur in ſyzygiis ſuis, tardius regreditur in quadraturis, & exceſſu progreſſus ſupra regreſſum annuatim fertur in conſequentia. Nodi autem (per corol. 2. prop. LXVI.) quieſcunt in ſyzygiis ſuis & velociſſime regrediuntur in quadraturis. Sed & major eſt lunæ latitudo maxima in ipſius quadraturis (per corol. 10. prop. LXVI.) quam in ſyzygiis: & motus medius tardior in perihelio terræ (per corol. 6. prop. LXVI.) quam in ipſius aphelio. Atque hæ ſunt inæqualitates inſigniores ab aſtronomis notatæ.

Sunt

Sunt etiam aliæ quædam a prioribus aſtronomis non obſervatæ inæqualitates, quibus motus lunares adeo perturbantur, ut nulla hactenus lege ad regulam aliquam certam reduci potuerint. Velocitates enim ſeu motus horarii apogæi & nodorum lunæ, & eorundem æquationes, ut & differentia inter eccentricitatem maximam in ſyzygiis & minimam in quadraturis, & inæqualitas quæ variatio dicitur, augentur ac diminuuntur annuatim (per corol. 14. prop. LXVI.) in triplicata ratione diametri apparentis ſolaris. Et variatio præterea augetur vel diminuitur in duplicata ratione temporis inter quadraturas quam proxime (per corol. 1, & 2. lem. X. & corol. 16. prop. LXVI. lib. I.) ſed hæc inæqualitas in calculo aſtronomico ad proſthaphæreſin lunæ referri ſolet, & cum ea confundi.

PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA V.

Motus inæquales ſatellitum jovis & ſaturni a motibus lunaribus derivare.

Ex motibus lunæ noſtræ motus analogi lunarum ſeu ſatellitum jovis ſic derivantur. Motus medius nodorum ſatellitis extimi jovialis, eſt ad motum medium nodorum lunæ noſtræ, in ratione compoſita ex ratione duplicata temporis periodici terræ circa ſolem ad tempus periodicum jovis circa ſolem, & ratione ſimplici temporis periodici ſatellitis circa jovem ad tempus periodicum lunæ circa terram (per corol. 16. prop. LXVI. lib. I.) ideoque annis centum conficit nodus iſte 8 gr. 24′. in antecedentia. Motus medii nodorum ſatellitum interiorum ſunt ad motum hujus, ut illorum tempora periodica ad tempus periodicum hujus (per idem corollarium) & inde dantur. Motus autem augis ſatellitis cujuſque in conſequentia eſt ad motum nodorum ipſius in antecedentia, ut motus apogæi lunæ noſtræ ad hujus motum nodorum, (per idem corol.) & inde datur. Diminui tamen debet motus augis ſic inventus in ratione 5 ad 9 vel 1 ad 2 circiter, ob cauſam quam hic exponere non vacat. Æquationes maximæ nodorum & augis ſatellitis cujuſque fere ſunt ad æquationes maximas nodorum & augis lunæ reſpective, ut motus nodorum & augis ſatellitum tempore unius revolutionis æquationum priorum, ad motus nodorum & apogæi lunæ tempore unius revolutionis æquationum

De Mundi Systemate

tionum poſteriorum. Variatio ſatellitis e jove ſpectati, eſt ad variationem lunæ, ut ſunt ad invicem toti motus nodorum temporibus quibus ſatelles & luna ad ſolem revolvuntur, per idem corollarium; ideoque in ſatellite extimo non ſuperat 5″. 12‴.

PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XIX.

Fluxum & refluxum maris ab actionibus ſolis ac lunæ oriri.

Mare ſingulis diebus tam lunaribus quam ſolaribus bis intumeſcere debere ac bis defluere, patet per corol. 19. & 20. prop. LXVI. lib. I. ut & aquæ maximam altitudinem, in maribus profundis & liberis, appulſum luminarium ad meridianum loci minori quam ſex horarum ſpatio ſequi, uti fit in maris *Atlantici* & *Æthiopici* tractu toto orientali inter *Galliam* & promontorium *Bonæ Spei* ut & in maris *Pacifici* littore *Chilenſi* & *Peruviano*: in quibus omnibus littoribus æſtus in horam circiter ſecundam, tertiam vel quartam, incidit, niſi ubi motus ab oceano profundo per loca vadoſa propagatus uſque ad horam quintam ſextam ſeptimam aut ultra retardatur. Horas numero ab appulſu luminaris utriuſque ad meridianum loci, tam infra horizontem quam ſupra, & per horas diei lunaris intelligo vigeſimas quartas partes temporis quo luna motu apparente diurno ad meridianum loci revertitur. Vis ſolis vel lunæ ad mare elevandum maxima eſt in ipſo appulſu luminaris ad meridianum loci. Sed vis eo tempore in mare impreſſa manet aliquamdiu & per vim novam ſubinde impreſſam augetur, donec mare ad altitudinem maximam aſcenderit, id quod fiet ſpatio horæ unius duarumve ſed ſæpius ad littora ſpatio horarum trium circiter, vel etiam plurium ſi mare ſit vadoſum.

Motus autem bini, quos luminaria duo excitant, non cernentur diſtincte, ſed motum quendam mixtum efficient. In luminarium conjunctione vel oppoſitione conjungentur eorum effectus, & componetur fluxus & refluxus maximus. In quadraturis ſol attollet aquam ubi luna deprimit, deprimetque ubi luna attollit; & ex effectuum differentia æſtus omnium minimus orietur. Et quoniam, experientia teſte, major eſt effectus lunæ quam ſolis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam lunarem circiter. Extra ſyzygias & quadraturas, æſtus maximus qui ſola vi lunari incidere ſemper deberet in horam tertiam lunarem, & ſola ſolari in tertiam ſolarem, com-

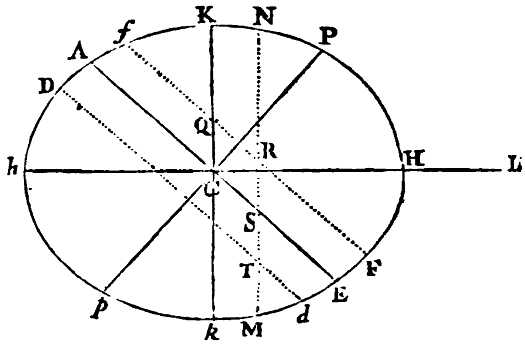
compoſitis viribus incidet in tempus aliquod intermedium quod tertiæ lunari propinquius eſt; ideoque in tranſitu lunæ a ſyzygiis ad quadraturas, ubi hora tertia ſolaris præcedit tertiam lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam lunarem, idque maximo intervallo paulo poſt octantes lunæ; & paribus intervallis æſtus maximus ſequetur horam tertiam lunarem in tranſitu lunæ a quadraturis ad ſyzygias. Hæc ita ſunt in mari aperto. Nam in oſtiis fluviorum fluxus majores cæteris paribus tardius ad ἀκμὴν venient.

Pendent autem effectus luminarium ex eorum diſtantiis a terra. In minoribus enim diſtantiis majores ſunt eorum effectus, in majoribus minores, idque in triplicata ratione diametrorum apparentium. Igitur ſol tempore hyberno, in perigæo exiſtens, majores edit effectus, efficitque ut æſtus in ſyzygiis paulo majores ſint, & in quadraturis paulo minores (cæteris paribus) quam tempore æſtivo; & luna in perigæo ſingulis menſibus majores ciet æſtus quam ante vel poſt dies quindecim, ubi in apogæo verſatur. Unde fit ut æſtus duo omnino maximi in ſyzygiis continuis ſe mutuo non ſequantur.

Pendet etiam effectus utriuſque luminaris ex ipſius declinatione ſeu diſtantia ab æquatore. Nam ſi luminare in polo conſtitueretur, traheret illud ſingulas aquæ partes conſtanter, ſine actionis intenſione & remiſſione, ideoque nullam motus reciprocationem cieret. Igitur luminaria recedendo ab æquatore polum verſus, effectus ſuos gradatim amittent, & propterea minores ciebunt æſtus in ſyzygiis ſolſtitialibus quam in æquinoctialibus. In quadraturis autem ſolſtitialibus majores ciebunt æſtus quam in quadraturis æquinoctialibus; eo quod lunæ jam in æquatore conſtitutæ effectus maxime ſuperat effectum ſolis. Incidunt igitur æſtus maximi in ſyzygias & minimi in quadraturas luminarium, circa tempora æquinoctii utriuſque. Et æſtum maximum in ſyzygiis comitatur ſemper minimus in quadraturis, ut experientia compertum eſt. Per minorem autem diſtantiam ſolis a terra, tempore hyberno quam tempore æſtivo, fit ut æſtus maximi & minimi ſæpius præcedant æquinoctium vernum quam ſequantur, & ſæpius ſequantur autumnale quam præcedant.

Pendent etiam effectus luminarium ex locorum latitudine. Deſignet *ApEP* tellurem aquis profundis undique coopertam; *C* centrum ejus; *P*, *p* polos; *AE* æquatorem; *F* locum quemvis extra æquatorem; *Ff* parallelum loci; *Dd* parallelum ei reſpondentem ex altera

tera parte æquatoris; *L* locum quem luna tribus ante horis occupabat; *H* locum telluris ei perpendiculariter ſubjectum; *h* locum huic oppoſitum; *K*, *k* loca inde gradibus 90 diſtantia, *CH*, *Ch* maris altitudines maximas menſuratas a centro telluris; & *CK*, *Ck* altitudines minimas: & ſi axibus *Hh*, *Kk* deſcribatur ellipſis, deinde ellipſeos hujus revolutione circa axem majorem *Hb* deſcribatur ſphæroïs *HPKhpk*; deſignabit hæc figuram maris quam proxime, & erunt *CF*, *Cf*, *CD*, *Cd* altitudines maris in locis *F*, *f*, *D*, *d*. Quinetiam ſi in præfata ellipſeos revolutione punctum quodvis *N* deſcribat circulum *NM*, ſecantem parallelos *Ff*, *Dd* in locis quibuſvis *R*, *T*, & æquatorem *AE* in *S*; erit *CN* altitudo maris in locis omnibus *R*, *S*, *T*, ſitis in hoc circulo.



Hinc in revolutione diurna loci cujuſvis *F*, affluxus erit maximus in *F*, hora tertia poſt appulſum lunæ ad meridianum ſupra horizontem; poſtea defluxus maximus in *Q* hora tertia poſt occaſum lunæ; dein affluxus maximus in *f* hora tertia poſt appulſum lunæ ad meridianum infra horizontem; ultimo defluxus maximus in *Q* hora tertia poſt ortum lunæ; & affluxus poſterior in *f* erit minor quam affluxus prior in *F*. Diſtinguitur enim mare totum in duos omnino fluctus hemiſphæricos, unum in hemiſphærio *KHk* ad boream vergentem, alterum in hemiſphærio oppoſito *Khk*; quos igitur fluctum borealem & fluctum auſtralem nominare licet. Hi fluctus ſemper ſibi mutuo oppoſiti veniunt per vices ad meridianos locorum ſingulorum, interpoſito intervallo horarum lunarium duodecim. Cumque regiones boreales magis participant fluctum borealem, & auſtrales magis auſtralem, inde oriuntur æſtus alternis vicibus majores & minores, in locis ſingulis extra æquatorem, in quibus luminaria oriuntur & occidunt. Æſtus autem major, luna in verticem loci declinante, incidet in horam circiter tertiam poſt appulſum lunæ ad meridianum ſupra horizontem, & luna declinationem mutante vertetur in minorem. Et fluxuum differentia maxima incidet in tempora ſolſtitiorum; præſertim ſi lunæ nodus aſcendens verſatur in principio arietis.

Sic

Sic experientia compertum eſt, quod æſtus matutini tempore hyberno ſuperent veſpertinos & verſpertini tempore æſtivo matutinos, ad *Plymuthum* quidem altitudine quaſi pedis unius, ad *Briſtoliam* vero altitudine quindecim digitorum: obſervantibus *Colepreſſio* & *Sturmio.*

Motus autem hactenus deſcripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, qua maris æſtus, etiam ceſſantibus uminarium actionibus, poſſet aliquamdiu perſeverare. Conſervatio hæcce motus impreſſi minuit differentiam æſtuum alternorum; & æſtus proxime poſt ſyzygias majores reddit, eoſque proxime poſt quadraturas minuit. Unde ſit ut æſtus alterni ad *Plymuthum* & *Briſtoliam* non multo magis differant ab invicem quam altitudine pedis unius vel digitorum quindecim; utque æſtus omnium maximi in iiſdem portubus, non ſint primi a ſyzygiis, ſed tertii. Retardantur etiam motus omnes in tranſitu per vada, adeo ut æſtus omnium maximi, in fretis quibuſdam & fluviorum oſtiis, ſint quarti vel etiam quinti a ſyzygiis.

Porro fieri poteſt ut æſtus propagetur ab oceano per freta diverſa ad eundem portum, & citius tranſeat per aliqua freta quam per alia: quo in caſu æſtus idem, in duos vel plures ſucceſſive advenientes diviſus, componere poſſit motus novos diverſorum generum. Fingamus æſtus duos æquales a diverſis locis in eundem portum venire, quorum prior præcedat alterum ſpatio horarum ſex, incidatque in horam tertiam ab appulſu lunæ ad meridianum portus. Si luna in hocce ſuo ad meridianum appulſu verſabatur in æquatore, venient ſingulis horis ſenis æquales affluxus, qui in mutuos refluxus incidendo eoſdem affluxibus æquabunt, & ſic ſpatio diei illius efficient ut aqua tranquille ſtagnet. Si luna tunc declinabat ab æquatore, fient æſtus in oceano vicibus alternis majores & minores, uti dictum eſt; & inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores & bini minores, vicibus alternis. Affluxus autem bini majores component aquam altiſſimam in medio inter utrumque, affluxus major & minor faciet ut aqua aſcendat ad mediocrem altitudinem in medio ipſorum, & inter affluxus binos minores aqua aſcendet ad altitudinem minimam. Sic ſpatio viginti quatuor horarum, aqua non bis ut fieri ſolet, ſed ſemel tantum perveniet ad maximam altitudinem & ſemel ad minimam; & altitudo maxima, ſi luna declinat in

De Mundi Systemate

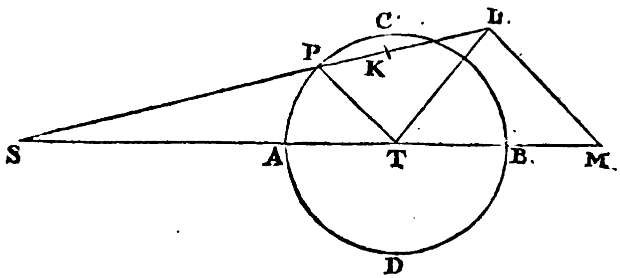
polum ſupra horizontem loci, incidet in horam vel ſextam vel triceſimam ab appulſu lunæ ad meridianum, atque luna declinationem mutante mutabitur in defluxum. Quorum omnium exemplum in portu regni *Tunquini* ad *Batſham* ſub latitudine boreali 20 gr. 50′. *Halleius* ex nautarum obſervationibus patefecit. Ibi aqua die tranſitum lunæ per æquatorem ſequente ſtagnat, dein luna ad boream declinante incipit fluere & refluere, non bis, ut in aliis portubus, ſed ſemel ſingulis diebus; & æſtus incidit in occaſum lunæ, defluxus maximus in ortum. Cum lunæ declinatione augetur hic æſtus, uſque ad diem ſeptimum vel octavum, dein per alios ſeptem dies iiſdem gradibus decreſcit, quibus antea creverat; & luna declinationem mutante ceſſat, ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim ſubinde defluxus in occaſum lunæ & affluxus in ortum, donec luna iterum mutet declinationem. Aditus ad hunc portum fretaque vicina duplex patet, alter ab oceano *Sinenſi* inter continentem & inſulam *Luconiam*, alter a mari *Indico* inter continentem & inſulam *Borneo*. An æſtus ſpatio horarum duodecim a mari *Indico*, & ſpatio horarum ſex a mari *Sinenſi* per freta illa venientes, & ſic in horam tertiam & nonam lunarem incidentes, componant hujuſmodi motus; ſitne alia marium illorum conditio, obſervationibus vicinorum littorum determinandum relinquo.

Hactenus cauſas motuum lunæ & marium reddidi. De quantitate motuum jam convenit aliqua ſubjungere.

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA VI.

Invenire vires ſolis ad perturbandos motus lunæ.

Deſignet *S* ſolem, *T* terram, *P* lunam, *CADB* orbem lunæ: In



SP capiatur *SK* æqualis *ST*; ſitque *SL* ad *SK* in duplicata ratione

SK

SK ad *SP*, & ipſi *PT* agatur parallela *LM*; & ſi gravitas acceleratrix terræ in ſolem exponatur per diſtantiam *ST* vel *SK*, erit *SL* gravitas acceleratrix lunæ in ſolem. Ea componitur ex partibus *SM*, *LM*, quarum *LM* & ipſius *SM* pars *TM* perturbat motum lunæ, ut in libri primi prop. LXVI. & ejus corollariis expoſitum eſt. Quatenus terra & luna circum commune gravitatis centrum revolvuntur, perturbabitur etiam motus terræ circa centrum illud a viribus conſimilibus; ſed ſummas tam virium quam motuum referre licet ad lunam, & ſummas virium per lineas ipſis analogas *TM* & *ML* deſignare. Vis *ML* in mediocri ſua quantitate eſt ad vim centripetam, qua luna in orbe ſuo circa terram quieſcentem ad diſtantiam *PT* revolvi poſſet, in duplicata ratione temporum periodicorum lunæ circa terram & terræ circa ſolem (per corol. 17. prop. LXVI. lib. I.) hoc eſt, in duplicata ratione dierum 27. hor. 7. min. 43. ad dies 365. hor. 6. min. 9. id eſt, ut 1000 ad 178725, ſeu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Invenimus autem in propoſitione quarta quod, ſi terra & luna circa commune gravitatis centrum revolvantur, earum diſtantia mediocris ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum mediocrium terræ quamproxime. Et vis qua luna in orbe circa terram quieſcentem, ad diſtantiam *PT* ſemidiametrorum terreſtrium $60\frac{1}{2}$ revolvi poſſet, eſt ad vim, qua eodem tempore ad diſtantiam ſemidiametrorum 60 revolvi poſſet, ut $60\frac{1}{2}$ ad 60; & hæc vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 60×60 quamproxime. Ideoque vis mediocris *ML* eſt ad vim gravitatis in ſuperficie terræ, ut $1 \times 60\frac{1}{2}$ ad $60 \times 60 \times 60 \times 178\frac{29}{40}$, ſeu 1 ad 638092,6 Inde vero & ex proportione linearum *TM*, *ML*, datur etiam vis *TM*: & hæ ſunt vires ſolis quibus lunæ motus perturbantur. *Q. E. I.*

PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA VII.

Invenire incrementum horarium areæ quam luna, radio ad terram ducto, in orbe circulari deſcribit.

Diximus aream, quam luna radio ad terram ducto deſcribit, eſſe tempori proportionalem, niſi quatenus motus lunaris ab actione ſolis turbatur. Inæqualitatem momenti, vel incrementi horarii hic inveſtigandam proponimus. Ut computatio facilior reddatur, fingamus orbem lunæ circularem eſſe, & inæqualitates omnes negligamus, ea

ſola

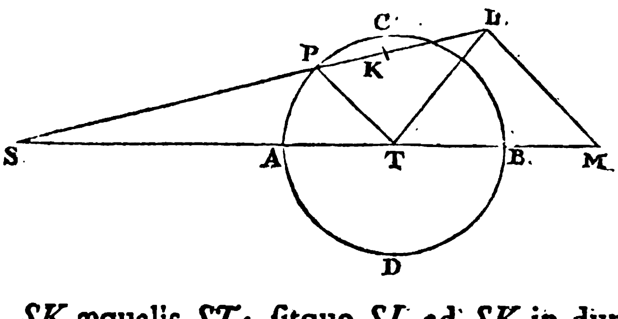
polum ſupra horizontem loci, incidet in horam vel ſextam vel triceſimam ab appulſu lunæ ad meridianum, atque luna declinationem mutante mutabitur in defluxum. Quorum omnium exemplum in portu regni *Tunquini* ad *Batſham* ſub latitudine boreali 20 gr. 50′. *Halleius* ex nautarum obſervationibus patefecit. Ibi aqua die tranſitum lunæ per æquatorem ſequente ſtagnat, dein luna ad boream declinante incipit fluere & refluere, non bis, ut in aliis portubus, ſed ſemel ſingulis diebus; & æſtus incidit in occaſum lunæ, defluxus maximus in ortum. Cum lunæ declinatione augetur hic æſtus, uſque ad diem ſeptimum vel octavum, dein per alios ſeptem dies iiſdem gradibus decreſcit, quibus antea creverat; & luna declinationem mutante ceſſat, ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim ſubinde defluxus in occaſum lunæ & affluxus in ortum, donec luna iterum mutet declinationem. Aditus ad hunc portum fretaque vicina duplex patet, alter ab oceano *Sinenſi* inter continentem & inſulam *Luconiam*, alter a mari *Indico* inter continentem & inſulam *Borneo*. An æſtus ſpatio horarum duodecim a mari *Indico*, & ſpatio horarum ſex a mari *Sinenſi* per freta illa venientes, & ſic in horam tertiam & nonam lunarem incidentes, componant hujuſmodi motus; ſitne alia marium illorum conditio, obſervationibus vicinorum littorum determinandum relinquo.

Hactenus cauſas motuum lunæ & marium reddidi. De quantitate motuum jam convenit aliqua ſubjungere.

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA VI.

Invenire vires ſolis ad perturbandos motus lunæ.

Deſignet S ſolem, T terram, P lunam, $CADB$ orbem lunæ: In



SP capiatur SK æqualis ST; ſitque SL ad SK in duplicata ratione

SK

SK ad *SP*, & ipſi *PT* agatur parallela *LM*; & ſi gravitas acceleratrix terræ in ſolem exponatur per diſtantiam *ST* vel *SK*, erit *SL* gravitas acceleratrix lunæ in ſolem. Ea componitur ex partibus *SM*, *LM*, quarum *LM* & ipſius *SM* pars *TM* perturbat motum lunæ, ut in libri primi prop. LXVI. & ejus corollariis expoſitum eſt. Quatenus terra & luna circum commune gravitatis centrum revolvuntur, perturbabitur etiam motus terræ circa centrum illud a viribus conſimilibus; ſed ſummas tam virium quam motuum referre licet ad lunam, & ſummas virium per lineas ipſis analogas *TM* & *ML* deſignare. Vis *ML* in mediocri ſua quantitate eſt ad vim centripetam, qua luna in orbe ſuo circa terram quieſcentem ad diſtantiam *PT* revolvi poſſet, in duplicata ratione temporum periodicorum lunæ circa terram & terræ circa ſolem (per corol. 17. prop. LXVI. lib. 1.) hoc eſt, in duplicata ratione dierum 27. hor. 7. min. 43. ad dies 365. hor. 6. min. 9. id eſt, ut 1000 ad 178725, ſeu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Invenimus autem in propoſitione quarta quod, ſi terra & luna circa commune gravitatis centrum revolvantur, earum diſtantia mediocris ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum mediocrium terræ quamproxime. Et vis qua luna in orbe circa terram quieſcentem, ad diſtantiam *PT* ſemidiametrorum terreſtrium $60\frac{1}{2}$ revolvi poſſet, eſt ad vim, qua eodem tempore ad diſtantiam ſemidiametrorum 60 revolvi poſſet, ut $60\frac{1}{2}$ ad 60; & hæc vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 60×60 quamproxime. Ideoque vis mediocris *ML* eſt ad vim gravitatis in ſuperficie terræ, ut $1 \times 60\frac{1}{2}$ ad $60 \times 60 \times 60 \times 178\frac{29}{40}$, ſeu 1 ad 638092,6 Inde vero & ex proportione linearum *TM*, *ML*, datur etiam vis *TM*: & hæ ſunt vires ſolis quibus lunæ motus perturbantur. *Q. E. I.*

PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA VII.

Invenire incrementum horarium areæ quam luna, radio ad terram ducto, in orbe circulari deſcribit.

Diximus aream, quam luna radio ad terram ducto deſcribit, eſſe tempori proportionalem, niſi quatenus motus lunaris ab actione ſolis turbatur. Inæqualitatem momenti, vel incrementi horarii hic inveſtigandam proponimus. Ut computatio facilior reddatur, fingamus orbem lunæ circularem eſſe, & inæqualitates omnes negligamus, ea

ſola

Hæc omnia ita ſe habent, ex hypotheſi quod ſol & terra quieſcunt, & luna tempore ſynodico dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvitur. Cum autem periodus ſynodica lunaris vere ſit dierum 29. hor. 12. & min. 44, augeri debent momentorum incrementa in ratione temporis, id eſt, in ratione 1080853 ad 1000000. Hoc pacto incrementum totum, quod erat pars $\frac{100}{11915}$ momenti mediocris, jam fiet ejuſdem pars $\frac{100}{11023}$. Ideoque momentum areæ in quadratura lunæ erit ad ejus momentum in ſyzygia ut 11023—50 ad 11023+50, ſeu 10973 ad 11073; & ad ejus momentum, ubi luna in alio quovis loco intermedio *P* verſatur, ut 10973 ad 10973+*Pd*, exiſtente videlicet *TP* æquali 100.

Area igitur, quam luna radio ad terram ducto ſingulis temporis particulis æqualibus deſcribit, eſt quam proxime ut ſumma numeri 219,46 & ſinus verſi duplicatæ diſtantiæ lunæ a quadratura proxima, in circulo cujus radius eſt unitas. Hæc ita ſe habent ubi variatio in octantibus eſt magnitudinis mediocris. Sin variatio ibi major ſit vel minor, augeri debet vel minui ſinus ille verſus in eadem ratione.

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA VIII.

Ex motu horario lunæ invenire ipſius diſtantiam a terra.

Area, quam luna radio ad terram ducto ſingulis temporis momentis deſcribit, eſt ut motus horarius lunæ & quadratum diſtantiæ lunæ a terra conjunctim; & propterea diſtantia lunæ a terra eſt in ratione compoſita ex ſubduplicata ratione areæ directe & ſubduplicata ratione motus horarii inverſe. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc datur lunæ diameter apparens: quippe quæ ſit reciproce ut ipſius diſtantia a terra. Tentent aſtronomi quam probe hæc regula cum phænomenis congruat.

Corol. 2. Hinc etiam orbis lunaris accuratius ex phænomenis quam antehac definiri poteſt.

PROPO-

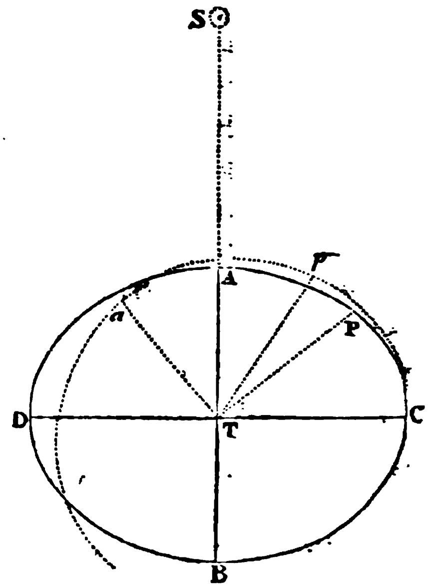
PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA IX.

Invenire diametros orbis in quo luna, ſine eccentricitate, moveri deberet.

Curvatura trajectoriæ, quam mobile, ſi ſecundum trajectoriæ illius perpendiculum trahatur, deſcribit, eſt ut attractio directe & quadratum velocitatis inverſe. Curvaturas linearum pono eſſe inter ſe in ultima proportione ſinuum vel tangentium angulorum contactuum ad radios æquales pertinentium, ubi radii illi in infinitum diminuuntur. Attractio autem lunæ in terram in ſyzygiis eſt exceſſus gravitatis ipſius in terram ſupra vim ſolarem $2PK$ (vide *fig. pag.* 428.) qua gravitas acceleratrix lunæ in ſolem ſuperat gravitatem acceleratricem terræ in ſolem vel ab ea ſuperatur. In quadraturis autem attractio illa eſt ſumma gravitatis lunæ in terram & vis ſolaris KT, qua luna in terram trahitur. Et hæ attractiones, ſi $\frac{AT+CT}{2}$ dicatur N, ſunt ut $\frac{178725}{ATq} - \frac{2000}{CT \times \mathrm{N}}$ & $\frac{178725}{CTq} + \frac{1000}{AT \times \mathrm{N}}$ quam proxime; ſeu ut $178725\,\mathrm{N} \times CTq - 2000\,ATq \times CT$ & $178725\,\mathrm{N} \times ATq + 1000\,CTq \times AT$. Nam ſi gravitas acceleratrix lunæ in terram exponatur per numerum 178725, vis mediocris ML, quæ in quadraturis eſt PT vel TK & lunam trahit in terram, erit 1000, & vis mediocris TM in ſyzygiis erit 3000; de qua, ſi vis mediocris ML ſubducatur, manebit vis 2000 qua luna in ſyzygiis diſtrahitur a terra, quamque jam ante nominavi $2PK$. Velocitas autem lunæ in ſyzygiis A & B eſt ad ipſius velocitatem in quadraturis C & D, ut CT ad AT & momentum areæ quam luna radio ad terram ducto deſcribit in ſyzygiis ad momentum ejuſdem areæ in quadraturis conjunctim, i. e. ut $11073\,CT$ ad $10973\,AT$. Sumatur hæc ratio bis inverſe & ratio prior ſemel directe, & fiet curvatura orbis lunaris in ſyzygiis ad ejuſdem curvaturam in quadraturis ut $120406729 \times 178725\,ATq \times CTq \times \mathrm{N} - 120406729 \times 2000\,ATqq \times CT$ ad $122611329 \times 178725\,ATq \times CTq \times \mathrm{N} + 122611329 \times 1000\,CTqq \times AT$, i. e. ut $2151969\,AT \times CT \times \mathrm{N} - 24081\,AT\ cub.$ ad $2191371\,AT \times CT \times \mathrm{N} + 12261\,CT\ cub.$

Quoniam figura orbis lunaris ignoratur, hujus vice aſſumamus ellipſin $DBCA$, in cujus centro T terra collocetur, & cujus axis ma-

jor *DC* quadraturis, minor *AB* ſyzygiis interjaceat. Cum autem planum ellipſeos hujus motu angulari circa terram revolvatur, & trajectoria cujus curvaturam conſideramus deſcribi debet in plano quod omni motu angulari omnino deſtituitur: conſideranda erit figura, quam luna in ellipſi illa revolvendo deſcribit in hoc plano, hoc eſt figura *Cpa*, cujus puncta ſingula *p* inveniuntur capiendo punctum quodvis *P* in ellipſi, quod locum lunæ repræſentet, & ducendo *Tp* æqualem *TP*, ea lege ut angulus *PTp* æqualis ſit motui apparenti ſolis a tempore quadraturæ *C* confecto; vel (quod eodem fere recidit) ut angulus *CTp* ſit ad angulum *CTP* ut tempus revolutionis ſynodicæ lunaris ad tempus revolutionis periodicæ ſeu $29^{d}.\ 12^{h}.\ 44'$, ad $27^{d}.\ 7^{h}.\ 43'$. Capiatur igitur angulus *CTa* in eadem ratione ad angulum rectum *CTA*, & ſit longitudo *Ta* æqualis longitudini *TA*; & erit *a* apſis ima & *C* apſis ſumma orbis hujus *Cpa*. Rationes autem ineundo invenio quod differentia inter curvaturam orbis *Cpa* in vertice *a*, & curvaturam circuli centro *T* intervallo *TA* deſcripti, ſit ad differentiam inter curvaturam ellipſeos in vertice *A* & curvaturam ejuſdem circuli, in duplicata ratione anguli *CTP* ad angulum *CTp*; & quod curvatura ellipſeos in *A* ſit ad curvaturam circuli illius, in duplicata ratione *TA* ad *TC*; & curvatura circuli illius ad curvaturam circuli centro *T* intervallo *TC* deſcripti, ut *TC* ad *TA*; hujus autem curvatura ad curvaturam ellipſeos in *C*, in duplicata ratione *TA* ad *TC*; & differentia inter curvaturam ellipſeos in vertice *C* & curvaturam circuli noviſſimi, ad differentiam inter curvaturam figuræ *Tpa* in vertice *C* & curvaturam ejuſdem circuli, in duplicata ratione anguli *CTp* ad angulum *CTP*. Quæ quidem rationes ex ſinubus angulorum contactus ac differentiarum angulorum facile colliguntur. His autem inter ſe collatis, prodit curvatura figuræ *Cpa* in *a* ad ipſius curvaturam in *C*, ut $AT\ cub. + \frac{16824}{100000} CTq \times AT$ ad $CT\ cub. + \frac{16824}{100000} ATq \times CT$. Ubi numerus



rus $\frac{16824}{100000}$ deſignat differentiam quadratorum angulorum *CTP* & *CTp* applicatam ad quadratum anguli minoris *CTP*, ſeu (quod perinde eſt) differentiam quadratorum temporum $27^d. 7^h. 43'$, & $29^d. 12^h. 44'$, applicatam ad quadratum temporis $27^d. 7^h. 43'$.

Igitur cum *a* deſignet ſyzygiam lunæ, & *C* ipſius quadraturam, proportio jam inventa eadem eſſe debet cum proportione curvaturæ orbis lunæ in ſyzygiis ad ejuſdem curvaturam in quadraturis, quam ſupra invenimus. Proinde ut inveniatur proportio *CT* ad *AT*, duco extrema & media in ſe invicem. Et termini prodeuntes ad $AT \times CT$ applicati, fiunt $2062{,}79\ CTqq - 2151969\ N \times CT\ cub. + 368676\ N \times AT \times CTq + 36342\ ATq \times CTq - 362047\ N \times ATq \times CT + 2191371\ N \times AT\ cub. + 4051{,}4\ ATqq = 0$. Hic pro terminorum *AT* & *CT* ſemiſumma N ſcribo 1, & pro eorundem ſemidifferentia ponendo *x*, fit $CT = 1 + x$, & $AT = 1 - x$: quibus in æquatione ſcriptis, & æquatione prodeunte reſoluta, obtinetur *x* æqualis 0,00719, & inde ſemidiameter *CT* fit 1,00719, & ſemidiameter *AT* 0,99281, qui numeri ſunt ut $70\frac{1}{24}$ & $69\frac{1}{24}$ quam proxime. Eſt igitur diſtantia lunæ a terra in ſyzygiis ad ipſius diſtantiam in quadraturis (ſepoſita ſcilicet eccentricitatis conſideratione) ut $69\frac{1}{24}$ ad $70\frac{1}{24}$, vel numeris rotundis ut 69 ad 70.

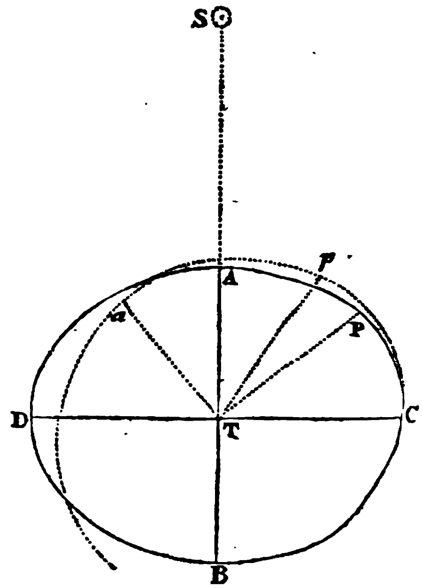
PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA X.

Invenire variationem lunæ.

Oritur hæc inæqualitas partim ex forma elliptica orbis lunaris, partim ex inæqualitate momentorum areæ, quam luna radio ad terram ducto deſcribit. Si luna *P* in ellipſi *DBCA* circa terram in centro ellipſeos quieſcentem moveretur, & radio *TP* ad terram ducto deſcriberet aream *CTP* tempori proportionalem; eſſet autem ellipſeos ſemidiameter maxima *CT* ad ſemidiametrum minimam *TA* ut 70 ad 69: foret tangens anguli *CTP* ad tangentem anguli motus medii a quadratura *C* computati, ut ellipſeos ſemidiameter *TA* ad ejuſdem ſemidiametrum *TC* ſeu 69 ad 70. Debet autem deſcriptio areæ *CTP*, in progreſſu lunæ a quadratura ad ſyzygiam, ea ratione accelerari, ut ejus momentum in ſyzygia lunæ ſit ad ejus momentum in quadratura ut 11073 ad 10973, utque exceſſus momenti in loco quovis intermedio *P* ſupra momentum in quadratura ſit ut quadra-

 tum

tum ſinus anguli *CTP*. Id quod ſatis accurate fiet, ſi tangens anguli *CTP* diminuatur in ſubduplicata ratione numeri 10973 ad numerum 11073, id eſt, in ratione numeri 68,6877 ad numerum 69. Quo pacto tangens anguli *CTP* jam erit ad tangentem motus medii ut 68,6877 ad 70, & angulus *CTP* in octantibus, ubi motus medius eſt 45^{gr}. invenietur 44^{gr}. 27′. 28″. qui ſubductus de angulo motus medii 45^{gr}. relinquit variationem maximam 32′. 32″. Hæc ita ſe haberent ſi luna, pergendo a quadratura ad ſyzygiam, deſcriberet angulum *CTA* graduum tantum nonaginta. Verum ob motum terræ, quo ſol in conſequentia motu apparente transfertur, luna, priuſquam ſolem aſſequitur, deſcribit angulum *CTa* angulo recto majorem in ratione temporis revolutionis lunaris ſynodicæ ad tempus revolutionis periodicæ, id eſt, in ratione 29^{d}. 12^{h}. 44′. ad 27^{d}. 7^{h}. 43′. Et hoc pacto anguli omnes circa centrum *T* dilatantur in eadem ratione, & variatio maxima quæ ſecus eſſet 32′. 32″, jam aucta in eadem ratione fit 35′. 10″.



Hæc eſt ejus magnitudo in mediocri diſtantia ſolis a terra, neglectis differentiis quæ a curvatura orbis magni majorique ſolis actione in lunam falcatam & novam quam in gibboſam & plenam, oriri poſſint. In aliis diſtantiis ſolis a terra, variatio maxima eſt in ratione quæ componitur ex duplicata ratione temporis revolutionis ſynodicæ lunaris (dato anni tempore) directe, & triplicata ratione diſtantiæ ſolis a terra inverſe. Ideoque in apogæo ſolis, variatio maxima eſt 33′. 14″, & in ejus perigæo 37′. 11″, ſi modo eccentricitas ſolis ſit ad orbis magni ſemidiametrum tranſverſam ut $16\frac{7}{8}$ ad 1000.

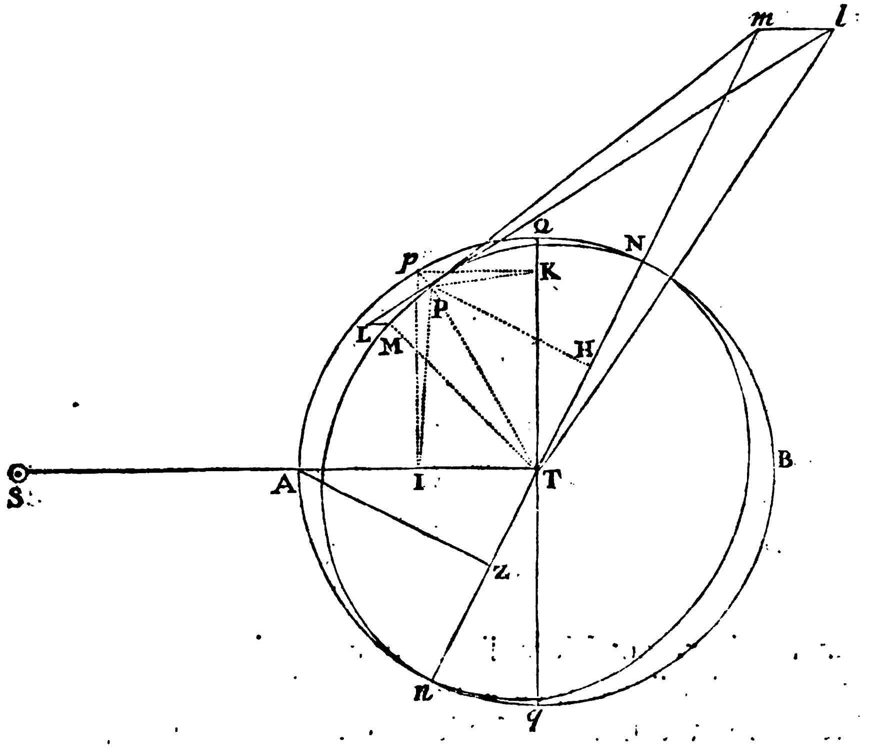
Hactenus variationem inveſtigavimus in orbe non eccentrico, in quo utique luna in octantibus ſuis ſemper eſt in mediocri ſua diſtantia a terra. Si luna propter eccentricitatem ſuam, magis vel minus diſtat a terra quam ſi locaretur in hoc orbe, variatio paulo major eſſe poteſt vel paulo minor quam pro regula hic allata: ſed exceſſum

ceſſum vel defectum ab aſtronomis per phænomena determinandum relinquo.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XI.

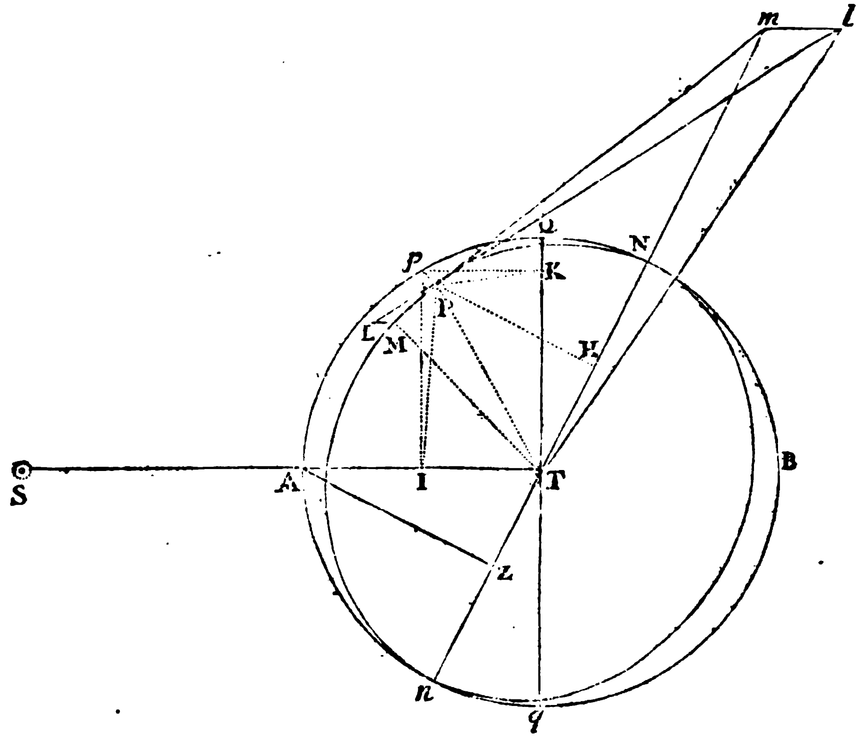
Invenire motum horarium nodorum lunæ in orbe circulari.

Deſignet *S* ſolem, *T* terram, *P* lunam, *NPn* orbem lunæ, *Npn* veſtigium orbis in plano eclipticæ; *N*, *n* nodos, *nTNm* lineam nodorum infinite productam; *PI*, *PK* perpendicula demiſſa in lineas *ST*, *Qq*; *Pp* perpendiculum demiſſum in planum eclipticæ; *A*, *B* ſyzygias lunæ in plano eclipticæ; *AZ* perpendiculum in lineam no-



dorum *Nn*; *Q*, *q* quadraturas lunæ in plano eclipticæ, & *pK* perpendiculum in lineam *Qq* quadraturis interjacentem. Vis ſolis ad perturbandum motum lunæ (per. prop. xxv.) duplex eſt, altera lineæ *LM* in ſchemate propoſitionis illius, altera lineæ *MT* proportionalis. Et luna vi priore in terram, poſteriore in ſolem ſecundum lineam rectæ

rectæ ST a terra ad ſolem ductæ parallelam trahitur. Vis prior LM agit ſecundum planum orbis lunaris, & propterea ſitum plani nil mutat. Hæc igitur negligenda eſt. Vis poſterior MT qua planum orbis lunaris perturbatur eadem eſt cum vi $3PK$ vel $3IT$. Et hæc vis (per prop. xxv.) eſt ad vim qua luna in circulo circa terram quieſcentem tempore ſuo periodico uniformiter revolvi poſſet, ut $3IT$ ad radium circuli multiplicatum per numerum 178,725, ſive ut IT ad radium multiplicatum per 59,575. Cæterum in hoc calculo, & eo



omni qui ſequitur, conſidero lineas omnes a luna ad ſolem ductas tanquam parallelas lineæ quæ a terra ad ſolem ducitur, propterea quod inclinatio tantum fere minuit effectus omnes in aliquibus caſibus, quantum auget in aliis; & nodorum motus mediocres quærimus, neglectis iſtiuſmodi minutiis, quæ calculum nimis impeditum redderent.

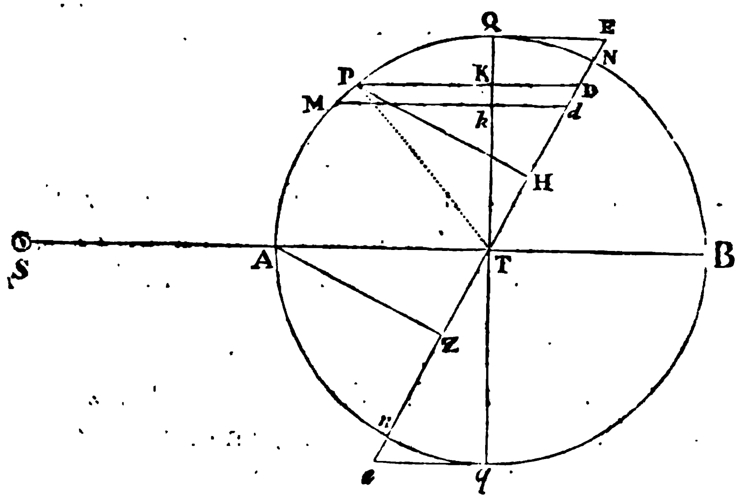
Deſignet jam PM arcum, quem luna dato tempore quam minimo deſcribit, & ML lineolam cujus dimidium luna, impellente vi præfata $3IT$, eodem tempore deſcribere poſſet. Jungantur PL, MP, & pro-

& producantur eæ ad m & l, ubi ſecent planum eclipticæ; inque Tm demittatur perpendiculum PH. Et quoniam recta ML parallela eſt plano eclipticæ, ideoque cum recta ml quæ in plano illo jacet concurrere non poteſt, & tamen jacent hæ rectæ in plano communi $LMPml$; parallelæ erunt hæ rectæ, & propterea ſimilia erunt triangula LMP, lmP. Jam cum MPm ſit in plano orbis, in quo luna in loco P movebatur, incidet punctum m in lineam Nn per orbis illius nodos N, n ductam. Et quoniam vis qua dimidium lineolæ LM generatur, ſi tota ſimul & ſemel in loco P impreſſa eſſet, generaret lineam illam totam; & efficeret ut luna moveretur in arcu, cujus chorda eſſet LP, atque ideo transferret lunam de plano $MPmT$ in planum $LPlT$; motus angularis nodorum a vi illa genitus, æqualis erit angulo mTl. Eſt autem ml ad mP ut ML ad MP, ideoque cum MP ob datum tempus data ſit, eſt ml ut rectangulum $ML \times mP$, id eſt, ut rectangulum $IT \times mP$. Et angulus mTl, ſi modo angulus Tml rectus ſit, eſt ut $\frac{ml}{Tm}$, & propterea ut $\frac{IT \times Pm}{Tm}$, id eſt (ob proportionales Tm & mP, TP & PH) ut $\frac{IT \times PH}{TP}$, ideoque ob datam TP, ut $IT \times PH$. Quod ſi angulus Tml, ſeu STN obliquus ſit, erit angulus mTl adhuc minor, in ratione ſinus anguli STN ad radium, ſeu AZ ad AT. Eſt igitur velocitas nodorum ut $IT \times PH \times AZ$, ſive ut contentum ſub ſinubus trium angulorum TPI, PTN & STN.

Si anguli illi, nodis in quadraturis & luna in ſyzygia exiſtentibus, recti ſint, lineola ml abibit in infinitum, & angulus mTl evadet angulo mPl æqualis. Hoc autem in caſu, angulus mPl eſt ad angulum PTM, quem luna eodem tempore motu ſuo apparente circa terram deſcribit, ut 1 ad 59,575. Nam angulus mPl æqualis eſt angulo LPM, id eſt, angulo deflexionis lunæ a recto tramite, quem ſola vis præfata ſolaris $3IT$, ſi tum ceſſaret lunæ gravitas, dato illo tempore generare poſſet; & angulus PTM æqualis eſt angulo deflexionis lunæ a recto tramite, quem vis illa, qua luna in orbe ſuo retinetur, ſi tum ceſſaret vis ſolaris $3IT$, eodem tempore generaret. Et hæ vires, ut ſupra diximus, ſunt ad invicem ut 1 ad 59,575. Ergo cum motus medius horarius lunæ reſpectu fixarum ſit $32'.56''.27'''.12^{iv}\frac{1}{2}$, motus horarius nodi in hoc caſu erit $33''.10'''.33^{iv}.12^{v}$. Aliis autem

autem in caſibus motus iſte horarius erit ad 33″. 10‴. 33^{iv}. 12^{v}. ut contentum ſub ſinubus angulorum trium *TPI*, *PTN*, & *STN* (ſeu diſtantiarum lunæ a quadratura, lunæ a nodo, & nodi a ſole) ad cubum radii. Et quoties ſignum anguli alicujus de affirmativo in negativum, deque negativo in affirmativum mutatur, debebit motus regreſſivus in progreſſivum & progreſſivus in regreſſivum mutari. Unde fit ut nodi progrediantur quoties luna inter quadraturam alterutram & nodum quadraturæ proximum verſatur. Aliis in caſibus regrediuntur, & per exceſſum regreſſus ſupra progreſſum ſingulis menſibus feruntur in antecedentia.

Corol. 1. Hinc ſi a dati arcus quam minimi *PM* terminis *P* & *M* ad lineam quadraturas jungentem *Qq* demittantur perpendicula *PK*, *Mk*, eademque producantur donec ſecent lineam nodorum *Nn* in *D* & *d*; erit motus horarius nodorum ut area *MPDd* & quadratum lineæ *AZ* conjunctim. Sunto enim *PK*, *PH* & *AZ* prædicti tres



ſinus. Nempe *PK* ſinus diſtantiæ lunæ a quadratura, *PH* ſinus diſtantiæ lunæ a nodo, & *AZ* ſinus diſtantiæ nodi a ſole: & erit velocitas nodi ut contentum *PK*×*PH*×*AZ*. Eſt autem *PT* ad *PK* ut *PM* ad *Kk*, ideoque ob datas *PT* & *PM* eſt *Kk* ipſi *PK* proportionalis. Eſt & *AT* ad *PD* ut *AZ* ad *PH*, & propterea *PH* rectangulo *PD*×*AZ* proportionalis, & conjunctis rationibus, *PK*×*PH* eſt ut contentum *Kk*×*PD*×*AZ*, & *PK*×*PH*×*AZ* ut *Kk*×*PD*×*AZ qu.* id eſt, ut area *PDdM* & *AZ qu.* conjunctim. *Q. E. D.*

Corol.

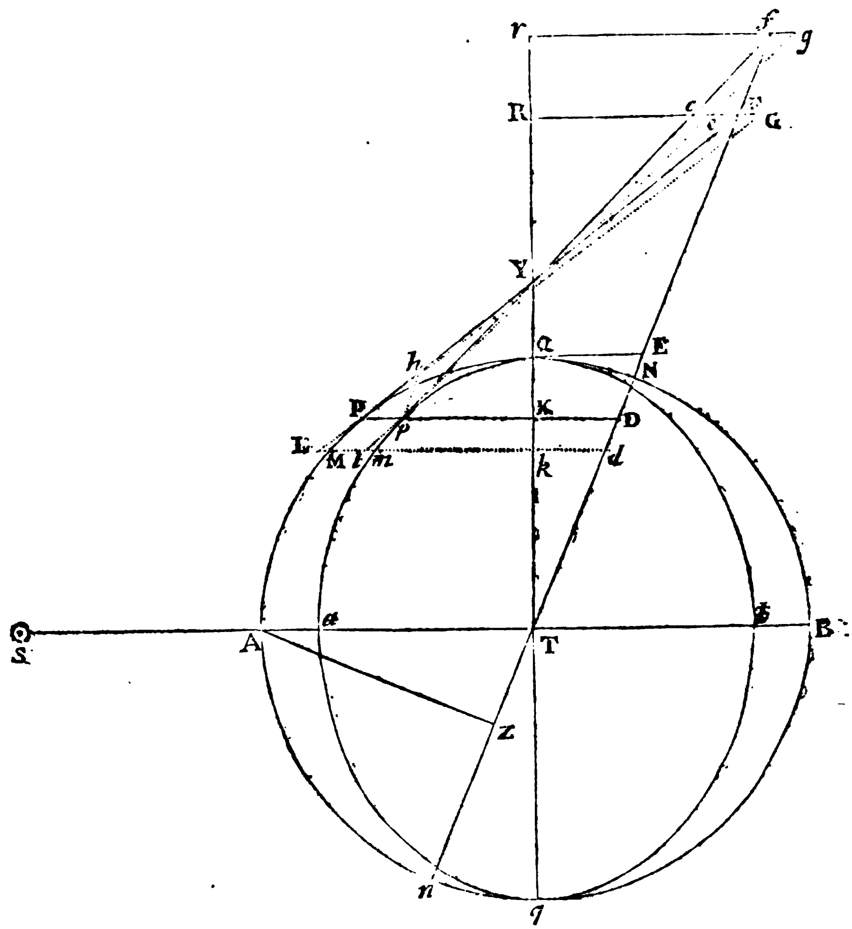
Corol. 2. In data quavis nodorum poſitione, motus horarius mediocris eſt ſemiſſis motus horarii in ſyzygiis lunæ, ideoque eſt ad 16″. 35‴. 16ⁱᵛ. 36ᵛ. ut quadratum ſinus diſtantiæ nodorum a ſyzygiis ad quadratum radii, ſive ut *AZ qu.* ad *AT qu.* Nam ſi luna uniformi cum motu perambulet ſemicirculum *QAq*, ſumma omnium arearum *PDdM*, quo tempore luna pergit a *Q* ad *M*, erit area *QMdE* quæ ad circuli tangentem *QE* terminatur; & quo tempore luna attingit punctum *n*, ſumma illa erit area tota *EQAn* quam linea *PD* deſcribit, dein luna pergente ab *n* ad *q*, linea *PD* cadet extra circulum, & aream *nqe* ad circuli tangentem *qe* terminatam deſcribet; quæ quoniam nodi prius regrediebantur, jam vero progrediuntur, ſubduci debet de area priore, & cum æqualis ſit areæ *QEN*, relinquet ſemicirculum *NQAn*. Igitur ſumma omnium arearum *PDdM*, quo tempore luna ſemicirculum deſcribit, eſt area ſemicirculi; & ſumma omnium quo tempore luna circulum deſcribit eſt area circuli totius. At area *PDdM*, ubi luna verſatur in ſyzygiis, eſt rectangulum ſub arcu *PM* & radio *PT*; & ſumma omnium huic æqualium arearum, quo tempore luna circulum deſcribit, eſt rectangulum ſub circumferentia tota & radio circuli; & hoc rectangulum, cum ſit æquale duobus circulis, duplo majus eſt quam rectangulum prius. Proinde nodi, ea cum velocitate uniformiter continuata quam habent in ſyzygiis lunaribus, ſpatium duplo majus deſcriberent quam revera deſcribunt; & propterea motus mediocris quocum, ſi uniformiter continuaretur, ſpatium a ſe inæquabili cum motu revera confectum deſcribere poſſent, eſt ſemiſſis motus quem habent in ſyzygiis lunæ. Unde cum motus horarius maximus, ſi nodi in quadraturis verſantur, ſit 33″. 10‴. 33ⁱᵛ. 12ᵛ, motus mediocris horarius in hoc caſu erit 16″. 35‴. 16ⁱᵛ. 36ᵛ. Et cum motus horarius nodorum ſemper ſit ut *AZ qu.* & area *PDdM* conjunctim, & propterea motus horarius nodorum in ſyzygiis lunæ ut *AZ qu.* & area *PDdM* conjunctim, id eſt (ob datam aream *PDdM* in ſyzygiis deſcriptam) ut *AZ qu.* erit etiam motus mediocris ut *AZ qu.* atque ideo hic motus, ubi nodi extra quadraturas verſantur, erit ad 16″. 35‴. 16ⁱᵛ. 36ᵛ. ut *AZ qu.* ad *AT qu.* *Q. E. D.*

De Mundi Systemate

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XII.

Invenire motum horarium nodorum lunæ in orbe elliptico.

Deſignet $Qpmaq$ ellipſin, axe majore Qq, minore ab deſcriptam, $QAqB$ circulum circumſcriptum, T terram in utriuſque centro communi, S ſolem, p lunam in ellipſi motam, & pm arcum quem data temporis particula quam minima deſcribit, N & n nodos

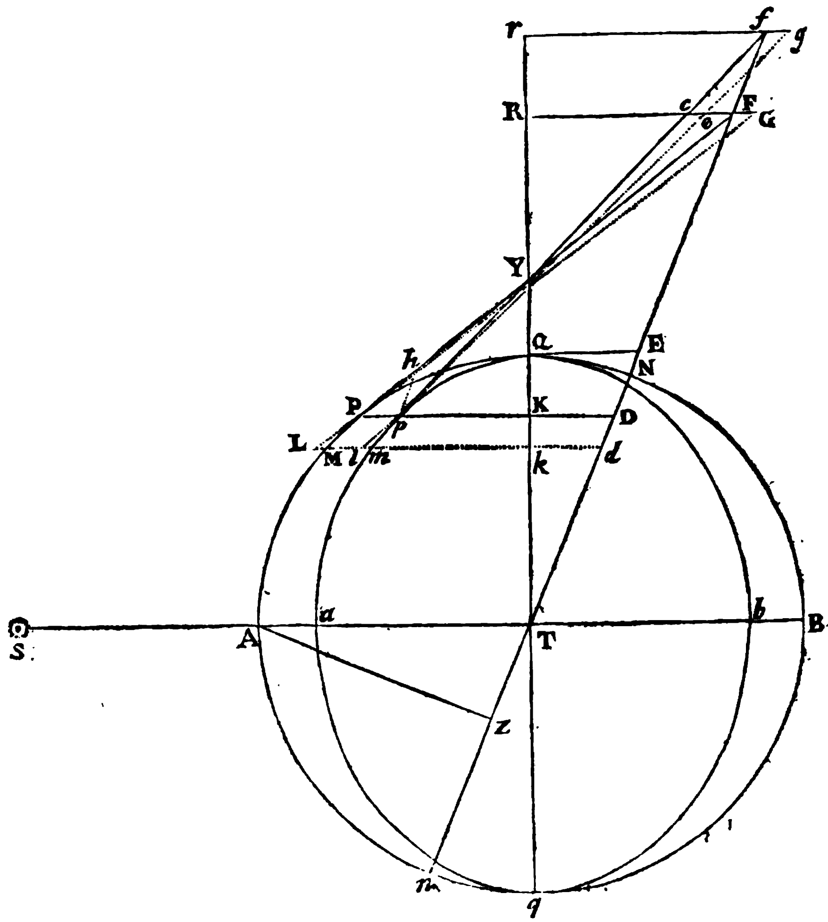


linea Nn junctos, pK & mk perpendicula in axem Qq demiſſa & hinc inde producta, donec occurrant circulo in P & M, & lineæ nodorum in D & d. Et ſi luna, radio ad terram ducto, aream deſcribat tempori proportionalem, erit motus horarius nodi in ellipſi ut area $pDdm$ & AZq conjunctim.

Nam

Nam ſi PF tangat circulum in P, & producta occurrat TN in F, & pf tangat ellipſin in p & producta occurrat eidem TN in f, conveniant autem hæ tangentes in axe TQ ad T; & ſi ML deſignet ſpatium quod luna in circulo revolvens, interea dum deſcribit arcum PM, urgente & impellente vi prædicta $3IT$, ſeu $3PK$ motu tranſverſo deſcribere poſſet, & ml deſignet ſpatium quod luna in ellipſi revolvens eodem tempore, urgente etiam vi $3IT$ ſeu $3PK$, deſcribere poſſet; & producantur LP & lp donec occurrant plano eclipticæ in G & g; & jungantur FG & fg, quarum FG producta ſecet pf, pg & TQ in c, e & R reſpective, & fg producta ſecet TQ in r. Quoniam vis $3IT$ ſeu $3PK$ in circulo eſt ad vim $3IT$ ſeu $3pK$ in ellipſi, ut PK ad pK, ſeu AT ad aT; erit ſpatium ML vi priore genitum, ad ſpatium ml vi poſteriore genitum, ut PK ad pK, id eſt, ob ſimiles figuras $PTKp$ & $FTRc$, ut FR ad cR. Eſt autem ML ad FG (ob ſimilia triangula PLM, PGF) ut PL ad PG, hoc eſt (ob parallelas Lk, PK, GR) ut pl ad pe, id eſt (ob ſimilia triangula plm, cpe) ut lm ad ce; & inverſe ut LM eſt ad lm, ſeu FR ad cR, ita eſt FG ad ce. Et propterea ſi fg eſſet ad ce ut fT ad cT, id eſt, ut fr ad cR (hoc eſt, ut fr ad FR & FR ad cR conjunctim, id eſt, ut fT ad FT & FG ad ce conjunctim) quoniam ratio FG ad ce utrinque ablata relinquit rationes fg ad FG & fT ad FT, foret fg ad FG ut fT ad FT; atque ideo anguli, quos FG & fg ſubtenderent ad terram T, æquarentur inter ſe. Sed anguli illi (per ea quæ in præcedente propoſitione expoſuimus) ſunt motus nodorum, quo tempore luna in circulo arcum PM, in ellipſi arcum pm percurrit: & propterea motus nodorum in circulo & ellipſi æquarentur inter ſe. Hæc ita ſe haberent, ſi modo fg eſſet ad ce ut fT ad cT, id eſt, ſi fg æqualis eſſet $\frac{ce \times fT}{cT}$. Verum ob ſimilia triangula fgp, cep, eſt fg ad ce ut fp ad cp; ideoque fg æqualis eſt $\frac{ce \times fp}{cp}$; & propterea angulus, quem fg revera ſubtendit, eſt ad angulum priorem, quem FG ſubtendit, hoc eſt, motus nodorum in ellipſi ad motum nodorum in circulo, ut hæc fg ſeu $\frac{ce \times fp}{cp}$ ad priorem fg ſeu $\frac{ce \times fT}{cT}$, id eſt, ut $fp \times cT$ ad $fT \times cp$, ſeu fp ad fT &

cY ad *cp*, hoc eſt, ſi *ph* ipſi *TN* parallela occurrat *FP* in *b*, ut *Fb* ad *FY* & *FY* ad *FP*; hoc eſt, ut *Fb* ad *FP* ſeu *Dp* ad *DP*, ideoque ut area *Dpmd* ad aream *DPMd*. Et propterea, cum (per corol. 1. prop. xxx.) area poſterior & *AZq* conjunctim proportionalia ſint motui horario nodorum in circulo, erunt area prior & *AZq* conjunctim proportionalia motui horario nodorum in ellipſi. *Q.E.D.*



Corol. Quare cum, in data nodorum poſitione, ſumma omnium arearum *pDdm*, quo tempore luna pergit a quadratura ad locum quemvis *m*, ſit area *mpQEd*, quæ ad ellipſeos tangentem *QE* terminatur; & ſumma omnium arearum illarum, in revolutione integra, ſit area ellipſeos totius: motus mediocris nodorum in ellipſi erit ad motum mediocrem nodorum in circulo, ut ellipſis ad circulum;

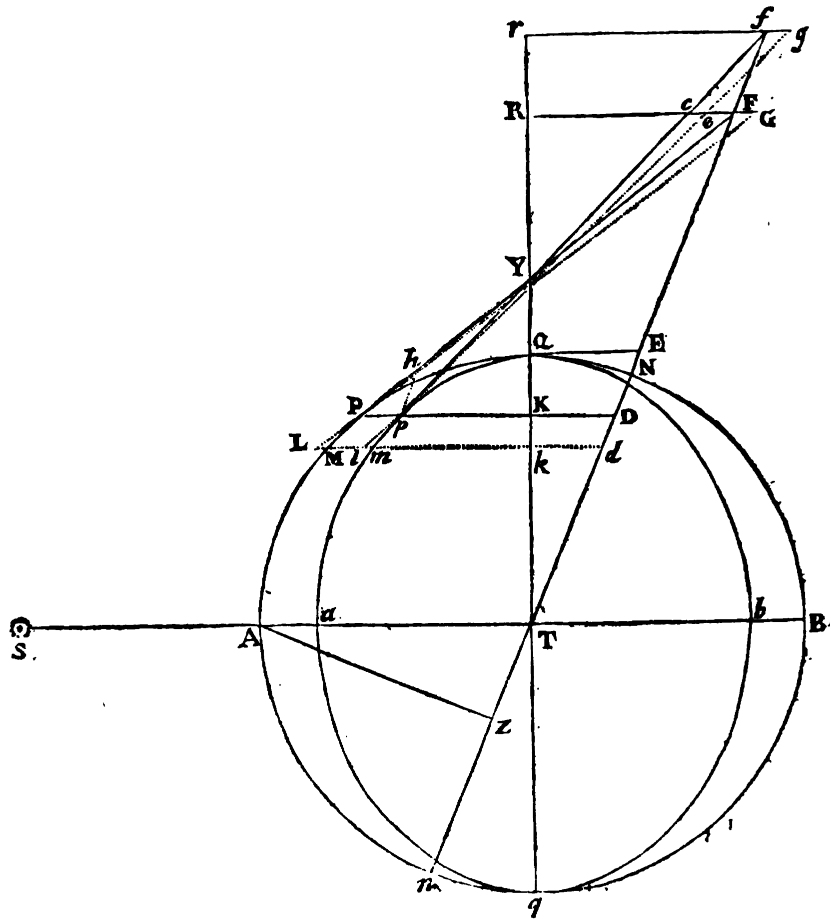
lum; id eſt, ut *Ta* ad *TA*, ſeu 69 ad 70. Et propterea, cum (per corol. 2. prop. xxx.) motus mediocris horarius nodorum in circulo ſit ad 16″. 35‴. 16ⁱᵛ. 36ᵛ. ut *AZ qu.* ad *AT qu.* ſi capiatur angulus 16″. 21‴. 3ⁱᵛ. 30ᵛ. ad angulum 16″. 35‴. 16ⁱᵛ. 36ᵛ. ut 69 ad 70, erit motus mediocris horarius nodorum in ellipſi ad 16″. 21‴. 3ⁱᵛ. 30ᵛ. ut *AZq* ad *ATq*; hoc eſt, ut quadratum ſinus diſtantiæ nodi a ſole ad quadratum radii.

Cæterum luna, radio ad terram ducto, aream velocius deſcribit in ſyzygiis quam in quadraturis, & eo nomine tempus in ſyzygiis contrahitur, in quadraturis producitur; & una cum tempore motus nodorum augetur ac diminuitur. Erat autem momentum areæ in quadraturis lunæ ad ejus momentum in ſyzygiis ut 10973 ad 11073, & propterea momentum mediocre in octantibus eſt ad exceſſum in ſyzygiis, defectumque in quadraturis, ut numerorum ſemiſumma 11023 ad eorundem ſemidifferentiam 50. Unde cum tempus lunæ in ſingulis orbis particulis æqualibus ſit reciproce ut ipſius velocitas; erit tempus mediocre in octantibus ad exceſſum temporis in quadraturis, ac defectum in ſyzygiis, ab hac cauſa oriundum, ut 11023 ad 50 quam proxime. Pergendo autem a quadraturis ad ſyzygias, invenio quod exceſſus momentorum areæ in locis ſingulis, ſupra momentum minimum in quadraturis, ſit ut quadratum ſinus diſtantiæ lunæ a quadraturis quam proxime; & propterea differentia inter momentum in loco quocunque & momentum mediocre in octantibus, eſt ut differentia inter quadratum ſinus diſtantiæ lunæ a quadraturis & quadratum ſinus graduum 45, ſeu ſemiſſem quadrati radii; & incrementum temporis in locis ſingulis inter octantes & quadraturas, & decrementum ejus inter octantes & ſyzygias, eſt in eadem ratione. Motus autem nodorum, quo tempore luna percurrit ſingulas orbis particulas æquales, acceleratur vel retardatur in duplicata ratione temporis. Eſt enim motus iſte, dum luna percurrit *PM* (cæteris paribus) ut *ML*, & *ML* eſt in duplicata ratione temporis. Quare motus nodorum in ſyzygiis, eo tempore confectus quo luna datas orbis particulas percurrit, diminuitur in duplicata ratione numeri 11073 ad numerum 11023; eſtque decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973, ad motum vero totum ut 100 ad 11073 quam proxime. Decrementum autem in locis inter octantes & ſyzygias, & incrementum in locis inter octantes & quadraturas, eſt

quam

De Mundi Systemate

cT ad *cp*, hoc eſt, ſi *p b* ipſi *TN* parallela occurrat *FP* in *b*, ut *Fb* ad *FT* & *FT* ad *FP*; hoc eſt, ut *Fb* ad *FP* ſeu *Dp* ad *DP*, ideoque ut area *Dpmd* ad aream *DPMd*. Et propterea, cum (per corol. 1. prop. xxx.) area poſterior & *AZq* conjunctim proportionalia ſint motui horario nodorum in circulo, erunt area prior & *AZq*. conjunctim proportionalia motui horario nodorum in ellipſi. *Q.E.D.*



Corol. Quare cum, in data nodorum poſitione, ſumma omnium arearum *pDdm*, quo tempore luna pergit a quadratura ad locum quemvis *m*, ſit area *mpQEd*, quæ ad ellipſeos tangentem *QE* terminatur; & ſumma omnium arearum illarum, in revolutione integra, ſit area ellipſeos totius: motus mediocris nodorum in ellipſi erit ad motum mediocrem nodorum in circulo, ut ellipſis ad circu-

lum;

ſum; id eſt, ut *Ta* ad *TA*, ſeu 69 ad 70. Et propterea, cum (per corol. 2. prop. xxx.) motus mediocris horarius nodorum in circulo ſit ad 16″. 35‴. 16^{iv}. 36^{v}. ut *AZ qu.* ad *AT qu.* ſi capiatur angulus 16″. 21‴. 3^{iv}. 30^{v}. ad angulum 16″. 35‴. 16^{iv}. 36^{v}. ut 69 ad 70, erit motus mediocris horarius nodorum in ellipſi ad 16″. 21‴. 3^{iv}. 30^{v}. ut *AZq* ad *ATq*; hoc eſt, ut quadratum ſinus diſtantiæ nodi a ſole ad quadratum radii.

Cæterum luna, radio ad terram ducto, aream velocius deſcribit in ſyzygiis quam in quadraturis, & eo nomine tempus in ſyzygiis contrahitur, in quadraturis producitur; & una cum tempore motus nodorum augetur ac diminuitur. Erat autem momentum areæ in quadraturis lunæ ad ejus momentum in ſyzygiis ut 10973 ad 11073, & propterea momentum mediocre in octantibus eſt ad exceſſum in ſyzygiis, defectumque in quadraturis, ut numerorum ſemiſumma 11023 ad eorundem ſemidifferentiam 50. Unde cum tempus lunæ in ſingulis orbis particulis æqualibus ſit reciproce ut ipſius velocitas, erit tempus mediocre in octantibus ad exceſſum temporis in quadraturis, ac defectum in ſyzygiis, ab hac cauſa oriundum, ut 11023 ad 50 quam proxime. Pergendo autem a quadraturis ad ſyzygias, invenio quod exceſſus momentorum areæ in locis ſingulis, ſupra momentum minimum in quadraturis, ſit ut quadratum ſinus diſtantiæ lunæ a quadraturis quam proxime; & propterea differentia inter momentum in loco quocunque & momentum mediocre in octantibus, eſt ut differentia inter quadratum ſinus diſtantiæ lunæ a quadraturis & quadratum ſinus graduum 45, ſeu ſemiſſem quadrati radii; & incrementum temporis in locis ſingulis inter octantes & quadraturas, & decrementum ejus inter octantes & ſyzygias, eſt in eadem ratione. Motus autem nodorum, quo tempore luna percurrit ſingulas orbis particulas æquales, acceleratur vel retardatur in duplicata ratione temporis. Eſt enim motus iſte, dum luna percurrit *PM* (cæteris paribus) ut *ML*, & *ML* eſt in duplicata ratione temporis. Quare motus nodorum in ſyzygiis, eo tempore confectus quo luna datas orbis particulas percurrit, diminuitur in duplicata ratione numeri 11073 ad numerum 11023; eſtque decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973, ad motum vero totum ut 100 ad 11073 quam proxime. Decrementum autem in locis inter octantes & ſyzygias, & incrementum in locis inter octantes & quadraturas, eſt

quam

De Mundi Syſtemate

quam proxime ad hoc decrementum, ut motus totus in locis illis ad motum totum in ſyzygiis & differentia inter quadratum ſinus diſtantiæ lunæ a quadratura & ſemiſſem quadrati radii ad ſemiſſem quadrati radii conjunctim. Unde ſi nodi in quadraturis verſentur, & capiantur loca duo æqualiter ab octante hinc inde diſtantia, & alia duo a ſyzygia & quadratura iiſdem intervallis diſtantia, deque decrementis motuum in locis duobus inter ſyzygiam & octantem, ſubducantur incrementa motuum in locis reliquis duobus, quæ ſunt inter octantem & quadraturam; decrementum reliquum æquale erit decremento in ſyzygia: uti rationem ineunti facile conſtabit. Proindeque decrementum mediocre, quod de nodorum motu mediocri ſubduci debet, eſt pars quarta decrementi in ſyzygia. Motus totus horarius nodorum in ſyzygiis, ubi luna radio ad terram ducto aream tempori proportionalem deſcribere ſupponebatur, erat $32''. 42'''. 7^{iv}$. Et decrementum motus nodorum quo tempore luna jam velocior deſcribit idem ſpatium diximus eſſe ad hunc motum ut 100 ad 11073; ideoque decrementum illud eſt $17'''\ 43^{iv}. 11^{v}$, cujus pars quarta $4'''. 25^{iv}. 48^{v}$. motui horario mediocri ſuperius invento $16''. 21'''. 3^{i}. 30^{v}$. ſubducta, relinquit $16''. 16'''. 37^{iv}. 42^{v}$. motum mediocrem horarium correctum.

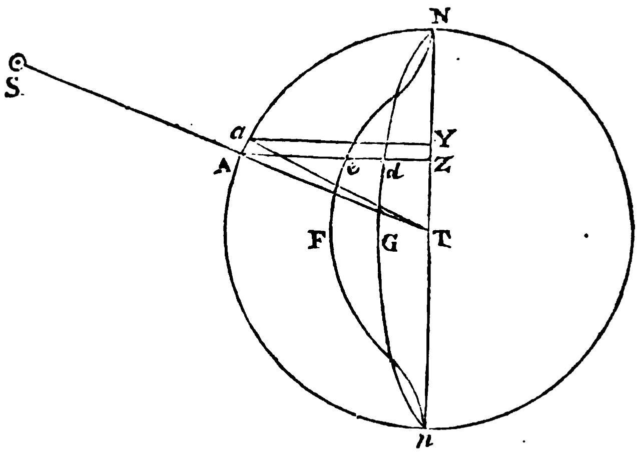
Si nodi verſantur extra quadraturas, & ſpectentur loca bina a ſyzygiis hinc inde æqualiter diſtantia; ſumma motuum nodorum, ubi luna verſatur in his locis, erit ad ſummam motuum, ubi luna in iiſdem locis & nodi in quadraturis verſantur, ut *AZ qu.* ad *AT qu.* Et decrementa motuum, a cauſis jam expoſitis oriunda, erunt ad invicem ut ipſi motus, ideoque motus reliqui erunt ad invicem ut *AZ qu.* ad *AT qu.* & motus mediocres ut motus reliqui. *Eſt itaque* motus mediocris horarius correctus, in dato quocunque nodorum ſitu, ad $16''. 16'''. 37^{iv}. 42^{v}$. ut *AZ qu.* ad *AT qu.*; id eſt, ut quadratum ſinus diſtantiæ nodorum a ſyzygiis ad quadratum radii.

PROPO-

PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XIII.

Invenire motum medium nodorum lunæ.

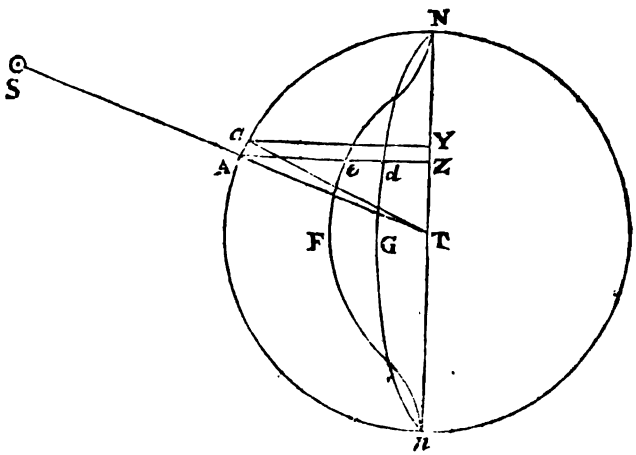
Motus medius annuus eſt ſumma motuum omnium horariorum mediocrium in anno. Concipe nodum verſari in *N*, & ſingulis horis completis retrahi in locum ſuum priorem, ut non obſtante motu ſuo proprio, datum ſemper ſervet ſitum ad ſtellas fixas. Interea vero ſolem *S*, per motum terræ, progredi a nodo, & curſum annuum apparentem uniformiter complere. Sit autem *Aa* arcus datus quam minimus, quem recta *TS* ad ſolem ſemper ducta, interſectione ſui & circuli *NAn*, dato tempore quam minimo deſcribit: & motus horarius mediocris (per jam oſtenſa) erit ut *AZq*, id eſt (ob proportionales *AZ*, *ZY*) ut rectangulum ſub *AZ* & *ZY*, hoc eſt, ut



area *AZYa*. Et ſumma omnium horariorum motuum mediocrium ab initio, ut ſumma omnium arearum *aYZA*, id eſt, ut area *NAZ*. Eſt autem maxima *AZYa* æqualis rectangulo ſub arcu *Aa* & radio circuli; & propterea ſumma omnium rectangulorum in circulo toto ad ſummam totidem maximorum, ut area circuli totius ad rectangulum ſub circumferentia tota & radio, id eſt, ut 1 ad 2. Motus autem horarius, rectangulo maximo reſpondens, erat $16''.\ 16'''.\ 37^{iv}.\ 42^{v}$. Et hic motus, anno toto ſidereo dierum 365. hor. 6. min. 9. fit $39^{gr}.\ 38'.\ 7''.\ 50'''$. Ideoque hujus dimidium $19^{gr}.\ 49'.\ 3''.\ 55'''$. eſt motus

motus medius nodorum circulo toti reſpondens. Et motus nodorum, quo tempore ſol pergit ab *N* ad *A*, eſt ad 19gr. 49′. 3″. 55‴. ut area *NAZ* ad circulum totum.

Hæc ita ſe habent ex hypotheſi, quod nodus horis ſingulis in locum priorem retrahitur, ſic ut ſol anno toto completo ad nodum eundem redeat a quo ſub initio digreſſus fuerat. Verum per motum nodi fit ut ſol citius ad nodum revertatur, & computanda jam eſt abbreviatio temporis. Cum ſol anno toto conficiat 360 gradus, & nodus motu maximo eodem tempore conficeret 39gr. 38′. 7″. 50‴, ſeu 39,6355 gradus; & motus mediocris nodi in loco quovis *N* ſit ad ipſius motum mediocrem in quadraturis ſuis, ut *AZq* ad *ATq*: erit motus ſolis ad motum nodi in *N*, ut 360 *ATq* ad 39,6355 *AZq*; id eſt, ut 9,0827667 *ATq* ad *AZq*. Unde ſi circuli totius circum-



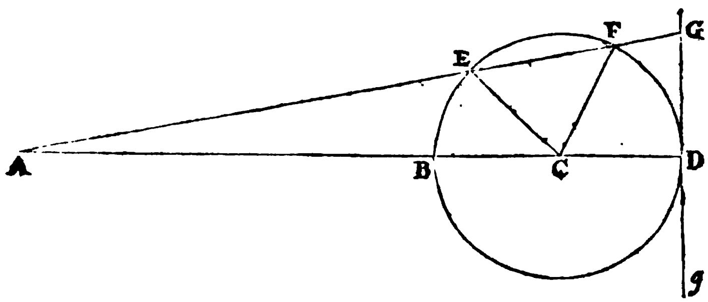
ferentia *NAn* dividatur in particulas æquales *Aa*, tempus quo ſol percurrat particulam *Aa*, ſi circulus quieſceret, erit ad tempus quo percurrit eandem particulam, ſi circulus una cum nodis circa centrum *T* revolvatur, reciproce ut 9,0827667 *ATq* ad 9,0827667 *ATq* + *AZq*. Nam tempus eſt reciproce ut velocitas qua particula percurritur, & hæc velocitas eſt ſumma velocitatum ſolis & nodi. Igitur ſi tempus, quo ſol ſine motu nodi percurreret arcum *NA*, exponatur per ſectorem *NTA*, & particula temporis quo percurreret arcum quam minimum *Aa*, exponatur per ſectoris particulam *ATa*; & (perpendiculo *aT* in *Nn* demiſſo) ſi in *AZ* capiatur *dZ*, ejus longitudinis

gitudinis ut ſit rectangulum *dZ* in *ZY* ad ſectoris particulam *ATa* ut *AZq* ad 9,0827646 *ATq* + *AZq*, id eſt, ut ſit *dZ* ad ½*AZ* ut *ATq* ad 9,0827646 *ATq* + *AZq*; rectangulum *dZ* in *ZY* deſignabit decrementum temporis ex motu nodi oriundum, tempore toto quo arcus *Aa* percurritur. Et ſi punctum *d* tangit curvam *NdGn*, area curvilinea *NdZ* erit decrementum totum, quo tempore arcus totus *NA* percurritur; & propterea exceſſus ſectoris *NAT* ſupra aream *NdZ* erit tempus illud totum. Et quoniam motus nodi tempore minore minor eſt in ratione temporis, debebit etiam area *AaYZ* diminui in eadem ratione. Id quod fiet ſi capiatur in *AZ* longitudo *eZ*, quæ ſit ad longitudinem *AZ* ut *AZq* ad 9,0827646 *ATq* + *AZq*. Sic enim rectangulum *eZ* in *ZY* erit ad aream *AZYa* ut decrementum temporis, quo arcus *Aa* percurritur, ad tempus totum quo percurreretur, ſi nodus quieſceret: & propterea rectangulum illud reſpondebit decremento motus nodi. Et ſi punctum *e* tangat curvam *NeFn*, area tota *NeZ*, quæ ſumma eſt omnium decrementorum, reſpondebit decremento toti, quo tempore arcus *AN* percurritur; & area reliqua *NAe* reſpondebit motui reliquo, qui verus eſt nodi motus, quo tempore arcus totus *NA* per ſolis & nodi conjunctos motus percurritur. Jam vero area ſemicirculi eſt ad aream figuræ *NeFn*, per methodum ſerierum infinitarum quæſitam, ut 793 ad 60 quamproxime. Motus autem qui reſpondet circulo toti erat 19gr. 49′. 3″. 55‴. & propterea motus, qui figuræ *NeFn* duplicatæ reſpondet, eſt 1gr. 29′. 58″. 2‴. Qui de motu priore ſubductus relinquit 18gr. 19′. 5″. 53‴. motum totum nodi reſpectu fixarum inter ſui ipſius conjunctiones cum ſole; & hic motus de ſolis motu annuo graduum 360 ſubductus, relinquit 341gr. 40′. 54″. 7‴. motum ſolis inter eaſdem conjunctiones. Iſte autem motus eſt ad motum annuum 360gr. ut nodi motus jam inventus 18gr. 19′. 5″. 53‴. ad ipſius motum annuum, qui propterea erit 19gr. 18′. 1″. 23‴. Hic eſt motus medius nodorum in anno ſidereo. Idem per tabulas aſtronomicas eſt 19gr. 21′ 21″. 50‴. Differentia minor eſt parte trecenteſima motus totius, & ab orbis lunaris eccentricitate & inclinatione ad planum eclipticæ oriri videtur. Per eccentricitatem orbis motus nodorum nimis acceleratur, & per ejus inclinationem viciſſim retardatur aliquantulum, & ad juſtam velocitatem reducitur.

PROPOSITIO XXXIII. PROBLEMA XIV.

Invenire motum verum nodorum lunæ.

In tempore quod eſt ut area *NTA—NdZ*, *(in fig. præced.)* motus iſte eſt ut area *NAe*, & inde datur. Verum ob nimiam calculi difficultatem, præſtat ſequentem problematis conſtructionem adhibere. Centro *C*, intervallo quovis *CD*, deſcribatur circulus *BEFD*. Producatur *DC* ad *A*, ut ſit *AB* ad *AC* ut motus medius ad ſemiſſem motus veri mediocris, ubi nodi ſunt in quadraturis, id eſt, ut 19gr. 18′. 1″. 23‴. ad 19gr. 49′. 3″. 55‴, atque ideo *BC* ad *AC* ut motuum differentia 0gr. 31′. 2″. 32‴, ad motum poſteriorem 19gr. 49′. 3″. 55‴. hoc eſt, ut 1 ad $38\frac{3}{10}$; dein per punctum *D* ducatur infinita *Gg*, quæ tangat circulum in *D*; & ſi capiatur angulus *BCE* vel *BCF* æqualis duplæ diſtantiæ ſolis a loco nodi, per motum medium invento; & agatur *AE* vel *AF* ſecans perpendiculum *DG* in *G*; & capiatur angulus qui ſit ad motum totum nodi inter ipſius ſyzygias (id eſt, ad 9gr. 11′. 3″.) ut tangens *DG* ad circuli *BED* circumferentiam totam; atque angulus iſte (pro quo angulus *DAG*



uſurpari poteſt) ad motum medium nodorum addatur ubi nodi tranſeunt a quadraturis ad ſyzygias, & ab eodem motu medio ſubducatur ubi tranſeunt a ſyzygiis ad quadraturas; habebitur eorum motus verus. Nam motus verus ſic inventus congruet quam proxime cum motu vero qui prodit exponendo tempus per aream *NTA—NdZ*, & motum nodi per aream *NAe*; ut rem perpendenti & computationes inſtituenti conſtabit. Hæc eſt æquatio ſemeſtris motus nodorum.

nodorum. Eſt & æquatio menſtrua, ſed quæ ad inventionem latitudinis lunæ minime neceſſaria eſt. Nam cum variatio inclinationis orbis lunaris ad planum eclipticæ duplici inæqualitati obnoxia ſit, alteri ſemeſtri, alteri autem menſtruæ; hujus menſtrua inæqualitas & æquatio menſtrua nodorum ita ſe mutuo contemperant & corrigunt, ut ambæ in determinanda latitudine lunæ negligi poſſint.

Corol. Ex hac & præcedente propoſitione liquet quod nodi in ſyzygiis ſuis quieſcunt, in quadraturis autem regrediuntur motu horario 16″. 19‴. 26^{iv}. Et quod æquatio motus nodorum in octantibus ſit 1gr. 30′. Quæ omnia cum phænomenis cœleſtibus probe quadrant.

Scholium.

Alia ratione motum nodorum *J. Machin Aſtron. Prof. Greſham.* & *Hen. Pemberton* M. D. ſeorſum invenerunt. Hujus methodi mentio quædam alibi facta eſt. Et utriuſque chartæ, quas vidi, duas propoſitiones continebant, & inter ſe in utriſque congruebant. Chartam vero D. *Machin*, cum prior in manus meas venerit, hic adjungam.

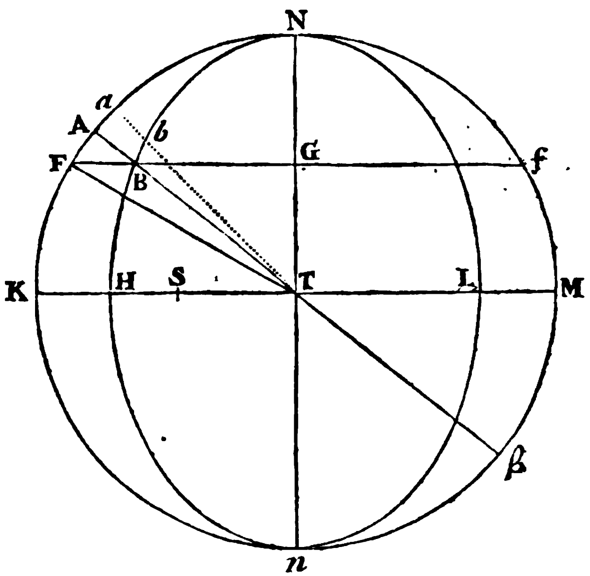
De Motu Nodorum Lunæ.

PROPOSITIO I.

“ *Motus ſolis medius a nodo, definitur per medium pro-*
“ *portionale geometricum, inter motum ipſius ſolis medium,*
“ *& motum illum mediocrem quo ſol celerrimè recedit a nodo*
“ *in quadraturis.*

“ Sit *T* locus ubi terra, *Nn* linea nodorum lunæ ad tempus quod-
“ vis datum, *KTM* huic ad rectos angulos ducta, *TA* recta circum
“ centrum revolvens ea cum velocitate angulari qua ſol & nodus a
“ ſe invicem recedunt, ita ut angulus inter rectam quieſcentem *Nn*
“ & revolventem *TA*, ſemper fiat æqualis diſtantiæ locorum ſolis &
“ nodi. Jam ſi recta quævis *TK* dividatur in partes *TS* & *SK* quæ
“ ſint ut motus ſolis horarius medius ad motum horarium medio-
“ crem nodi in quadraturis, & ponatur recta *TH* media proportio-
“ nalis inter partem *TS* & totam *TK*, hæc recta inter reliquas pro-
“ portionalis erit motui medio ſolis a nodo.

" Deſcribatur enim circulus *N K n M* centro *T* & radio *T K*, eo-
" demque centro & ſemiaxibus *T H* & *T N* deſcribatur ellipſis *N H*
" *n L*, & in tempore quo ſol a nodo recedit per arcum *N a*, ſi du-
" catur recta *T b a*, area ſectoris *N T a* exponet ſummam motuum
" nodi & ſolis in eodem tempore. Sit igitur arcus *a A* quam mini-
" mus quem recta *T b a* præfata lege revolvens in datâ temporis par-
" ticula uniformiter deſcribit, & ſector quam minimus *T A a* erit ut
" ſumma velocitatum qua ſol & nodus tum temporis ſeorſim fe-
" runtur. Solis autem velocitas ferè uniformis eſt, utpote cujus parva



" inæqualitas vix ullam inducit in medio nodorum motu varieta-
" tem. Altera pars hujus ſummæ nempe velocitas nodi in medio-
" cri ſua quantitate, augetur in receſſu a ſyzygiis in duplicata rati-
" one ſinus diſtantiæ ejus a ſole; per Coroll. Prop. 31. Lib. 3^tii Prin-
" cip. & cum maxima eſt in quadraturis ad ſolem in *K*, eandem ra-
" tionem obtinet ad ſolis velocitatem ac ea quam habet *S K* ad *T S*
" hoc eſt ut (differentia quadratorum ex *T K* & *T H* vel) rectangu-
" lum *K H M* ad *T H* quadratum. Sed ellipſis *N B H* dividit ſecto-
" rem *A T a* ſummæ harum duarum velocitatum exponentem, in
" duas partes *A B b a* & *B T b* ipſis velocitatibus proportionales.
" Producatur enim *B T* ad circulum in *β*, & a puncto *B* demitta-
" tur

“ tur ad axem majorem perpendicularis *BG*; quæ utrinque producta “ occurrat circulo in punctis *F* & *f*, & quoniam ſpatium *AB ba* eſt “ ad ſectorem *TBb* ut rectangulum *ABβ* ad *BT* quadratum “ (rectangulum enim illud æquatur differentiæ quadratorum ex *TA* “ & *TB* ob rectam *Aβ* æqualiter & inæqualiter ſectam in *T* & *B*.) “ Hæc igitur ratio ubi ſpatium *AB ba* maximum eſt in *K*, eadem “ erit ac ratio rectanguli *KHM* ad *HT* quadratum, ſed maxima “ nodi mediocris velocitas erat ad ſolis velocitatem in hac ratione. “ Igitur in quadraturis ſector *ATa* dividitur in partes velocitatibus “ proportionales. Et quoniam rectang. *KHM* eſt ad *HT* quadr. ut “ *FBf* ad *BG* quad. & rectangulum *ABβ* æquatur rectangulo *FBf*. “ Erit igitur areola *ABba* ubi maxima eſt ad reliquum ſectorem “ *TBb*, ut rectang. *ABβ* ad *BG* quadr. Sed ratio harum areo- “ larum ſemper erat ut *ABβ* rectang. ad *BT* quadratum; & pro- “ pterea areola *ABba* in loco *A* minor eſt ſimili areola in qua- “ draturis, in duplicata ratione *BG* ad *BT* hoc eſt in duplicata ra- “ tione ſinus diſtantiæ ſolis a nodo. Et proinde ſumma omnium are- “ olarum *ABba* nempe ſpatium *ABN* erit ut motus nodi in tem- “ pore quo ſol digreditur a nodo per arcum *NA*. Et ſpatium re- “ liquum nempe ſector ellipticus *NTB* erit ut motus ſolis medius “ in eodem tempore. Et propterea quoniam annuus motus nodi “ medius, is eſt qui fit in tempore quo ſol periodum ſuam abſol- “ verit, motus nodi medius a ſole erit ad motum ipſius ſolis medi- “ um, ut area circuli ad aream ellipſeos, hoc eſt ut recta *TK* ad “ rectam *TH* mediam ſcilicet proportionalem inter *TK* & *TS*; vel “ quod eodem redit ut media proportionalis *TH* ad rectam *TS*.

PROPOSITIO II.

“ *Dato motu medio nodorum lunæ invenire motum verum.*

“ Sit angulus *A* diſtantia ſolis a loco nodi medio, ſive motus me- “ dius ſolis a nodo. Tum ſi capiatur angulus *B* cujus tangens ſit “ ad tangentem anguli *A* ut *TH* ad *TK*, hoc eſt in ſubduplicata ra- “ tione motus mediocris horarii ſolis ad motum mediocrem hora- “ rium ſolis a nodo in quadraturis verſante; erit idem angulus *B* “ diſtantia ſolis a loco nodi vero. Nam jungatur *FT* & ex demon-

“ ſtratione

" ſtratione propoſitionis ſuperioris erit angulus *FTN* diſtantia ſolis " a loco nodi medio, angulus autem *ATN* diſtantia a loco vero, & " tangentes horum angulorum ſunt inter ſe ut *TK* ad *TH*.

" *Coroll.* Hinc angulus *FTA* eſt æquatio nodorum lunæ, ſinuſque " hujus anguli ubi maximus eſt in octantibus, eſt ad radium ut *KH* " ad *TK*+*TH*. Sinus autem hujus æquationis in loco quovis alio " *A* eſt ad ſinum maximum, ut ſinus ſummæ angulorum *FTN*+*ATN* " ad radium: hoc eſt fere ut ſinus duplæ diſtantiæ ſolis a loco nodi " medio (nempe 2 *FTN*) ad radium.

Scholium.

" Si motus nodorum mediocris horarius in quadraturis ſit 16″. " 16‴. 37^{iv}. 42^{v}. hoc eſt in anno toto ſidereo 39°. 38′. 7″. 50‴. " erit *TH* ad *TK* in ſubduplicata ratione numeri 9,0827646 ad nu- " merum 10,0827646, hoc eſt ut 18,6524761 ad 19,6524761. Et pro- " pterea *TH* ad *HK* ut 18,6524761 ad 1. hoc eſt ut motus ſolis in " anno ſidereo ad motum nodi medium 19°. 18′, 1″. 23‴$\frac{2}{3}$.

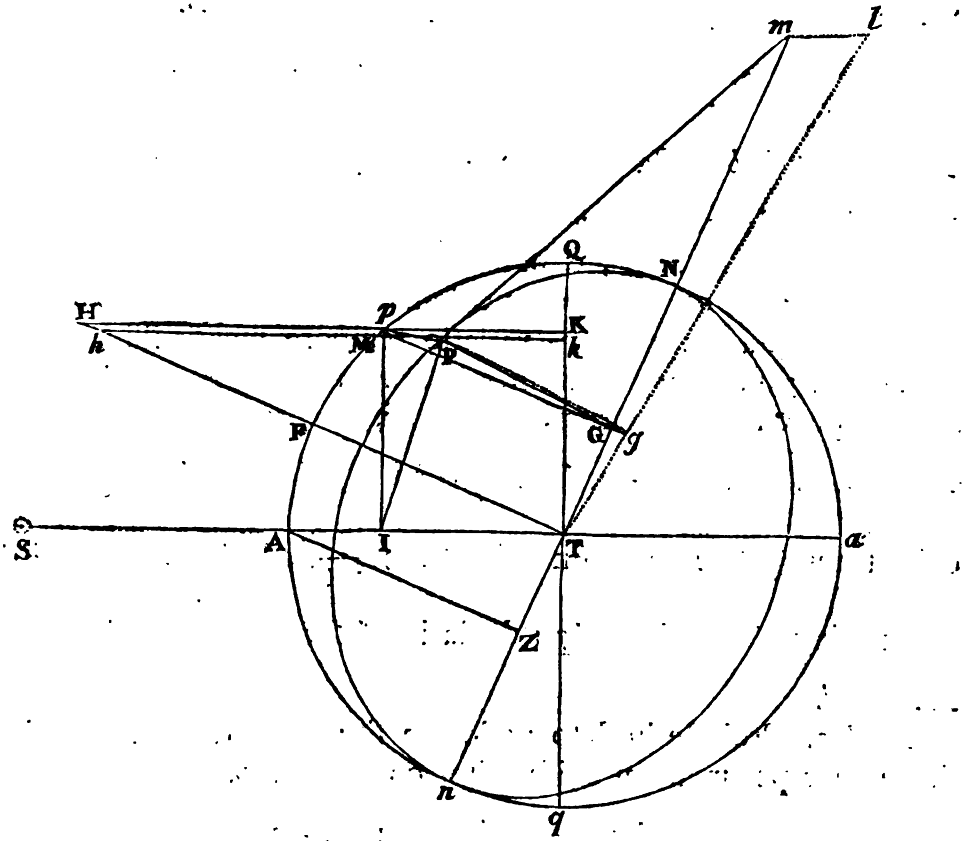
" At ſi motus medius nodorum Lunæ in 20 annis Julianis ſit " 386°. 50′. 15″. ſicut ex obſervationibus in theoria lunæ adhi- " bitis deducitur: motus medius nodorum in anno ſidereo erit 19°. " 20′. 31″. 58‴. Et *TH* erit ad *HK* ut 360^{gr}. ad 19°. 20′. 31″. 58‴. " hoc eſt ut 18,61214 ad 1. unde motus mediocris horarius nodorum " in quadraturis evadet 16″. 18‴. 48^{iv}. Et æquatio nodorum maxi- " ma in octantibus 1°. 29′. 57″.

PROPOSITIO XXXIV. PROBLEMA XV.

Invenire variationem horariam inclinationis orbis lunaris ad planum eclipticæ.

Deſignent *A* & *a* ſyzygias; *Q* & *q* quadraturas; *N* & *n* nodos; *P* locum lunæ in orbe ſuo; *p* veſtigium loci illius in plano eclipticæ, & *mTl* motum momentaneum nodorum ut ſupra. Et ſi ad lineam *Tm* demittatur perpendiculum *PG*, jungatur *pG*, & producatur ea donec occurrat *Tl* in *g*, & jungatur etiam *Pg*: erit angulus *PGp* inclinatio orbis lunaris ad planum eclipticæ, ubi luna verſatur in *P*; & angulus *Pgp* inclinatio ejuſdem poſt momentum temporis completum;

pletum; ideoque angulus *GPg* variatio momentanea inclinationis. Eſt autem hic angulus *GPg* ad angulum *GTg* ut *TG* ad *PG* & *Pp* ad *PG* conjunctim. Et propterea ſi pro momento temporis ſubſtituatur hora; cum angulus *GTg* (per prop. xxx.) ſit ad angulum 33″.



10‴. 33ⁱᵛ. ut *IT* × *PG* × *AZ* ad *AT cub.* erit angulus *GPg* (ſeu inclinationis horaria variatio) ad angulum 33″. 10‴. 33ⁱᵛ ut *IT* × *AZ* × *TG* × $\frac{Pp}{PG}$ ad *AT cub.* *Q. E. I.*

Hæc ita ſe habent ex hypotheſi quod luna in orbe circulari uniformiter gyratur. Quod ſi orbis ille ellipticus ſit, motus mediocris nodorum minuetur in ratione axis minoris ad axem majorem; uti ſupra expoſitum eſt. Et in eadem ratione minuetur etiam inclinationis variatio.

Corol.

Corol. 1. Si ad *Nn* erigatur perpendiculum *TF*, ſitque *pM* motus horarius lunæ in plano eclipticæ; & perpendicula *pK*, *Mk* in *QT* demiſſa & utrinque producta occurrant *TF* in *H* & *h*: erit *IT* ad *AT* ut *Kk* ad *Mp*, & *TG* ad *Hp* ut *TZ* ad *AT*, ideoque $IT \times TG$ æquale $\frac{Kk \times Hp \times TZ}{Mp}$, hoc eſt, æquale areæ *HpMh* ductæ in rationem $\frac{TZ}{Mp}$: & propterea inclinationis variatio horaria ad 33″. 10‴. 33^iv. ut *HpMh* ducta in $AZ \times \frac{TZ}{Mp} \times \frac{Pp}{PG}$ ad *AT cub.*

Corol. 2. Ideoque ſi terra & nodi ſingulis horis completis retraherentur a locis ſuis novis, & in loca priora in inſtanti ſemper reducerentur, ut ſitus eorum, per menſem integrum periodicum, datus maneret; tota inclinationis variatio tempore menſis illius foret ad 33″. 10‴. 33^iv, ut aggregatum omnium arearum *HpMh*, in revolutione puncti *p* genitarum, & ſub ſignis propriis + & − conjunctarum, ductum in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ *cub.* id eſt, ut circulus totus *QAqa* ductus in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ *cub.* hoc eſt, ut circumferentia *QAqa* ducta in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2\,Mp \times AT$ *quad.*

Corol. 3. Proinde in dato nodorum ſitu, variatio mediocris horaria, ex qua per menſem uniformiter continuata variatio illa menſtrua generari poſſet, eſt ad 33″. 10‴. 33^iv. ut $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2ATq$, ſive ut $Pp \times \frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ ad $PG \times 4AT$, id eſt (cum *Pp* ſit ad *PG* ut ſinus inclinationis prædictæ ad radium, & $\frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ ſit ad $4AT$ ut ſinus duplicati anguli *ATn* ad radium quadruplicatum) ut inclinationis ejuſdem ſinus ductus in ſinum duplicatæ diſtantiæ nodorum a ſole, ad quadruplum quadratum radii.

Corol. 4. Quoniam inclinationis horaria variatio, ubi nodi in quadraturis verſantur, eſt (per hanc propoſitionem) ad angulum 33″.

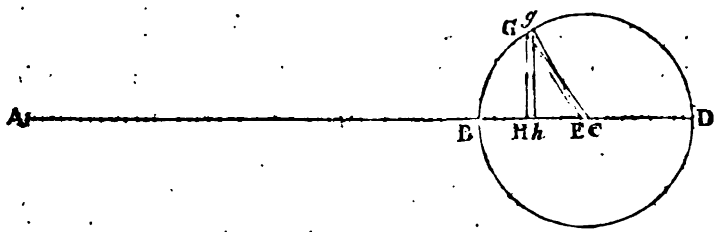
10‴.

10‴. 33^{iv} ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub.* id eſt, ut $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2} AT} \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2\,AT$; hoc eſt, ut ſinus duplicatæ diſtantiæ lunæ à quadraturis ductus in $\frac{Pp}{PG}$ ad radium duplicatum: ſumma omnium variationum horariarum, quo tempore luna in hoc ſitu nodorum tranſit a quadratura ad ſyzygiam (id eſt, ſpatio horarum $177\frac{1}{5}$,) erit ad ſummam totidem angulorum 33″. 10‴. 33^{iv}, ſeu 5878″, ut ſumma omnium ſinuum duplicatæ diſtantiæ lunæ à quadraturis ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad ſummam totidem diametrorum; hoc eſt, ut diameter ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad circumferentiam; id eſt, ſi inclinatio ſit $5^{gr.}$ 1′, ut $7 \times \frac{874}{10000}$ ad 22, ſeu 278 ad 10000. Proindeque variatio tota, ex ſumma omnium horariarum variationum tempore prædicto conflata, eſt 163″, ſeu 2′. 43″.

PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA XVI.

Dato tempore invenire inclinationem orbis lunaris ad planum eclipticæ.

Sit AD ſinus inclinationis maximæ, & AB ſinus inclinationis minimæ. Biſecetur BD in C, & centro C, intervallo BC deſcribatur circulus BGD. In AC capiatur CE in ea ratione ad EB quam



EB habet ad $2\,BA$: et ſi dato tempore conſtituatur angulus AEG æqualis duplicatæ diſtantiæ nodorum à quadraturis, & ad AD demittatur perpendiculum GH: erit AH ſinus inclinationis quæſitæ.

 Nam

De Mundi Systemate

Corol. 1. Si ad Nn erigatur perpendiculum TF, ſitque pM motus horarius lunæ in plano eclipticæ; & perpendicula pK, Mk in QT demiſſa & utrinque producta occurrant TF in H & h: erit IT ad AT ut Kk ad Mp, & TG ad Hp ut TZ ad AT, ideoque $IT \times TG$ æquale $\frac{Kk \times Hp \times TZ}{Mp}$, hoc eſt, æquale areæ $Hp\,Mh$ ductæ in rationem $\frac{TZ}{Mp}$: & propterea inclinationis variatio horaria ad 33″. 10‴. 33^iv. ut $Hp\,Mh$ ducta in $AZ \times \frac{TZ}{Mp} \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub.*

Corol. 2. Ideoque ſi terra & nodi ſingulis horis completis retraherentur a locis ſuis novis, & in loca priora in inſtanti ſemper reducerentur, ut ſitus eorum, per menſem integrum periodicum, datus maneret; tota inclinationis variatio tempore menſis illius foret ad 33″. 10‴. 33^iv, ut aggregatum omnium arearum $Hp\,Mh$, in revolutione puncti p genitarum, & ſub ſignis propriis + & — conjunctarum, ductum in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ *cub.* id eſt, ut circulus totus $QAqa$ ductus in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ *cub.* hoc eſt, ut circumferentia $QAqa$ ducta in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2\,Mp \times AT$ *quad.*

Corol. 3. Proinde in dato nodorum ſitu, variatio mediocris horaria, ex qua per menſem uniformiter continuata variatio illa menſtrua generari poſſet, eſt ad 33″. 10‴. 33^iv. ut $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2ATq$, ſive ut $Pp \times \frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ ad $PG \times 4AT$, id eſt (cum Pp ſit ad PG ut ſinus inclinationis prædictæ ad radium, & $\frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ ſit ad $4AT$ ut ſinus duplicati anguli ATn ad radium quadruplicatum) ut inclinationis ejuſdem ſinus ductus in ſinum duplicatæ diſtantiæ nodorum a ſole, ad quadruplum quadratum radii.

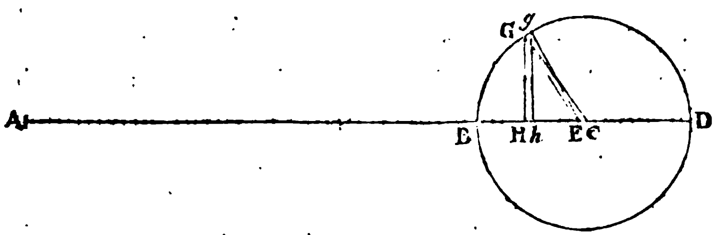
Corol. 4. Quoniam inclinationis horaria variatio, ubi nodi in quadraturis verſantur, eſt (per hanc propoſitionem) ad angulum 33″. 10‴.

10'''. 33^{iv} ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub.* id eſt, ut $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2}AT} \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2AT$; hoc eſt, ut ſinus duplicatæ diſtantiæ lunæ à quadraturis ductus in $\frac{Pp}{PG}$ ad radium duplicatum: ſumma omnium variationum horariarum, quo tempore luna in hoc ſitu nodorum tranſit a quadratura ad ſyzygiam (id eſt, ſpatio horarum $177\frac{1}{5}$,) erit ad ſummam totidem angulorum 33''. 10'''. 33^{iv}, ſeu 5878'', ut ſumma omnium ſinuum duplicatæ diſtantiæ lunæ à quadraturis ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad ſummam totidem diametrorum; hoc eſt, ut diameter ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad circumferentiam; id eſt, ſi inclinatio ſit $5^{gr.}$ 1', ut $7 \times \frac{874}{10000}$ ad 22, ſeu 278 ad 10000. Proindeque variatio tota, ex ſumma omnium horariarum variationum tempore prædicto conflata, eſt 163'', ſeu 2'. 43''.

PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA XVI.

Dato tempore invenire inclinationem orbis lunaris ad planum eclipticæ.

Sit *AD* ſinus inclinationis maximæ, & *AB* ſinus inclinationis minimæ. Biſecetur *BD* in *C*, & centro *C*, intervallo *BC* deſcribatur circulus *BGD*. In *AC* capiatur *CE* in ea ratione ad *EB* quam



EB habet ad 2 *BA*: et ſi dato tempore conſtituatur angulus *AEG* æqualis duplicatæ diſtantiæ nodorum à quadraturis, & ad *AD* demittatur perpendiculum *GH*: erit *AH* ſinus inclinationis quæſitæ.

 Nam

Nam GEq æquale eſt $GHq+HEq=BHD+HEq=HBD+HEq-BHq=HBD+BEq-2BH\times BE=BEq+2EC\times BH=2EC\times AB+2EC\times BH=2EC\times AH$. Ideoque cum $2\,EC$ detur, eſt GEq ut AH. Deſignet jam AEg duplicatam diſtantiam nodorum à quadraturis poſt datum aliquod momentum temporis completum, & arcus Gg ob datum



angulum GEg erit ut diſtantia GE. Eſt autem Hh ad Gg ut GH ad GC, & propterea Hh eſt ut contentum $GH\times Gg$, ſeu $GH\times GE$; id eſt, ut $\frac{GH}{GE}\times GEq$ ſeu $\frac{GH}{GE}\times AH$, id eſt, ut AH & ſinus anguli AEG conjunctim. Igitur ſi AH in caſu aliquo ſit ſinus inclinationis, augebitur ea iiſdem incrementis cum ſinu inclinationis, per Corol. 3. Propoſitionis ſuperioris, & propterea *ſinui* illi æqualis ſemper manebit. Sed AH, ubi punctum G incidit in punctum alterutrum B vel D, huic ſinui æqualis eſt, & propterea eidem ſemper æqualis manet. *Q. E. D.*

In hac demonſtratione ſuppoſui angulum BEG, qui eſt duplicata diſtantia nodorum à quadraturis, uniformiter augeri. Nam omnes inæqualitatum minutias expendere non vacat. Concipe jam angulum BEG rectum eſſe, & in hoc caſu Gg eſſe augmentum horarium duplæ diſtantiæ nodorum & ſolis ab invicem; & inclinationis variatio horaria in eodem caſu (per Corol. 3. Prop. noviſſimæ) erit ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.$ ut contentum ſub inclinationis ſinu AH & ſinu anguli recti BEG, qui eſt duplicata diſtantia nodorum a *ſole*, ad quadruplum quadratum radii; id eſt, ut mediocris inclinati*onis ſinus* AH ad radium quadruplicatum; hoc eſt (cum inclinatio *illa* mediocris ſit quaſi $5^{gr.}\ 8'\frac{1}{2}$) ut ejus ſinus 896 ad radium quadruplicatum 40000, ſive ut 224 ad 10000. Eſt autem variatio tota, ſinuum differentiæ

ferentiæ BD reſpondens, ad variationem illam horariam ut diameter BD ad arcum Gg; id eſt, ut diameter BD ad ſemicircumferentiam BGD & tempus horarum $2079\frac{7}{10}$, quo nodus pergit à quadraturis ad ſyzygias, ad horam unam conjunctim; hoc eſt, ut 7 ad 11 & $2079\frac{7}{10}$ ad 1. Quare ſi rationes omnes conjungantur, fiet variatio tota BD ad 33''. 10'''. 33^{iv}. ut $224 \times 7 \times 2079\frac{7}{10}$ ad 110000, id eſt, ut 29645 ad 1000, & inde variatio illa BD prodibit 16'. 23''$\frac{1}{2}$.

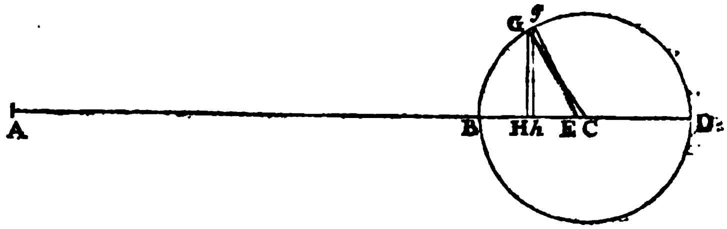
Hæc eſt inclinationis variatio maxima quatenus locus lunæ in orbe ſuo non conſideratur. Nam inclinatio, ſi nodi in ſyzygiis verſantur, nil mutatur ex vario ſitu lunæ. At ſi nodi in quadraturis conſiſtunt, inclinatio minor eſt ubi luna verſatur in ſyzygiis, quam ubi ea verſatur in quadraturis, exceſſu 2'. 43''; uti in propoſitionis ſuperioris Corollario quarto indicavimus. Et hujus exceſſus dimidio 1'. 21''$\frac{1}{2}$ variatio tota mediocris BD in quadraturis lunaribus diminuta fit 15'. 2'', in ipſius autem ſyzygiis aucta fit 17'. 45''. Si luna igitur in ſyzygiis conſtituatur, variatio tota in tranſitu nodorum a quadraturis ad ſyzygias erit 17'. 45'': ideoque ſi inclinatio, ubi nodi in ſyzygiis verſantur, ſit 5$^{gr.}$ 17'. 20''; eadem, ubi nodi ſunt in quadraturis, & luna in ſyzygiis, erit 4$^{gr.}$ 59'. 35''. Atque hæc ita ſe habere confirmatur ex obſervationibus.

Si jam deſideretur orbis inclinatio illa, ubi luna in ſyzygiis & nodi ubivis verſantur; fiat AB ad AD ut ſinus graduum 4. 59'. 35'' ad ſinum graduum 5. 17'. 20'', & capiatur angulus AEG æqualis duplicatæ diſtantiæ nodorum à quadraturis; & erit AH ſinus inclinationis quæſitæ. Huic orbis inclinationi æqualis eſt ejuſdem inclinatio, ubi luna diſtat 90$^{gr.}$ à nodis. In aliis lunæ locis inæqualitas menſtrua, quam inclinationis variatio admittit, in calculo latitudinis lunæ compenſatur, & quodammodo tollitur per inæqualitatem menſtruam motus nodorum (ut ſupra diximus) ideoque in calculo latitudinis illius negligi poteſt.

Scholium.

Hiſce motuum lunarium computationibus oſtendere volui, quod motus lunares per theoriam gravitatis a cauſis ſuis computari poſſint. Per eandem theoriam inveni præterea quod æquatio annua

Nam GEq æquale eſt $GHq+HEq=BHD+HEq=HBD+HEq-BHq=HBD+BEq-2BH\times BE=BEq+2EC\times BH=2EC\times AB+2EC\times BH=2EC\times AH$. Ideoque cum $2EC$ detur, eſt GEq ut AH. Deſignet jam AEg duplicatam diſtantiam nodorum à quadraturis poſt datum aliquod momentum temporis completum, & arcus Gg ob datum



angulum GEg erit ut diſtantia GE. Eſt autem Hh ad Gg ut GH ad GC, & propterea Hh eſt ut contentum $GH\times Gg$, ſeu $GH\times GE$; id eſt, ut $\frac{GH}{GE}\times GEq$ ſeu $\frac{GH}{GE}\times AH$, id eſt, ut AH & ſinus anguli AEG conjunctim. Igitur ſi AH in caſu aliquo ſit ſinus inclinationis, augebitur ea iiſdem incrementis cum ſinu inclinationis, per Corol. 3. Propoſitionis ſuperioris, & propterea ſinui illi æqualis ſemper manebit. Sed AH, ubi punctum G incidit in punctum alterutrum B vel D, huic ſinui æqualis eſt, & propterea eidem ſemper æqualis manet. *Q. E. D.*

In hac demonſtratione ſuppoſui angulum BEG, qui eſt duplicata diſtantia nodorum à quadraturis, uniformiter augeri. Nam omnes inæqualitatum minutias expendere non vacat. Concipe jam angulum BEG rectum eſſe, & in hoc caſu Gg eſſe augmentum horarium duplæ diſtantiæ nodorum & ſolis ab invicem; & inclinationis variatio horaria in eodem caſu (per Corol. 3. Prop. noviſſimæ) erit ad $33''. 10'''. 33^{iv}$. ut contentum ſub inclinationis ſinu AH & ſinu anguli recti BEG, qui eſt duplicata diſtantia nodorum a ſole, ad quadruplum quadratum radii; id eſt, ut mediocris inclinationis ſinus AH ad radium quadruplicatum; hoc eſt (cum inclinatio illa mediocris ſit quaſi $5^{gr.}\, 8'\frac{1}{2}$) ut ejus ſinus 896 ad radium quadruplicatum 40000, ſive ut 224 ad 10000. Eſt autem variatio tota, ſinuum differentiæ

ferentiæ BD reſpondens, ad variationem illam horariam ut diameter BD ad arcum Gg; id eſt, ut diameter BD ad ſemicircumferentiam BGD & tempus horarum $2079\frac{7}{10}$, quo nodus pergit à quadraturis ad ſyzygias, ad horam unam conjunctim; hoc eſt, ut 7 ad 11 & $2079\frac{7}{10}$ ad 1. Quare ſi rationes omnes conjungantur, fiet variatio tota BD ad 33″. 10‴. 33^{iv} ut $224 \times 7 \times 2079\frac{7}{10}$ ad 110000, id eſt, ut 29645 ad 1000, & inde variatio illa BD prodibit 16′, 23″$\frac{1}{2}$.

Hæc eſt inclinationis variatio maxima quatenus locus lunæ in orbe ſuo non conſideratur. Nam inclinatio, ſi nodi in ſyzygiis verſantur, nil mutatur ex vario ſitu lunæ. At ſi nodi in quadraturis conſiſtunt, inclinatio minor eſt ubi luna verſatur in ſyzygiis, quam ubi ea verſatur in quadraturis, exceſſu 2′. 43″; uti in propoſitionis ſuperioris Corollario quarto indicavimus. Et hujus exceſſus dimidio 1′. 21″$\frac{1}{2}$ variatio tota mediocris BD in quadraturis lunaribus diminuta fit 15′. 2″, in ipſius autem ſyzygiis aucta fit 17′. 45″. Si luna igitur in ſyzygiis conſtituatur, variatio tota in tranſitu nodorum a quadraturis ad ſyzygias erit 17′. 45″: ideoque ſi inclinatio, ubi nodi in ſyzygiis verſantur, ſit 5$^{gr.}$ 17′. 20″; eadem, ubi nodi ſunt in quadraturis, & luna in ſyzygiis, erit 4$^{gr.}$ 59′. 35″. Atque hæc ita ſe habere confirmatur ex obſervationibus.

Si jam deſideretur orbis inclinatio illa, ubi luna in ſyzygiis & nodi ubivis verſantur; fiat AB ad AD ut ſinus graduum 4. 59′. 35″ ad ſinum graduum 5. 17′. 20″, & capiatur angulus AEG æqualis duplicatæ diſtantiæ nodorum à quadraturis; & erit AH ſinus inclinationis quæſitæ. Huic orbis inclinationi æqualis eſt ejuſdem inclinatio, ubi luna diſtat 90$^{gr.}$ à nodis. In aliis lunæ locis inæqualitas menſtrua, quam inclinationis variatio admittit, in calculo latitudinis lunæ compenſatur, & quodammodo tollitur per inæqualitatem menſtruam motus nodorum (ut ſupra diximus) ideoque in calculo latitudinis illius negligi poteſt.

Scholium.

Hiſce motuum lunarium computationibus oſtendere volui, quod motus lunares per theoriam gravitatis a cauſis ſuis computari poſſint. Per eandem theoriam inveni præterea quod æquatio annua

 medii

medii motus lunæ oriatur a varia dilatatione orbis lunæ per vim ſolis, juxta Corol. 6. Prop. LXVI. Lib. I. Hæc vis in perigæo ſolis major eſt, & orbem lunæ dilatat; in apogæo ejus minor eſt, & orbem illum contrahi permittit. In orbe dilatato luna tardius revolvitur, in contracto citius; & æquatio annua, per quam hæc inæqualitas compenſatur, in apogæo & perigæo ſolis nulla eſt, in mediocri ſolis a terra diſtantia ad 11′. 50″ circiter aſcendit, in aliis locis æquationi centri ſolis proportionalis eſt; & additur medio motui lunæ ubi terra pergit ab aphelio ſuo ad perihelium, & in oppoſita orbis parte ſubducitur. Aſſumendo radium orbis magni 1000 & eccentricitatem terræ $16\frac{7}{8}$, hæc æquatio, ubi maxima eſt, per theoriam gravitatis prodiit 11′. 49″. Sed eccentricitas terræ paulo major eſſe videtur, & aucta eccentricitate hæc æquatio augeri debet in eadem ratione. Sit eccentricitas $16\frac{11}{12}$, & æquatio maxima erit 11′. 51″.

Inveni etiam quod in perihelio terræ, propter majorem vim ſolis, apogæum & nodi lunæ velocius moventur quam in aphelio ejus, idque in triplicata ratione diſtantiæ terræ a ſole inverſe. Et inde oriuntur æquationes annuæ horum motuum æquationi centri ſolis proportionales. Motus autem ſolis eſt in duplicata ratione diſtantiæ terræ a ſole inverſe, & maxima centri æquatio, quam hæc inæqualitas generat, eſt 1gr. 56′. 20″ prædictæ ſolis eccentricitati $16\frac{11}{12}$ congruens. Quod ſi motus ſolis eſſet in triplicata ratione diſtantiæ inverſe, hæc inæqualitas generaret æquationem maximam 2gr. 54′ 30″. Et propterea æquationes maximæ, quas inæqualitates motuum apogæi & nodorum lunæ generant, ſunt ad 2gr. 54′. 30″ ut motus medius diurnus apogæi, & motus medius diurnus nodorum lunæ ſunt ad motum medium diurnum ſolis. Unde prodit æquatio maxima medii motus apogæi 19′. 43″, & æquatio maxima medii motus nodorum 9′. 24″. Additur vero æquatio prior & ſubducitur poſterior, ubi terra pergit a perihelio ſuo ad aphelium: & contrarium fit in oppoſita orbis parte.

Per theoriam gravitatis conſtitit etiam quod actio ſolis in lunam paulo major ſit, ubi tranſverſa diameter orbis lunaris tranſit per ſolem, quam ubi eadem ad rectos eſt angulos cum linea terram & ſolem jungente: & propterea orbis lunaris paulo major eſt in priore caſu quam in poſteriore. Et hinc oritur alia æquatio motus medii lunaris,

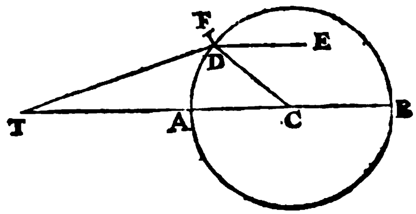
lunaris, pendens a ſitu apogæi lunæ ad ſolem, quæ quidem maxima eſt cum apogæum lunæ verſatur in octante cum ſole; & nulla cum illud ad quadraturas vel ſyzygias pervenit: & motui medio additur in tranſitu apogæi lunæ a ſolis quadratura ad ſyzygiam, & ſubducitur in tranſitu apogæi a ſyzygia ad quadraturam. Hæc æquatio, quam ſemeſtrem vocabo, in octantibus apogæi, quando maxima eſt, aſcendit ad 3′. 45″ circiter, quantum ex phænomenis colligere potui. Hæc eſt ejus quantitas in mediocri ſolis diſtantia a terra. Augetur vero ac diminuitur in triplicata ratione diſtantiæ ſolis inverſe, ideoque in maxima ſolis diſtantia eſt 3′. 34″, & in minima 3′. 56″ quamproxime: ubi vero apogæum lunæ ſitum eſt extra octantes, evadit minor; eſtque ad æquationem maximam, ut ſinus duplæ diſtantiæ apogæi lunæ a proxima ſyzygia vel quadratura ad radium.

Per eandem gravitatis theoriam actio ſolis in lunam paulo major eſt ubi linea recta per nodos lunæ ducta tranſit per ſolem, quam ubi linea illa ad rectos eſt angulos cum recta ſolem ac terram jungente. Et inde oritur alia medii motus lunaris æquatio, quam ſemeſtrem ſecundam vocabo, quæque maxima eſt ubi nodi in ſolis octantibus verſantur, & evaneſcit ubi ſunt in ſyzygiis vel quadraturis, & in aliis nodorum poſitionibus proportionalis eſt ſinui duplæ diſtantiæ nodi alterutrius a proxima ſyzygia aut quadratura: additur vero medio motui lunæ, ſi ſol diſtat a nodo ſibi proximo in antecedentia, ſubducitur ſi in conſequentia, & in octantibus, ubi maxima eſt, aſcendit ad 47″ in mediocri ſolis diſtantia a terra, uti ex theoria gravitatis colligo. In aliis ſolis diſtantiis hæc æquatio maxima in octantibus nodorum eſt reciproce ut cubus diſtantiæ ſolis a terra, ideoque in perigæo ſolis ad 49″ in apogæo ejus ad 45″ circiter aſcendit.

Per eandem gravitatis theoriam apogæum lunæ progreditur quam maxime ubi vel cum ſole conjungitur vel eidem opponitur, & regreditur ubi cum ſole quadraturam facit. Et eccentricitas fit maxima in priore caſu & minima in poſteriore, per Corol. 7, 8 & 9. Prop. LXVI. Lib. I. Et hæ inæqualitates per eadem Corollaria permagnæ ſunt, & æquationem principalem apogæi generant, quam ſemeſtrem vocabo. Et æquatio maxima ſemeſtris eſt 12gr. 18′ circiter, quantum ex obſervationibus colligere potui. *Horroxius* noſter lunam in ellipſi

De Mundi Systemate

ellipſi circum terram, in ejus umbilico inferiore conſtitutam, revolvi primus ſtatuit. *Halleius* centrum ellipſeos in epicyclo locavit, cujus centrum uniformiter revolvitur circum terram. Et ex motu in epicyclo oriuntur inæqualitates jam dictæ in progreſſu & regreſſu apogæi & quantitate eccentricitatis. Dividi intelligatur diſtantia mediocris lunæ a terra in partes 100000, & referat *T* terram & *TC* eccentricitatem mediocrem lunæ partium 5505. Producatur *TC* ad *B*, ut ſit *CB* ſinus æquationis maximæ ſemeſtris $12^{gr.}\ 18'$ ad radium *TC*, & circulus *BDA* centro *C*, intervallo *CB* deſcriptus erit epicyclus ille in quo centrum orbis lunaris locatur & ſecundum ordinem literarum *BDA* revolvitur. Capiatur angulus *BCD* æqualis duplo argumento annuo, ſeu duplæ diſtantiæ veri loci ſolis ab apogæo lunæ ſemel æquato, & erit *CTD* æquatio ſemeſtris apogæi lu-



næ & *TD* eccentricitas orbis ejus in apogæum ſecundo æquatum tendens. Habitis autem lunæ motu medio & apogæo & eccentricitate, ut & orbis axe majore partium 200000; ex his eruetur verus lunæ locus in orbe & diſtantia ejus a terra, idque per methodos notiſſimas.

In perihelio terræ, propter majorem vim ſolis, centrum orbis lunæ velocius movetur circum centrum *C* quam in aphelio, idque in triplicata ratione diſtantiæ terræ a ſole inverſe. Ob æquationem centri ſolis in argumento annuo comprehenſam, centrum orbis lunæ velocius movetur in epicyclo *BDA* in duplicata ratione diſtantiæ terræ a ſole inverſe. Ut idem adhuc velocius moveatur in ratione ſimplici diſtantiæ inverſe; ab orbis centro *D* agatur recta *DE* verſus apogæum lunæ, ſeu rectæ *TC* parallela, & capiatur angulus *EDF* æqualis exceſſui argumenti annui prædicti ſupra diſtantiam apogæi lunæ a perigæo ſolis in conſequentia; vel quod perinde eſt, capiatur

angulus

angulus CDF æqualis complemento anomaliæ veræ ſolis ad gradus 360. Et ſit DF ad DC ut dupla eccentricitas orbis magni ad diſtantiam mediocrem ſolis a terra, & motus medius diurnus ſolis ab apogæo lunæ ad motum medium diurnum ſolis ab apogæo proprio conjunctim, id eſt, ut $33\frac{7}{8}$ ad 1000 & 52′. 27″. 16‴ ad 59′. 8″. 10‴ conjunctim, ſive ut 3 ad 100. Et concipe centrum orbis lunæ locari in puncto F, & in epicyclo, cujus centrum eſt D, & radius DF, interea revolvi dum punctum D progreditur in circumferentia circuli $DABD$. Hac enim ratione velocitas, qua centrum orbis lunæ in linea quadam curva circum centrum C deſcripta movebitur, erit reciproce ut cubus diſtantiæ ſolis a terra quamproxime, ut oportet.

Computatio motus hujus difficilis eſt, ſed facilior reddetur per approximationem ſequentem. Si diſtantia mediocris lunæ a terra ſit partium 100000, & eccentricitas TC ſit partium 5505 ut ſupra: recta CB vel CD invenietur partium $1172\frac{3}{4}$, & recta DF partium $35\frac{1}{5}$. Et hæc recta ad diſtantiam TC ſubtendit angulum ad terram quem tranſlatio centri orbis a loco D ad locum F generat in motu centri hujus: & eadem recta duplicata in ſitu parallelo ad diſtantiam ſuperioris umbilici orbis lunæ a terra, ſubtendit eundem angulum, quem utique tranſlatio illa generat in motu umbilici, & ad diſtantiam lunæ a terra ſubtendit angulum quem eadem tranſlatio generat in motu lunæ, quique propterea æquatio centri ſecunda dici poteſt. Et hæc æquatio, in mediocri lunæ diſtantia a terra, eſt ut ſinus anguli, quem recta illa DF cum recta a puncto F ad lunam ducta continet quamproxime, & ubi maxima eſt evadit 2′. 25″. Angulus autem quem recta DF & recta a puncto F ad lunam ducta comprehendunt, invenitur vel ſubducendo angulum EDF ab anomalia media lunæ, vel addendo diſtantiam lunæ a ſole ad diſtantiam apogæi lunæ ab apogæo ſolis. Et ut radius eſt ad ſinum anguli ſic inventi, ita 2′. 25″. ſunt ad æquationem centri ſecundam, addendam, ſi ſumma illa ſit minor ſemicirculo, ſubducendam ſi major. Sic habebitur ejus longitudo in ipſis luminarium ſyzygiis.

Cum atmoſphæra terræ ad uſque altitudinem milliarium 35 vel 40 refringat lucem ſolis, & refringendo ſpargat eandem in umbram terræ, & ſpargendo lucem in confinio umbræ dilatet umbram: ad diametrum umbræ, quæ per parallaxim prodit, addo minutum unum primum in eclipſibus lunæ, vel minutum unum cum triente.

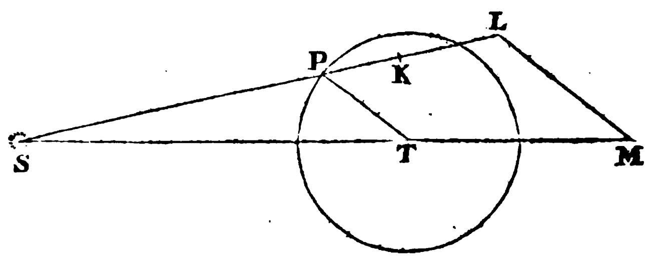
Theo-

Theoria vero lunæ primo in ſyzygiis, deinde in quadraturis, & ultimo in octantibus per phænomena examinari & ſtabiliri debet. Et opus hocce aggreſſurus motus medios ſolis & lunæ ad tempus meridianum in obſervatorio regio *Grenovicenſi*, die ultimo menſis *Decembris* anni 1700. ſt. vet. non incommode ſequentes adhibebit: nempe motum medium ſolis ♑ 20$^{gr.}$ 43′. 40″, & apogæi ejus ♋ 7$^{gr.}$ 44′. 30″, & motum medium lunæ ♒ 15$^{gr.}$ 21′. 00″, & apogæi ejus ♓ 8$^{gr.}$ 20′. 00″, & nodi aſcendentis ♌ 27$^{gr.}$ 24′. 20″; & differentiam meridianorum obſervatorii hujus & obſervatorii regii *Pariſienſis* 0$^{hor.}$ 9$^{min.}$ 20$^{sec.}$ motus autem medii lunæ & apogæi ejus nondum ſatis accurate habentur.

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XVII.

Invenire vim ſolis ad mare movendum.

Solis vis *ML* ſeu *PT*, in quadraturis lunaribus, ad perturbandos motus lunares erat (per Prop. xxv. hujus) ad vim gravitatis apud nos, ut 1 ad 638092,6. Et vis *TM*—*LM* ſeu 2 *PK* in ſyzygiis lunaribus eſt duplo major. Hæ autem vires, ſi deſcendatur ad ſuperficiem terræ, diminuuntur in ratione diſtantiarum a centro terræ, id eſt, in ratione 60½ ad 1; ideoque vis prior in ſuperficie terræ eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 38604600. Hac vi mare deprimitur in locis, quæ 90 gradibus diſtant a ſole. Vi altera, quæ duplo major eſt, mare elevatur & ſub ſole & in regione ſoli oppoſita. Summa



virium eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200. Et quoniam vis eadem eundem ciet motum, ſive ea deprimat aquam in regionibus quæ

90

90 gradibus diſtant a ſole, ſive elevet eandem in regionibus ſub ſole & ſoli oppoſitis, hæc ſumma erit tota ſolis vis ad mare agitandum; & eundem habebit effectum, ac ſi tota in regionibus ſub ſole & ſoli oppoſitis mare elevaret, in regionibus autem quæ 90 gradibus diſtant a ſole nil ageret.

Hæc eſt vis ſolis ad mare ciendum in loco quovis dato, ubi ſol tam in vertice loci verſatur quam in mediocri ſua diſtantia a terra. In aliis ſolis poſitionibus vis ad mare attollendum eſt ut ſinus verſus duplæ altitudinis ſolis ſupra horizontem loci directe & cubus diſtantiæ ſolis a terra inverſe.

Corol. Cum vis centrifuga partium terræ a diurno terræ motu oriunda, quæ eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 289, efficiat ut altitudo aquæ ſub æquatore ſuperet ejus altitudinem ſub polis menſura pedum *Pariſienſium* 85472, ut ſupra in prop. xix; vis ſolaris de qua egimus, cum ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, atque ideo ad vim illam centrifugam ut 289 ad 12868200 ſeu 1 ad 44527, efficiet ut altitudo aquæ in regionibus ſub ſole & ſoli oppoſitis ſuperet altitudinem ejus in locis, quæ 90 gradibus diſtant a ſole, menſura tantum pedis unius *Pariſienſis* & digitorum undecim cum triceſima parte digiti. Eſt enim hæc menſura ad menſuram pedum 85472 ut 1 ad 44527.

PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XVIII.

Invenire vim lunæ ad mare movendum.

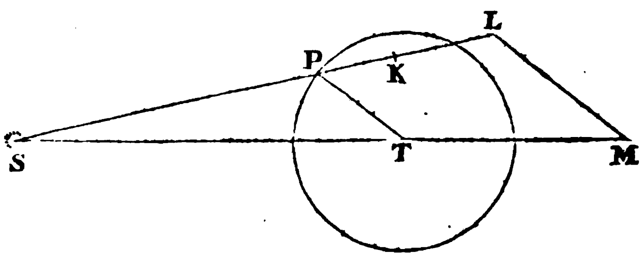
Vis lunæ ad mare movendum colligenda eſt ex ejus proportione ad vim ſolis, & hæc proportio colligenda eſt ex proportione motuum maris, qui ab his viribus oriuntur. Ante oſtium fluvii *Avonæ* ad lapidem tertium infra *Briſtolium*, tempore verno & autumnali totus aquæ aſcenſus in conjunctione & oppoſitione luminarium, obſervante *Samuele Sturmio*, eſt pedum plus minus 45, in quadraturis autem eſt pedum tantum 25. Altitudo prior ex ſumma virium, poſterior ex earundem differentia oritur. Solis igitur & lunæ in æquatore verſantium & mediocriter a terra diſtantium ſunto vires S & L, & erit L+S ad L−S ut 45 ad 25, ſeu 9 ad 5.

Theoria vero lunæ primo in ſyzygiis, deinde in quadraturis, & ultimo in octantibus per phænomena examinari & ſtabiliri debet. Et opus hocce aggreſſurus motus medios ſolis & lunæ ad tempus meridianum in obſervatorio regio *Grenovicenſi*, die ultimo menſis *Decembris* anni 1700. ſt. vet. non incommode ſequentes adhibebit: nempe motum medium ſolis ♑ $20^{gr.}$ 43′. 40″, & apogæi ejus ♋ $7^{gr.}$ 44′. 30″, & motum medium lunæ ♒ $15^{gr.}$ 21′. 00″, & apogæi ejus ♓ $8^{gr.}$ 20′. 00″, & nodi aſcendentis ♌ $27^{gr.}$ 24′. 20″; & differentiam meridianorum obſervatorii hujus & obſervatorii regii *Pariſienſis* $0^{hor.}$ $9^{min.}$ $20^{ſec.}$ motus autem medii lunæ & apogæi ejus nondum ſatis accurate habentur.

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XVII.

Invenire vim ſolis ad mare movendum.

Solis vis *ML* ſeu *PT*, in quadraturis lunaribus, ad perturbandos motus lunares erat (per Prop. XXV. hujus) ad vim gravitatis apud nos, ut 1 ad 638092,6. Et vis *TM—LM* ſeu 2 *PK* in ſyzygiis lunaribus eſt duplo major. Hæ autem vires, ſi deſcendatur ad ſuperficiem terræ, diminuuntur in ratione diſtantiarum a centro terræ, id eſt, in ratione $60\frac{1}{2}$ ad 1; ideoque vis prior in ſuperficie terræ eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 38604600. Hac vi mare deprimitur in locis, quæ 90 gradibus diſtant a ſole. Vi altera, quæ duplo major eſt, mare elevatur & ſub ſole & in regione ſoli oppoſita. Summa



virium eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200. Et quoniam vis eadem eundem ciet motum, ſive ea deprimat aquam in regionibus quæ

90

90 gradibus diſtant a ſole, ſive elevet eandem in regionibus ſub ſole & ſoli oppoſitis, hæc ſumma erit tota ſolis vis ad mare agitandum; & eundem habebit effectum, ac ſi tota in regionibus ſub ſole & ſoli oppoſitis mare elevaret, in regionibus autem quæ 90 gradibus diſtant a ſole nil ageret.

Hæc eſt vis ſolis ad mare ciendum in loco quovis dato, ubi ſol tam in vertice loci verſatur quam in mediocri ſua diſtantia a terra. In aliis ſolis poſitionibus vis ad mare attollendum eſt ut ſinus verſus duplæ altitudinis ſolis ſupra horizontem loci directe & cubus diſtantiæ ſolis a terra inverſe.

Corol. Cum vis centrifuga partium terræ a diurno terræ motu oriunda, quæ eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 289, efficiat ut altitudo aquæ ſub æquatore ſuperet ejus altitudinem ſub polis menſura pedum *Pariſienſium* 85472, ut ſupra in prop. xix; vis ſolaris de qua egimus, cum ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, atque ideo ad vim illam centrifugam ut 289 ad 12868200 ſeu 1 ad 44527, efficiet ut altitudo aquæ in regionibus ſub ſole & ſoli oppoſitis ſuperet altitudinem ejus in locis, quæ 90 gradibus diſtant a ſole, menſura tantum pedis unius *Pariſienſis* & digitorum undecim cum triceſima parte digiti. Eſt enim hæc menſura ad menſuram pedum 85472 ut 1 ad 44527.

PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XVIII.

Invenire vim lunæ ad mare movendum.

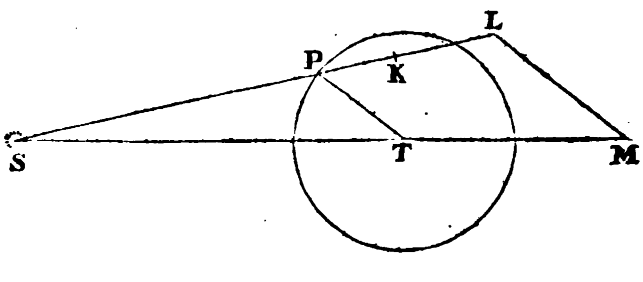
Vis lunæ ad mare movendum colligenda eſt ex ejus proportione ad vim ſolis, & hæc proportio colligenda eſt ex proportione motuum maris, qui ab his viribus oriuntur. Ante oſtium fluvii *Avonæ* ad lapidem tertium infra *Briſtolium*, tempore verno & autumnali totus aquæ aſcenſus in conjunctione & oppoſitione luminarium, obſervante *Samuele Sturmio*, eſt pedum plus minus 45, in quadraturis autem eſt pedum tantum 25. Altitudo prior ex ſumma virium, poſterior ex earundem differentia oritur. Solis igitur & lunæ in æquatore verſantium & mediocriter a terra diſtantium ſunto vires S & L, & erit L+S ad L—S ut 45 ad 25, ſeu 9 ad 5.

Theoria vero lunæ primo in ſyzygiis, deinde in quadraturis, & ultimo in octantibus per phænomena examinari & ſtabiliri debet. Et opus hocce aggreſſurus motus medios ſolis & lunæ ad tempus meridianum in obſervatorio regio *Grenovicenſi*, die ultimo menſis *Decembris* anni 1700. ſt. vet. non incommode ſequentes adhibebit: nempe motum medium ſolis ♑ 20gr. 43′. 40″, & apogæi ejus ♋ 7gr. 44′. 30″, & motum medium lunæ ♒ 15gr. 21′. 00″, & apogæi ejus ♓ 8gr. 20′. 00″, & nodi aſcendentis ♌ 27gr. 24′. 20″; & differentiam meridianorum obſervatorii hujus & obſervatorii regii *Pariſienſis* 0hor. 9min. 20ſec. motus autem medii lunæ & apogæi ejus nondum ſatis accurate habentur.

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XVII.

Invenire vim ſolis ad mare movendum.

Solis vis *ML* ſeu *PT*, in quadraturis lunaribus, ad perturbandos motus lunares erat (per Prop. xxv. hujus) ad vim gravitatis apud nos, ut 1 ad 638092,6. Et vis *TM*—*LM* ſeu 2 *PK* in ſyzygiis lunaribus eſt duplo major. Hæ autem vires, ſi deſcendatur ad ſuperficiem terræ, diminuuntur in ratione diſtantiarum a centro terræ, id eſt, in ratione $60\frac{1}{2}$ ad 1; ideoque vis prior in ſuperficie terræ eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 38604600. Hac vi mare deprimitur in locis, quæ 90 gradibus diſtant a ſole. Vi altera, quæ duplo major eſt, mare elevatur & ſub ſole & in regione ſoli oppoſita. Summa



virium eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200. Et quoniam vis eadem eundem ciet motum, ſive ea deprimat aquam in regionibus quæ

90

90 gradibus diſtant a ſole, ſive elevet eandem in regionibus ſub ſole & ſoli oppoſitis, hæc ſumma erit tota ſolis vis ad mare agitandum; & eundem habebit effectum, ac ſi tota in regionibus ſub ſole & ſoli oppoſitis mare elevaret, in regionibus autem quæ 90 gradibus diſtant a ſole nil ageret.

Hæc eſt vis ſolis ad mare ciendum in loco quovis dato, ubi ſol tam in vertice loci verſatur quam in mediocri ſua diſtantia a terra. In aliis ſolis poſitionibus vis ad mare attollendum eſt ut ſinus verſus duplæ altitudinis ſolis ſupra horizontem loci directe & cubus diſtantiæ ſolis a terra inverſe.

Corol. Cum vis centrifuga partium terræ a diurno terræ motu oriunda, quæ eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 289, efficiat ut altitudo aquæ ſub æquatore ſuperet ejus altitudinem ſub polis menſura pedum *Pariſienſium* 85472, ut ſupra in prop. xix; vis ſolaris de qua egimus, cum ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, atque ideo ad vim illam centrifugam ut 289 ad 12868200 ſeu 1 ad 44527, efficiet ut altitudo aquæ in regionibus ſub ſole & ſoli oppoſitis ſuperet altitudinem ejus in locis, quæ 90 gradibus diſtant a ſole, menſura tantum pedis unius *Pariſienſis* & digitorum undecim cum triceſima parte digiti. Eſt enim hæc menſura ad menſuram pedum 85472 ut 1 ad 44527.

PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XVIII.

Invenire vim lunæ ad mare movendum.

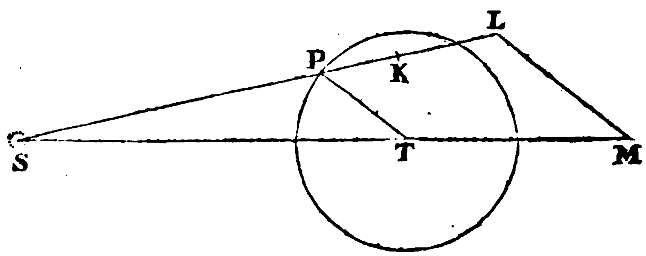
Vis lunæ ad mare movendum colligenda eſt ex ejus proportione ad vim ſolis, & hæc proportio colligenda eſt ex proportione motuum maris, qui ab his viribus oriuntur. Ante oſtium fluvii *Avonæ* ad lapidem tertium infra *Briſtolium*, tempore verno & autumnali totus aquæ aſcenſus in conjunctione & oppoſitione luminarium, obſervante *Samuele Sturmio*, eſt pedum plus minus 45, in quadraturis autem eſt pedum tantum 25. Altitudo prior ex ſumma virium, poſterior ex earundem differentia oritur. Solis igitur & lunæ in æquatore verſantium & mediocriter a terra diſtantium ſunto vires S & L, & erit L+S ad L—S ut 45 ad 25, ſeu 9 ad 5.

Theoria vero lunæ primo in ſyzygiis, deinde in quadraturis, & ultimo in octantibus per phænomena examinari & ſtabiliri debet. Et opus hocce aggreſſurus motus medios ſolis & lunæ ad tempus meridianum in obſervatorio regio *Grenovicenſi*, die ultimo menſis *Decembris* anni 1700. ſt. vet. non incommode ſequentes adhibebit: nempe motum medium ſolis ♑ $20^{gr.}\ 43'.\ 40''$, & apogæi ejus ♋ $7^{gr.}\ 44'.\ 30''$, & motum medium lunæ ♒ $15^{gr.}\ 21'.\ 00''$, & apogæi ejus ♓ $8^{gr.}\ 20'.\ 00''$, & nodi aſcendentis ☊ $27^{gr.}\ 24'.\ 20''$; & differentiam meridianorum obſervatorii hujus & obſervatorii regii *Pariſienſis* $0^{hor.}\ 9^{min.}\ 20^{sec.}$ motus autem medii lunæ & apogæi ejus nondum ſatis accurate habentur.

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XVII.

Invenire vim ſolis ad mare movendum.

Solis vis *ML* ſeu *PT*, in quadraturis lunaribus, ad perturbandos motus lunares erat (per Prop. xxv. hujus) ad vim gravitatis apud nos, ut 1 ad 638092,6. Et vis *TM*—*LM* ſeu 2 *PK* in ſyzygiis lunaribus eſt duplo major. Hæ autem vires, ſi deſcendatur ad ſuperficiem terræ, diminuuntur in ratione diſtantiarum a centro terræ, id eſt, in ratione $60\frac{1}{2}$ ad 1; ideoque vis prior in ſuperficie terræ eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 38604600. Hac vi mare deprimitur in locis, quæ 90 gradibus diſtant a ſole. Vi altera, quæ duplo major eſt, mare elevatur & ſub ſole & in regione ſoli oppoſita. Summa



virium eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200. Et quoniam vis eadem eundem ciet motum, ſive ea deprimat aquam in regionibus quæ

90

90 gradibus diſtant a ſole, ſive elevet eandem in regionibus ſub ſole & ſoli oppoſitis, hæc ſumma erit tota ſolis vis ad mare agitandum; & eundem habebit effectum, ac ſi tota in regionibus ſub ſole & ſoli oppoſitis mare elevaret, in regionibus autem quæ 90 gradibus diſtant a ſole nil ageret.

Hæc eſt vis ſolis ad mare ciendum in loco quovis dato, ubi ſol tam in vertice loci verſatur quam in mediocri ſua diſtantia a terra. In aliis ſolis poſitionibus vis ad mare attollendum eſt ut ſinus verſus duplæ altitudinis ſolis ſupra horizontem loci directe & cubus diſtantiæ ſolis a terra inverſe.

Corol. Cum vis centrifuga partium terræ a diurno terræ motu oriunda, quæ eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 289, efficiat ut altitudo aquæ ſub æquatore ſuperet ejus altitudinem ſub polis menſura pedum *Pariſienſium* 85472, ut ſupra in prop. xix; vis ſolaris de qua egimus, cum ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, atque ideo ad vim illam centrifugam ut 289 ad 12868200 ſeu 1 ad 44527, efficiet ut altitudo aquæ in regionibus ſub ſole & ſoli oppoſitis ſuperet altitudinem ejus in locis, quæ 90 gradibus diſtant a ſole, menſura tantum pedis unius *Pariſienſis* & digitorum undecim cum triceſima parte digiti. Eſt enim hæc menſura ad menſuram pedum 85472 ut 1 ad 44527.

PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XVIII.

Invenire vim lunæ ad mare movendum.

Vis lunæ ad mare movendum colligenda eſt ex ejus proportione ad vim ſolis, & hæc proportio colligenda eſt ex proportione motuum maris, qui ab his viribus oriuntur. Ante oſtium fluvii *Avonæ* ad lapidem tertium infra *Briſtolium*, tempore verno & autumnali totus aquæ aſcenſus in conjunctione & oppoſitione luminarium, obſervante *Samuele Sturmio*, eſt pedum plus minus 45, in quadraturis autem eſt pedum tantum 25. Altitudo prior ex ſumma virium, poſterior ex earundem differentia oritur. Solis igitur & lunæ in æquatore verſantium & mediocriter a terra diſtantium ſunto vires S & L, & erit L+S ad L—S ut 45 ad 25, ſeu 9 ad 5.

In portu *Plymuthi* æſtus maris ex obſervatione *Samuelis Colepreſſi* ad pedes plus minus ſexdecim altitudine mediocri attollitur, ac tempore verno & autumnali altitudo æſtus in ſyzygiis ſuperare poteſt altitudinem ejus in quadraturis pedibus plus ſeptem vel octo. Si maxima harum altitudinum differentia ſit pedum novem, erit $L+S$ ad $L-S$ ut $20\frac{1}{2}$ ad $11\frac{1}{2}$ ſeu 41 ad 23. Quæ proportio ſatis congruit cum priore. Ob magnitudinem æſtus in portu *Briſtoliæ*, obſervationibus *Sturmii* magis fidendum eſſe videtur, ideoque donec aliquid certius conſtiterit, proportionem 9 ad 5 uſurpabimus.

Cæterum ob aquarum reciprocos motus, æſtus maximi non incidunt in ipſas luminarium ſyzygias, ſed ſunt tertii a ſyzygiis ut dictum fuit, ſeu proxime ſequuntur tertium lunæ poſt ſyzygias appulſum ad meridianum loci, vel potius (ut a *Sturmio* notatur) ſunt tertii poſt diem novilunii vel plenilunii, ſeu poſt horam a novilunio vel plenilunio plus minus duodecimam, ideoque incidunt in horam a novilunio vel plenilunio plus minus quadrageſimam tertiam. Incidunt vero in hoc portu in horam ſeptimam circiter ab appulſu lunæ ad meridianum loci; ideoque proxime ſequuntur appulſum lunæ ad meridianum, ubi luna diſtat a ſole vel ab oppoſitione ſolis gradibus plus minus octodecim vel novemdecim in conſequentia. Æſtas & hyems maxime vigent, non in ipſis ſolſtitiis, ſed ubi ſol diſtat a ſolſtitiis decima circiter parte totius circuitus, ſeu gradibus plus minus 36 vel 37. Et ſimiliter maximus æſtus maris oritur ab appulſu lunæ ad meridianum loci, ubi luna diſtat a ſole decima circiter parte motus totius ab æſtu ad æſtum. Sit diſtantia illa graduum plus minus $18\frac{1}{2}$. Et vis ſolis in hac diſtantia lunæ a ſyzygiis & quadraturis, minor erit ad augendum & ad minuendum motum maris a vi lunæ oriundum, quam in ipſis ſyzygiis & quadraturis, in ratione radii ad ſinum complementi diſtantiæ hujus duplicatæ ſeu anguli graduum 37, hoc eſt, in ratione 10000000 ad 7986355. Ideoque in analogia ſuperiore pro S ſcribi debet 0,7986355 S.

Sed & vis lunæ in quadraturis, ob declinationem lunæ ab æquatore, diminui debet. Nam luna in quadraturis, vel potius in gradu $18\frac{1}{2}$ poſt quadraturas, in declinatione graduum plus minus 22. 13′ verſatur. Et luminaris ab æquatore declinantis vis ad mare mo-

vendum

vendum diminuitur in duplicata ratione ſinus complementi declinationis quamproxime. Et propterea vis lunæ in his quadraturis eſt tantum 0,8570327 L. Eſt igitur L+0,7986355S ad 0,8570327 L—0,7986355S ut 9 ad 5.

Præterea diametri orbis, in quo luna ſine eccentricitate moveri deberet, ſunt ad invicem ut 69 ad 70; ideoque diſtantia lunæ a terra in ſyzygiis eſt ad diſtantiam ejus in quadraturis ut 69 ad 70, cæteris paribus. Et diſtantiæ ejus in gradu $18\frac{1}{2}$ a ſyzygiis, ubi æſtus maximus generatur, & in gradu $18\frac{1}{2}$ a quadraturis, ubi æſtus minimus generatur, ſunt ad mediocrem ejus diſtantiam ut 69,098747 & 69,897345 ad $69\frac{1}{2}$. Vires autem lunæ ad mare movendum ſunt in triplicata ratione diſtantiarum inverſe, ideoque vires in maxima & minima harum diſtantiarum ſunt ad vim in mediocri diſtantia ut 0,9830427 & 1,017522 ad 1. Unde fit 1,017522L +0,7986355 S ad 0,9830427 × 0,8570327 L—0,7986355 S ut 9 ad 5. Et S ad L ut 1 ad 4,4815. Itaque cum vis ſolis ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, vis lunæ erit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400.

Corol. 1. Cum aqua vi ſolis agitata aſcendat ad altitudinem pedis unius & undecim digitorum cum triceſima parte digiti, eadem vi lunæ aſcendet ad altitudinem octo pedum & digitorum $7\frac{5}{22}$, & vi utraque ad altitudinem pedum decem cum ſemiſſe, & ubi luna eſt in perigæo ad altitudinem pedum duodecim cum ſemiſſe & ultra, præſertim ubi æſtus ventis ſpirantibus adjuvatur. Tanta autem vis ad omnes maris motus excitandos abunde ſufficit, & quantitati motuum probe reſpondet. Nam in maribus quæ ab oriente in occidentem late patent, uti in mari *Pacifico*, & maris *Atlantici* & *Æthiopici* partibus extra tropicos, aqua attolli ſolet ad altitudinem pedum ſex, novem, duodecim vel quindecim. In mari autem *Pacifico*, quod profundius eſt & latius patet, æſtus dicuntur eſſe majores quam in *Atlantico* & *Æthiopico*. Etenim ut plenus ſit æſtus, latitudo maris ab oriente in occidentem non minor eſſe debet quam graduum nonaginta. In mari *Æthiopico* aſcenſus aquæ intra tropicos minor eſt quam in zonis temperatis, propter anguſtiam maris inter *Africam* & auſtralem partem *Americæ*. In medio mari aqua nequit aſcendere, niſi ad littus utrumque & orientale & occidentale ſimul deſcendat:

cum tamen vicibus alternis ad littora illa in maribus noſtris anguſtis deſcendere debeat. Ea de cauſa fluxus & refluxus in inſulis, quæ a littoribus longiſſime abſunt, perexiguus eſſet ſolet. In portubus quibuſdam, ubi aqua cum impetu magno per loca vadoſa, ad ſinus alternis vicibus implendos & evacuandos, influere & effluere cogitur, fluxus & refluxus debent eſſe ſolito majores, uti ad *Plymuthum* & pontem *Chepſtowæ* in *Anglia*; ad montes *S. Michaelis* & urbem *Abrincatuorum* (vulgo *Auranches*) in *Normannia*; ad *Cambaiam* & *Pegu* in *India* orientali. His in locis mare, magna cum velocitate accedendo & recedendo, littora nunc inundat nunc arida relinquit ad multa millaria. Neque impetus influendi & remeandi prius frangi poteſt, quam aqua attollitur vel deprimitur ad pedes 30, 40, vel 50 & amplius. Et par eſt ratio fretorum oblongorum & vadoſorum, uti *Magellanici* & ejus quo *Anglia* circundatur. Æſtus in hujuſmodi portubus & fretis per impetum curſus & recurſus ſupra modum augetur. Ad littora vero quæ deſcenſu præcipiti ad mare profundum & apertum ſpectant, ubi aqua ſine impetu effluendi & remeandi attolli & ſubſidere poteſt, magnitudo æſtus reſpondet viribus ſolis & lunæ.

Corol. 2. Cum vis lunæ ad mare movendum ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400, perſpicuum eſt quod vis illa ſit longe minor quam quæ vel in experimentis pendulorum, vel in ſtaticis aut hydroſtaticis quibuſcunque ſentiri poſſit. In æſtu ſolo marino hæc vis ſenſibilem edit effectum.

Corol. 3. Quoniam vis lunæ ad mare movendum eſt ad ſolis vim conſimilem ut 4,4815 ad 1, & vires illæ (per corol. 14. prop. LXVI. lib. I.) ſunt ut denſitates corporum lunæ & ſolis & cubi diametrorum apparentium conjunctim; denſitas lunæ erit ad denſitatem ſolis ut 4,4815 ad 1 directe, & cubus diametri lunæ ad cubum diametri ſolis inverſe: id eſt (cum diametri mediocres apparentes lunæ & ſolis ſint 31′. 16″½ & 32′. 12″) ut 4891 ad 1000. Denſitas autem ſolis erat ad denſitatem terræ ut 1000 ad 4000; & propterea denſitas lunæ eſt ad denſitatem terræ ut 4891 ad 4000 ſeu 11 ad 9. Eſt igitur corpus lunæ denſius & magis terreſtre quam terra noſtra.

Corol.

Corol. 4. Et cum vera diameter lunæ ex obſervationibus aſtronomicis ſit ad veram diametrum terræ ut 100 ad 365; erit maſſa lunæ ad maſſam terræ ut 1 ad 39,788.

Corol. 5. Et gravitas acceleratrix in ſuperficie lunæ erit quaſi triplo minor quam gravitas acceleratrix in ſuperficie terræ.

Corol. 6. Et diſtantia centri lunæ a centro terræ erit ad diſtantiam centri lunæ a communi gravitatis centro terræ & lunæ, ut 40,788 ad 39,788.

Corol. 7. Et mediocris diſtantia centri lunæ a centro terræ in octantibus lunæ erit ſemidiametrorum maximarum terræ $60\frac{2}{5}$ quamproxime. Nam terræ ſemidiameter maxima fuit pedum *Pariſienſium* 19658600, & mediocris diſtantia centrorum terræ & lunæ, ex hujuſmodi diametris $60\frac{2}{5}$ conſtans, æqualis eſt pedibus 1187379440. Et hæc diſtantia (per corollarium ſuperius) eſt ad diſtantiam centri lunæ a communi gravitatis centro terræ & lunæ, ut 40,788 ad 39,788: ideoque diſtantia poſterior eſt pedum 1158268534. Et cum luna revolvatur, reſpectu fixarum, diebus 27, horis 7, & minutis primis $43\frac{4}{5}$; ſinus verſus anguli, quem luna tempore minuti unius primi deſcribit, eſt 12752341, exiſtente radio 1000,000000,000000. Et ut radius eſt ad hunc ſinum verſum, ita ſunt pedes 1158268534 ad pedes 14,7706353. Luna igitur vi illa, qua retinetur in orbe, cadendo in terram, tempore minuti unius primi deſcribet pedes 14,7706353. Et augendo hanc vim in ratione $178\frac{29}{40}$ ad $177\frac{29}{40}$, habebitur vis tota gravitatis in orbe lunæ per Corol. Prop. III. Et hac vi luna cadendo tempore minuti unius primi deſcribet pedes 14,8538067. Et ad ſexageſimam partem diſtantiæ lunæ a centro terræ, id eſt ad diſtantiam pedum 197896573 a centro terræ, corpus grave tempore minuti unius ſecundi cadendo deſcribet etiam pedes 14,8538067. Ideoque ad diſtantiam pedum 19615800, quæ ſunt terræ ſemidiameter mediocris, grave cadendo deſcribet pedes 15,11175, ſeu pedes 15, dig. 1, & lin. $4\frac{1}{11}$. Hic erit deſcenſus corporum in latitudine graduum 45. Et per tabulam præcedentem in prop. xx. deſcriptam, deſcenſus erit paulo major in latitudine *Lutetiæ Pariſiorum* exiſtente exceſſu quaſi $\frac{2}{3}$ partium lineæ. Gravia igitur per hoc computum in latitudine *Lutetiæ* cadendo in vacuo deſcribent tempore unius ſecundi pedes *Pariſienſes* 15, dig. 1, & lin. $4\frac{25}{33}$ circiter. Et ſi gravitas

tas minuatur auferendo vim centrifugam, quæ oritur a motu diurno terræ in illa latitudine; gravia ibi cadendo deſcribent tempore minuti unius ſecundi pedes 15, dig. 1, & lin. $1\frac{1}{9}$. Et hac velocitate gravia cadere in latitudine *Lutetiæ* ſupra oſtenſum eſt ad prop. IV, & XIX.

Corol. 8. Diſtantia mediocris centrorum terræ & lunæ in ſyzygiis lunæ eſt ſexaginta ſemidiametrorum maximarum terræ, dempta triceſima parte ſemidiametri circiter. Et in quadraturis lunæ diſtantia mediocris eorundem centrorum eſt $60\frac{5}{9}$ ſemidiametrorum terræ. Nam hæ duæ diſtantiæ ſunt ad diſtantiam mediocrem lunæ in octantibus ut 69 & 70 ad $69\frac{1}{2}$ per prop. XXVIII.

Corol. 9. Diſtantia mediocris centrorum terræ & lunæ in ſyzygiis lunæ eſt ſexaginta ſemidiametrorum mediocrium terræ cum decima parte ſemidiametri. Et in quadraturis lunæ diſtantia mediocris eorundem centrorum eſt ſexaginta & unius ſemidiametrorum mediocrium terræ, dempta triceſima parte ſemidiametri.

Corol. 10. In ſyzygiis lunæ parallaxis ejus horizontalis mediocris in latitudinibus graduum 0, 30, 38, 45, 52, 60, 90, eſt 57′. 20″, 57′. 16″, 57′. 14″, 57′. 12″, 57′. 10″, 57′. 8″, 57′. 4″ reſpective.

In his computationibus attractionem magneticam terræ non conſideravi, cujus utique quantitas perparva eſt & ignoratur. Siquando vero hæc attractio inveſtigari poterit, & menſuræ graduum in meridiano, ac longitudines pendulorum iſochronorum in diverſis parallelis, legeſque motuum maris, & parallaxis lunæ cum diametris apparentibus ſolis & lunæ ex phænomenis accuratius determinatæ fuerint: licebit calculum hunc omnem accuratius repetere.

PROPOSITIO XXXVIII. PROBLEMA XIX.

Invenire figuram corporis lunæ.

Si corpus lunare fluidum eſſet ad inſtar maris noſtri, vis terræ ad fluidum illud in partibus & citimis & ultimis elevandum eſſet ad vim lunæ, qua mare noſtrum in partibus & ſub luna & lunæ oppoſitis attollitur, ut gravitas acceleratrix lunæ in terram ad gravitatem acceleratricem terræ in lunam, & diameter lunæ ad diametrum terræ conjunctim;

conjunctim; id eſt, ut 39,788 ad 1 & 100 ad 365 conjunctim, ſeu 1081 ad 100. Unde cum mare noſtrum vi lunæ attollatur ad pedes $8\frac{3}{5}$, fluidum lunare vi terræ attolli deberet ad pedes 93. Eaque de cauſa figura lunæ ſphærois eſſet, cujus maxima diameter producta tranſiret per centrum terræ, & ſuperaret diametros perpendiculares exceſſu pedum 186. Talem igitur figuram luna affectat, eamque ſub initio induere debuit. *Q. E. I.*

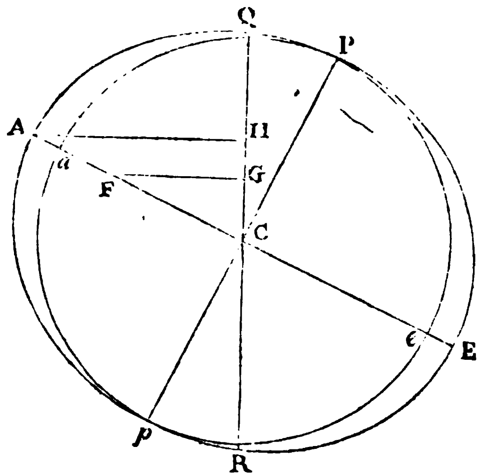
Corol. Inde vero fit ut eadem ſemper lunæ facies in terram obvertatur. In alio enim ſitu corpus lunare quieſcere non poteſt, ſed ad hunc ſitum oſcillando ſemper redibit. Attamen oſcillationes, ob parvitatem virium agitantium, eſſent longe tardiſſimæ: adeo ut facies illa, quæ terram ſemper reſpicere deberet, poſſit alterum orbis lunaris umbilicum (ob rationem in prop. xvii allatam) reſpicere, neque ſtatim abinde retrahi & in terram converti.

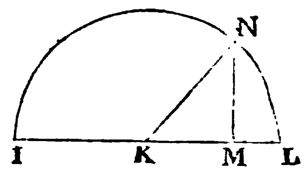
LEMMA I.

Si APEp *terram deſignet uniformiter denſam, centroque* C *&* *polis* P, p *&* *æquatore* AE *delineatam; &* *ſi centro* C *radio* CP *deſcribi intelligatur ſphæra* Pape; *ſit autem* QR *planum, cui recta a centro ſolis ad centrum terræ ducta normaliter inſiſtit; &* *terræ totius exterioris* PapAPepE, *quæ ſphæra modo deſcripta altior eſt, particulæ ſingulæ conentur recedere hinc inde a plano* QR, *ſitque conatus particulæ cujuſque ut ejuſdem diſtantia a plano: Dico primo, quod tota particularum omnium in æquatoris circulo* AE, *extra globum uniformiter per totum circuitum in morem annuli diſpoſitarum, vis &* *efficacia ad terram circum centrum ejus rotandam, ſit ad totam particularum totidem in æquatoris puncto* A, *quod a plano* QR *maxime diſtat, conſiſtentium vim &* *efficaciam, ad terram conſimili motu circulari circum centrum ejus movendam, ut unum ad duo. Et motus iſte circularis circum axem, in communi ſectione æquatoris &* *plani* QR *jacentem, peragetur.*

Nam

Nam centro *K* diametro *IL* deſcribatur ſemicirculus *INLK.* Dividi intelligatur ſemicircumferentia *INL* in partes innumeras æquales, & a partibus ſingulis *N* ad diametrum *IL* demittantur ſinus *NM.* Et ſumma quadratorum ex ſinibus omnibus *NM* æqualis erit ſummæ quadratorum ex ſinibus *KM*, & ſumma utraque æqualis erit ſummæ quadratorum ex totidem ſemidiametris *KN*; ideoque ſumma quadratorum ex omnibus *NM* erit duplo minor quam ſumma quadratorum ex totidem ſemidiametris *KN.*





Jam dividatur perimeter circuli *AE* in particulas totidem æquales, & ab earum unaquaque *F* ad planum *QR* demittatur perpendiculum *FG*, ut & a puncto *A* perpendiculum *AH.* Et vis, qua particula *F* recedit a plano *QR*, erit ut perpendiculum illud *FG* per hypotheſin, & hæc vis ducta in diſtantiam *CG* erit efficacia particulæ *F* ad terram circum centrum ejus convertendam. Ideoque efficacia particulæ in loco *F*, erit ad efficaciam particulæ in loco *A*, ut $FG \times GC$ ad $AH \times HC$, hoc eſt, ut *FCq* ad *ACq*; & propterea efficacia tota particularum omnium in locis ſuis *F* erit ad efficaciam particularum totidem in loco *A*, ut ſumma omnium *FCq* ad ſummam totidem *ACq*, hoc eſt (per jam demonſtrata) ut unum ad duo. *Q. E. D.*

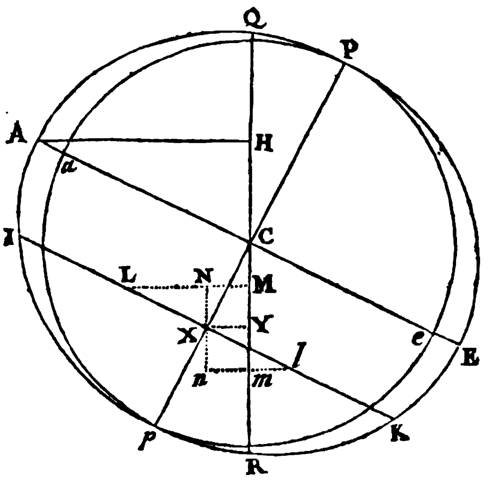
Et quoniam particulæ agunt recedendo perpendiculariter a plano *QR*, idque æqualiter ab utraque parte hujus plani: eædem convertent

tent circumferentiam circuli æquatoris, eique inhærentem terram, circum axem tam in plano illo *QR* quam in plano æquatoris jacentem.

LEMMA II.

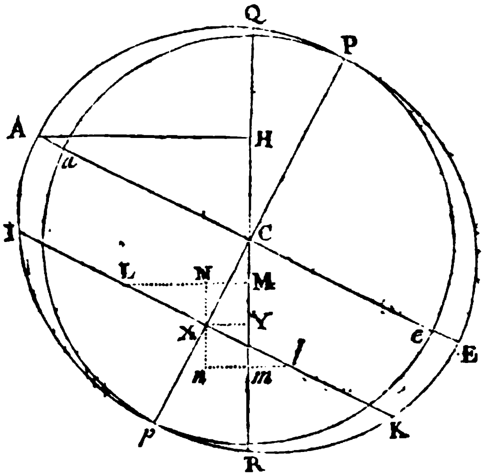
Iiſdem poſitis: dico ſecundo quod vis & efficacia tota particularum omnium extra globum undique ſitarum, ad terram circum axem eundem rotandam, ſit ad vim totam particularum totidem, in æquatoris circulo AE *uniformiter per totum circuitum in morem annuli diſpoſitarum, ad terram conſimili motu circulari movendam, ut duo ad quinque.*

Sit enim *IK* circulus quilibet minor æquatori *AE* parallelus, ſintque *L*, *l* particulæ duæ quævis æquales in hoc circulo extra globum *Pape* ſitæ. Et ſi in planum *QR*, quod radio in ſolem ducto perpendiculare eſt, demittantur perpendicula *LM*, *lm*: vires totæ, quibus particulæ illæ fugiunt planum *QR*, proportionales erunt perpendiculis illis *LM*, *lm*. Sit autem recta *Ll* plano *Pape* parallela &



biſecetur eadem in *X*, & per punctum *X* agatur *Nn*, quæ parallela ſit plano *QR* & perpendiculis *LM*, *lm* occurrat in *N* ac *n*, & in planum *QR* demittatur perpendiculum *XY*. Et particularum *L* & *l* vires contrariæ, ad terram in contrarias partes rotandam, ſunt ut $LM \times MC$ & $lm \times mC$, hoc eſt, ut $LN \times MC + NM \times MC$ & ln

$\times mC - nm \times mC$, ſeu $LN \times MC + NM \times MC$ & $LN \times mC - NM \times mC$: & harum differentia $LN \times Mm - NM \times \overline{MC + mC}$ eſt vis particularum ambarum ſimul ſumptarum ad terram rotandam. Hujus differentiæ pars affirmativa $LN \times Mm$ ſeu $2\, LN \times NX$ eſt ad particularum duarum ejuſdem magnitudinis in A conſiſtentium vim $2\, AH \times HC$, ut LXq ad ACq. Et pars negativa $NM \times \overline{MC + mC}$ ſeu $2\, XY \times CY$ ad particularum earundem in A conſiſtentium vim



$2\, AH \times HC$, ut CXq ad ACq. Ac proinde partium differentia, id eſt, particularum duarum L & l ſimul ſumptarum vis ad terram rotandam eſt ad vim particularum duarum iiſdem æqualium & in loco A conſiſtentium ad terram itidem rotandam, ut $LXq - CXq$ ad ACq. Sed ſi circuli IK circumferentia IK dividatur in particulas innumeras æquales L, erunt omnes LXq ad totidem IXq ut 1 ad 2 (per lem. 1.) atque ad totidem ACq, ut IXq ad $2\, ACq$; & totidem CXq ad totidem ACq ut $2\, CXq$ ad $2\, ACq$. Quare vires conjunctæ particularum omnium in circuitu circuli IK ſunt ad vires conjunctas particularum totidem in loco A, ut $IXq - 2\, CXq$ ad $2\, ACq$: & propterea (per lem. 1.) ad vires conjunctas particularum totidem in circuitu circuli AE, ut $IXq - 2\, CXq$ ad ACq.

Jam vero ſi ſphæræ diameter Pp dividatur in partes innumeras æquales, quibus inſiſtant circuli totidem IK; materia in perimetro circuli cujuſque IK erit ut IXq: ideoque vis materiæ illius ad terram

ram rotandam, erit ut IXq in $IXq - 2\,CXq$. Et vis materiæ ejuſdem, ſi in circuli AE perimetro conſiſteret, eſſet ut IXq in ACq. Et propterea vis particularum omnium materiæ totius, extra globum in perimetris circulorum omnium conſiſtentis, eſt ad vim particularum totidem in perimetro circuli maximi AE conſiſtentis, ut omnia IXq in $IXq - 2\,CXq$ ad totidem IXq in ACq, hoc eſt, ut omnia $ACq - CXq$ in $ACq - 3\,CXq$ ad totidem $ACq - CXq$ in ACq, id eſt, ut omnia $ACqq - 4\,ACq \times CXq + 3\,CXqq$ ad totidem $ACqq - ACq \times CXq$, hoc eſt, ut tota quantitas fluens, cujus fluxio eſt $ACqq - 4\,ACq \times CXq + 3\,CXqq$, ad totam quantitatem fluentem, cujus fluxio eſt $ACqq - ACq \times CXq$; ac proinde per methodum fluxionum, ut $ACqq \times CX - \frac{4}{3}\,ACq \times CX\,cub + \frac{3}{5}\,CXqc$ ad $ACqq \times CX - \frac{1}{3}\,ACq \times CX\,cub$, id eſt, ſi pro CX ſcribatur tota Cp vel AC, ut $\frac{4}{15}\,ACqc$ ad $\frac{2}{3}\,ACqc$. hoc eſt, ut duo ad quinque. *Q. E. D.*

LEMMA III.

Iiſdem poſitis: dico tertio quod motus terræ totius circum axem jam ante deſcriptum, ex motibus particularum omnium compoſitus, erit ad motum annuli prædicti circum axem eundem in ratione, quæ componitur ex ratione materiæ in terra ad materiam in annulo, & ratione trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli cujuſcunque ad duo quadrata ex diametro; id eſt, in ratione materiæ ad materiam & numeri 925275 ad numerum 1000000.

Eſt enim motus cylindri circum axem ſuum immotum revolventis ad motum ſphæræ inſcriptæ & ſimul revolventis, ut quælibet quatuor æqualia quadrata ad tres ex circulis ſibi inſcriptis: & motus cylindri ad motum annuli tenuiſſimi, ſphæram & cylindrum ad communem eorum contactum ambientis, ut duplum materiæ in cylindro ad triplum materiæ in annulo; & annuli motus iſte circum axem cylindri uniformiter continuatus, ad ejuſdem motum uniformem circum diametrum propriam, eodem tempore periodico factum, ut circumferentia circuli ad duplum diametri.

HYPOTHESIS II.

Si annulus prædictus terra omni reliqua ſublata, ſolus in orbe terræ, motu annuo circa ſolem ferretur, & interea circa axem ſuum, ad planum eclipticæ in angulo graduum 23½ inclinatum, motu diurno revolveretur: idem foret motus punctorum æquinoctialium, ſive annulus iſte fluidus eſſet, ſive is ex materia rigida & firma conſtaret.

PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XX.

Invenire præceſſionem æquinoctiorum.

Motus mediocris horarius nodorum lunæ in orbe circulari, ubi nodi ſunt in quadraturis, erat 16″. 35‴. 16ⁱᵛ. 36ᵛ, & hujus dimidium 8″. 17‴. 38ⁱᵛ. 18ᵛ. (ob rationes ſupra explicatas) eſt motus medius horarius nodorum in tali orbe; fitque anno toto ſidereo 20gr. 11′. 46″. Quoniam igitur nodi lunæ in tali orbe conficerent annuatim 20gr. 11′. 46″ in antecedentia; & ſi plures eſſent lunæ, *motus* nodorum cujuſque (per corol. 16. prop. LXVI. lib. I.) forent ut tempora periodica; ſi luna ſpatio diei ſiderei juxta ſuperficiem terræ revolveretur, motus annuus nodorum foret ad 20gr. 11′. 46″ ut *dies ſidereus* horarum 23. 56′ ad tempus periodicum lunæ dierum 27. 7 hor. 43′; id eſt, ut 1436 ad 39343. Et par eſt ratio nodorum annuli lunarum terram ambientis; ſive lunæ illæ ſe mutuo non contingant, ſive liqueſcant & in annulum continuum formentur, ſive denique annulus ille rigeſcat & inflexibilis reddatur.

Fingamus igitur quod annulus iſte, quoad quantitatem materiæ, æqualis ſit terræ omni *PapAPepE* quæ globo *Pape* ſuperior eſt; (*Vid. fig. pag.* 474.) & quoniam globus iſte eſt ad terram illam ſuperiorem ut *aCqu.* ad *ACqu.*—*aCqu.* id eſt (cum terræ ſemidiameter minor *PC* vel *aC* ſit ad ſemidiametrum majorem *AC* ut 229 ad 230) ut 52441 ad 459; ſi annulus iſte terram ſecundum æquatorem cingeret & uterque ſimul circa diametrum annuli revolveretur, motus annuli eſſet ad motum globi interioris (per hujus lem. III.) ut 459 ad 52441 & 1000000 ad 925275 conjunctim, hoc eſt, ut 4590 ad 485223; ideoque motus annuli eſſet ad ſummam motuum annuli ac globi, ut 4590 ad 489813. Unde ſi annulus globo adhæreat, & motum ſuum,

quo

quo ipſius nodi ſeu puncta æquinoctialia regrediuntur, cum globo communicet: motus qui reſtabit in annulo erit ad ipſius motum priorem, ut 4590 ad 489813; & propterea motus punctorum æquinoctialium diminuetur in eadem ratione. Erit igitur motus annuus punctorum æquinoctialium corporis ex annulo & globo compoſiti ad motum 20gr. 11'. 46'', ut 1436 ad 39343 & 4590 ad 489813 conjunctim, id eſt, ut 100 ad 292369. Vires autem quibus nodi lunarum (ut ſupra explicui) atque ideo quibus puncta æquinoctialia annuli regrediuntur (id eſt vires 3 *IT in fig. pag.* 437 & 438) ſunt in ſingulis particulis ut diſtantiæ particularum a plano *QR*, & his viribus particulæ illæ planum fugiunt; & propterea (per lem. II.) ſi materia annuli per totam globi ſuperficiem in morem figuræ *PapAPepE* ad ſuperiorem illam terræ partem conſtituendam ſpargeretur, vis & efficacia tota particularum omnium ad terram circa quamvis æquatoris diametrum rotandam, atque ideo ad movenda puncta æquinoctialia, evaderet minor quam prius in ratione 2 ad 5. Ideoque annuus æquinoctiorum regreſſus jam eſſet ad 20gr. 11'. 46'', ut 10 ad 73092: ac proinde fieret 9''. 56'''. 50iv.

Cæterum hic motus ob inclinationem plani æquatoris ad planum eclipticæ minuendus eſt, idque in ratione ſinus 91706 (qui ſinus eſt complementi graduum $23\frac{1}{2}$) ad radium 100000. Qua ratione motus iſte jam fiet 9''. 7'''. 20iv. Hæc eſt annua præceſſio æquinoctiorum a vi ſolis oriunda.

Vis autem lunæ ad mare movendum erat ad vim ſolis, ut 4,4815 ad 1 circiter. Et vis lunæ ad æquinoctia movenda eſt ad vim ſolis in eadem proportione. Indeque prodit annua æquinoctiorum præceſſio a vi lunæ oriunda 40''. 52'''. 52iv, ac tota præceſſio annua a vi utraque oriunda 50''. 00'''. 12iv. Et hic motus cum phænomenis congruit. Nam præceſſio æquinoctiorum ex obſervationibus aſtronimicis eſt annuatim minutorum ſecundorum plus minus quinquaginta.

Si altitudo terræ ad æquatorem ſuperet altitudinem ejus ad polos, milliaribus pluribus quam $17\frac{1}{6}$, materia ejus rarior erit ad circumferentiam quam ad centrum: & præceſſio æquinoctiorum ob altitudinem illam augeri, ob raritatem diminui debet.

Deſcripſimus jam ſyſtema ſolis, terræ, lunæ, & planetarum: ſupereſt ut de cometis nonnulla adjiciantur.

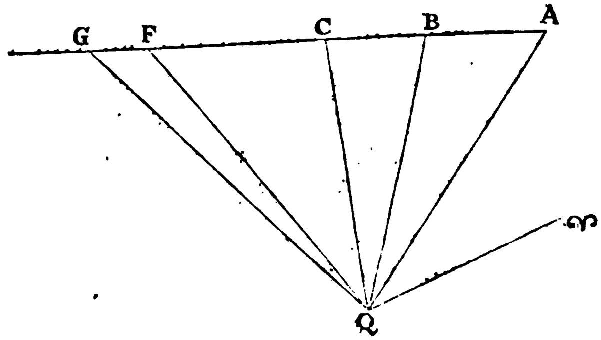
LEMMA.

De Mundi Systemate

LEMMA IV.

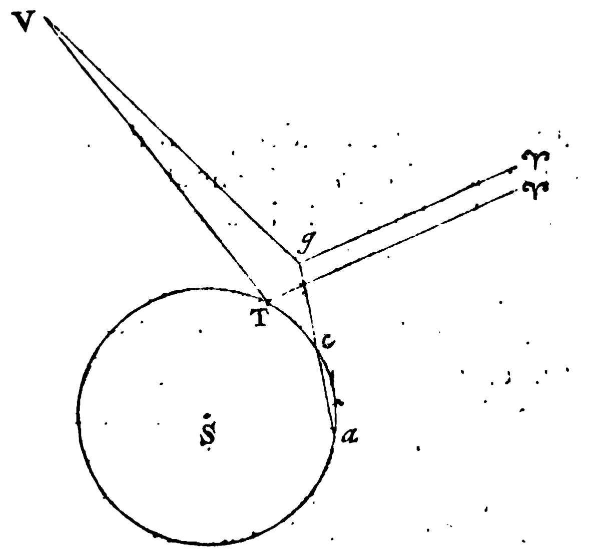
Cometas eſſe luna ſuperiores & in regione planetarum verſari.

Ut defectus parallaxeos diurnæ extulit cometas ſupra regiones ſublunares, ſic ex parallaxi annua convincitur eorum deſcenſus in regiones planetarum. Nam cometæ, qui progrediuntur ſecundum ordinem ſignorum, ſunt omnes ſub exitu apparitionis aut ſolito tardiores aut retrogradi, ſi terra eſt inter ipſos & ſolem; at juſto celeriores ſi terra vergit ad oppoſitionem. Et contra, qui pergunt contra ordinem ſignorum ſunt juſto celeriores in fine apparitionis, ſi terra verſatur inter ipſos & ſolem; & juſto tardiores vel retrogradi, ſi terra ſita eſt ad contrarias partes. Contingit hoc maxime ex motu terræ in vario ipſius ſitu, perinde ut fit in planetis, qui pro motu terræ vel conſpirante vel contrario nunc retrogradi ſunt, nunc tardius progredi videntur, nunc vero celerius. Si terra pergit ad eandem partem cum cometa, & motu angulari circa ſolem tanto celerius fertur, ut recta per terram & cometam perpetuo ducta convergat ad partes ultra cometam, cometa e terra ſpectatus ob motum ſuum tardiorem apparet eſſe retrogradus; ſin terra tardius fertur,

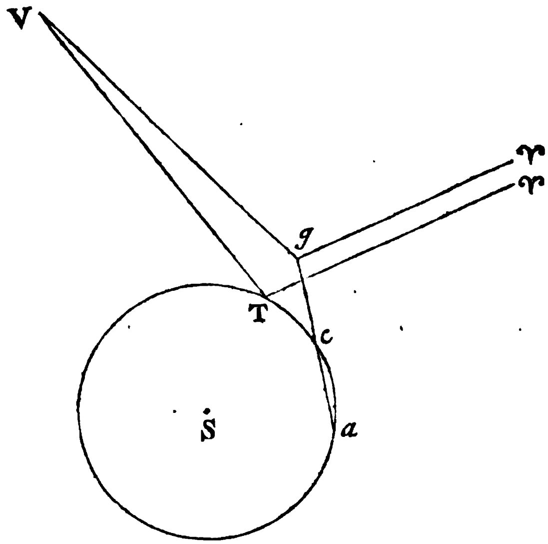


motus cometæ (detracto motu terræ) fit ſaltem tardior. At ſi terra pergit in contrarias partes, cometa exinde velocior apparet. Ex acceleratione autem vel retardatione vel motu retrogrado diſtantia cometæ in hunc modum colligitur. Sunto ♈*QA*, ♈*QB*, ♈*QC* obſervatæ tres longitudines cometæ ſub initio motus, ſitque ♈*QF* longi-

longitudo ultimo obſervata, ubi cometa videri deſinit. Agatur recta *ABC*, cujus partes *AB*, *BC* rectis *QA* & *QB*, *QB* & *QC* interjectæ, ſint ad invicem ut tempora inter obſervationes tres primas. Producatur *AC* ad *G*, ut ſit *AG* ad *AB* ut tempus inter obſervationem primam & ultimam ad tempus inter obſervationem primam & ſecundam, & jungatur *QG*. Et ſi cometa moveretur uniformiter in linea recta, atque terra vel quieſceret, vel etiam in linea recta uniformi cum motu progrederetur; foret angulus ♈*QG* longitudo cometæ tempore obſervationis ultimæ. Angulus igitur *FQG*, qui longitudinum differentia eſt, oritur ab inæqualitate motuum cometæ ac terræ. Hic autem angulus, ſi terra & cometa in contrarias partes moventur, additur angulo ♈*QG*, & ſic motum apparentem cometæ velociorem reddit: ſin cometa pergit in eaſdem partes cum terra, eidem ſubducitur, motumque cometæ vel tardiorem reddit, vel forte retrogradum; uti modo expoſui. Oritur igitur hic angulus præcipue ex motu terrræ, & idcirco pro parallaxi cometæ merito habendus eſt, neglecto videlicet ejus incremento vel decremento nonnullo, quod a cometæ motu inæquabili in orbe proprio oriri poſſit. Diſtantia vero cometæ ex hac parallaxi ſic colligitur. Deſignet *S* ſolem, *acT* orbem magnum, *a* locum terræ in obſervatione prima, *c* locum



cum terræ in obſervatione tertia, *T* locum terræ in obſervatione ultima, & *T*♈ lineam rectam verſus principium arietis ductam. Sumatur angulus ♈*TV* æqualis angulo ♈*QF*, hoc eſt, æqualis longitudini cometæ ubi terra verſatur in *T*. Jungatur *ac*, & producatur ea ad *g*, ut ſit *ag* ad *ac* ut *AG* ad *AC*, & erit *g* locus quem terra tempore obſervationis ultimæ, motu in recta *ac* unifor-



miter continuato, attingeret. Ideoque ſi ducatur *g*♈ ipſi *T*♈ parallela, & capiatur angulus ♈*gV* angulo ♈*QG* æqualis, erit hic angulus ♈*gV* æqualis longitudini cometæ e loco *g* ſpectati; & angulus *TVg* parallaxis erit, quæ oritur à tranſlatione terræ de loco *g* in locum *T*: ac proinde *V* locus erit cometæ in plano eclipticæ. Hic autem locus *V* orbe *Jovis* inferior eſſe ſolet.

Idem colligitur ex curvatura viæ cometarum. Pergunt hæc corpora propemodum in circulis maximis quamdiu moventur celerius; at in fine curſus, ubi motus apparentis pars illa, quæ a parallaxi oritur, majorem habet proportionem ad motum totum apparentem, deflectere ſolent ab his circulis, & quoties terra movetur in unam partem, abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maxime ex parallaxi, propterea quod reſpondet motui terræ; & inſignis ejus quantitas, meo computo, collocavit diſparentes cometas ſatis longe infra

infra jovem. Unde conſequens eſt quod in perigæis & periheliis, ubi propius adſunt, deſcendunt ſæpius infra orbes martis & inferiorum planetarum.

Confirmatur etiam propinquitas cometarum ex luce capitum. Nam corporis cœleſtis a ſole illuſtrati & in regiones longinquas abeuntis, diminuitur ſplendor in quadruplicata ratione diſtantiæ: in duplicata ratione videlicet ob auctam corporis diſtantiam a ſole, & in alia duplicata ratione ob diminutam diametrum apparentem. Unde ſi detur & lucis quantitas & apparens diameter cometæ, dabitur diſtantia, dicendo quod diſtantia ſit ad diſtantiam planetæ, in ratione diametri ad diametrum directe & ratione ſubduplicata lucis ad lucem inverſe. Sic minima capillitii cometæ anni 1682 diameter, per tubum opticum ſexdecim pedum a *Flamſtedio* obſervata & micrometro menſurata, æquabat 2′. 0″; nucleus autem ſeu ſtella in medio capitis vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, ideoque lata erat tantum 11″ vel 12″. Luce vero & claritate capitis ſuperabat caput cometæ anni 1680, ſtellaſque primæ vel ſecundæ magnitudinis æmulabatur. Ponamus ſaturnum cum annulo ſuo quaſi quadruplo lucidiorem fuiſſe: & quoniam lux annuli propemodum æquabat lucem globi intermedii, & diameter apparens globi ſit quaſi 21″, ideoque lux globi & annuli conjunctim æquaret lucem globi, cujus diameter eſſet 30″: erit diſtantia cometæ ad diſtantiam ſaturni ut 1 ad $\sqrt{4}$ inverſe, & 12″ ad 30″ directe, id eſt, ut 24 ad 30 ſeu 4 ad 5. Rurſus cometa anni 1665 menſe aprili, ut auctor eſt *Hevelius*, claritate ſua pene fixas omnes ſuperabat, quinetiam ipſum ſaturnum, ratione coloris videlicet longe vividioris. Quippe lucidior erat hic cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat, & cum ſtellis primæ magnitudinis conferabatur. Latitudo capillitii erat quaſi 6′, at nucleus cum planetis ope tubi optici collatus plane minor erat jove, & nunc minor corpore intermedio ſaturni, nunc ipſi æqualis judicabatur. Porro cum diameter capillitii cometarum raro ſuperet 8′ vel 12′, diameter vero nuclei, ſeu ſtellæ centralis ſit quaſi decima vel forte decima quinta pars diametri capillitii, patet ſtellas haſce ut plurimum ejuſdem eſſe apparentis magnitudinis cum planetis. Unde cum lux earum cum luce ſaturni non raro conferri poſſit, eamque aliquando ſuperet; mani-

feſtum eſt, quod cometæ omnes in periheliis vel infra ſaturnum collocandi ſint, vel non longe ſupra. Errant igitur toto cœlo, qui cometas in regionem fixarum prope ablegant: qua certe ratione non magis illuſtrari deberent a ſole noſtro, quam planetæ, qui hic ſunt, illuſtrantur a ſtellis fixis.

Hæc diſputavimus non conſiderando obſcurationem cometarum per fumum illum maxime copioſum & craſſum, quo caput circundatur, quaſi per nubem obtuſe ſemper lucens. Nam quanto obſcurius redditur corpus per hunc fumum, tanto propius ad ſolem accedat neceſſe eſt, ut copia lucis a ſe reflexæ planetas æmuletur. Inde veriſimile fit cometas longe infra ſphæram ſaturni deſcendere, uti ex parallaxi probavimus. Idem vero quam maxime confirmatur ex caudis. Hæ vel ex reflexione fumi ſparſi per æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore caſu minuenda eſt diſtantia cometarum, ne fumus a capite ſemper ortus per ſpatia nimis ampla incredibili cum velocitate & expanſione propagetur. In poſteriore referenda eſt lux omnis tam caudæ quam capillitii ad nucleum capitis. Igitur ſi concipiamus lucem hanc omnem congregari & intra diſcum nuclei coarctari, nucleus ille jam certe, quoties caudam maximam & fulgentiſſimam emittit, jovem ipſum ſplendore ſuo multum ſuperabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multo magis illuſtrabitur a ſole, ideoque erit ſoli multo propior. Quinetiam capita ſub ſole deliteſcentia, & caudas cum maximas tum fulgentiſſimas inſtar trabium ignitarum nonnunquam emittentia, eodem argumento infra orbem veneris collocari debent. Nam lux illa omnis ſi in ſtellam congregari ſupponatur, ipſam venerem ne dicam veneres plures conjunctas quandoque ſuperaret.

Idem denique colligitur ex luce capitum creſcente in receſſu cometarum a terra ſolem verſus, ac decreſcente in eorum receſſu a ſole verſus terram. Sic enim cometa poſterior anni 1665 (obſervante *Hevelio*) ex quo conſpici cœpit, remittebat ſemper de motu ſuo apparente, ideoque prætererierat perigæum; ſplendor vero capitis nihilominus indies creſcebat, uſque dum cometa radiis ſolaribus obtectus deſiit apparere. Cometa anni 1683 (obſervante eodem *Hevelio*) in fine menſis julii, ubi primum conſpectus eſt, tardiſſime movebatur, minuta prima 40 vel 45 circiter ſingulis diebus in orbe

ſuo

ſuo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuo augebatur uſque ad *Sept.* 4. quando evaſit graduum quaſi quinque. Igitur toto hoc tempore cometa ad terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capitis micrometro menſurata colligitur: quippe quam *Hevelius* reperit *Aug.* 6. eſſe tantum 6′. 5″ incluſa coma, at *Sept.* 2. eſſe 9′. 7″. Caput igitur initio longe minus apparuit quam in fine motus, at initio tamen in vicinia ſolis longe lucidius extitit quam circa finem, ut refert idem *Hevelius*. Proinde toto hoc tempore, ob receſſum ipſius a ſole, quoad lumen decrevit, non obſtante acceſſu ad terram. Cometa anni 1618 circa medium menſis *Decembris*, & iſte anni 1680 circa finem ejuſdem menſis, celerrime movebantur, ideoque tunc erant in perigæis. Verum ſplendor maximus capitum contigit ante duas fere ſeptimanas, ubi modo exierant de radiis ſolaribus; & ſplendor maximus caudarum paulo ante, in majore vicinitate ſolis. Caput cometæ prioris, juxta obſervationes *Cyſati*, *Decemb.* 1. majus videbatur ſtellis primæ magnitudinis, & *Decemb.* 16. (jam in perigæo exiſtens) magnitudine parum, ſplendore ſeu claritate luminis plurimum defecerat. *Jan.* 7. *Keplerus* de capite incertus finem fecit obſervandi. Die 12 menſis *Decemb.* conſpectum & a *Flamſtedio* obſervatum eſt caput cometæ poſterioris in diſtantia novem graduum a ſole; id quod ſtellæ tertiæ magnitudinis vix conceſſum fuiſſet. *Decemb.* 15 & 17 apparuit idem ut ſtella tertiæ magnitudinis, diminutum utique ſplendore nubium juxta ſolem occidentem. *Decemb.* 26. velociſſime motus, inque perigæo propemodum exiſtens, cedebat ori pegaſi, ſtellæ tertiæ magnitudinis. *Jan.* 3. apparebat ut ſtella quartæ, *Jan.* 9. ut ſtella quintæ, *Jan.* 13. ob ſplendorem lunæ creſcentis diſparuit. *Jan.* 25. vix æquabat ſtellas magnitudinis ſeptimæ. Si ſumantur æqualia a perigæo hinc inde tempora, capita quæ temporibus illis in longinquis regionibus poſita, ob æquales a terra diſtantias, æqualiter lucere debuiſſent, in plaga ſolis maxime ſplenduere, ex altera perigæi parte evanuere. Igitur ex magna lucis in utroque ſitu differentia, concluditur magna ſolis & cometæ vicinitas in ſitu priore. Nam lux cometarum regularis eſſe ſolet, & maxima apparere ubi capita velociſſime moventur, atque ideo ſunt in perigæis; niſi quatenus ea major eſt in vicinia ſolis.

Corol. 1. Splendent igitur cometæ luce ſolis a ſe reflexa.

Corol. 2. Ex dictis etiam intelligitur cur cometæ tantopere frequentant regionem ſolis. Si cernerentur in regionibus longe ultra ſaturnum, deberent ſæpius apparere in partibus ſoli oppoſitis. Forent enim terræ viciniores, qui in his partibus verſarentur; & ſol interpoſitus obſcuraret cæteros. Verum percurrendo hiſtorias cometarum, reperi quod quadruplo vel quintuplo plures detecti ſunt in hemiſphærio ſolem verſus, quam in hemiſphærio oppoſito, præter alios proculdubio non paucos, quos lux ſolaris obtexit. Nimirum in deſcenſu ad regiones noſtras neque caudas emittunt, neque adeo illuſtrantur a ſole, ut nudis oculis ſe prius detegendos exhibeant, quam ſint ipſo jove propiores. Spatii autem tantillo intervallo circa ſolem deſcripti pars longe major ſita eſt a latere terræ, quod ſolem reſpicit; inque parte illa majore cometæ, ſoli ut plurimum viciniores, magis illuminari ſolent.

Corol. 3. Hinc etiam manifeſtum eſt, quod cœli reſiſtentia deſtituuntur. Nam cometæ vias obliquas & nonnunquam curſui planetarum contrarias ſecuti, moventur omnifariam liberrime, & motus ſuos, etiam contra curſum planetarum diutiſſime conſervant. Fallor ni genus planetarum ſint, & motu perpetuo in orbem redeant. Nam quod ſcriptores aliqui meteora eſſe volunt, argumentum a capitum perpetuis mutationibus ducentes, fundamento carere videtur. Capita cometarum atmoſphæris ingentibus cinguntur; & atmoſphæræ inferne denſiores eſſe debent. Unde nubes ſunt, non ipſa cometarum corpora, in quibus mutationes illæ viſuntur. Sic terra ſi e planetis ſpectaretur, luce nubium ſuarum proculdubio ſplenderet, & corpus firmum ſub nubibus prope deliteſceret. Sic cingula jovis in nubibus planetæ illius formata ſunt, quæ ſitum mutant inter ſe, & firmum jovis corpus per nubes illas difficilius cernitur. Et multo magis corpora cometarum ſub atmoſphæris & profundioribus & craſſioribus abſcondi debent.

PRO-

PROPOSITIO XL. THEOREMA XX.

Cometas in ſectionibus conicis umbilicos in centro ſolis habentibus moveri, & radiis ad ſolem ductis areas temporibus proportionales deſcribere.

Patet per corol. 1. prop. xiii. libri primi, collatum cum prop. viii, xii, & xiii. libri tertii.

Corol. 1. Hinc ſi cometæ in orbem redeunt; orbes erunt ellipſes, & tempora periodica erunt ad tempora periodica planetarum in axium principalium ratione ſeſquiplicata. Ideoque cometæ maxima ex parte ſupra planetas verſantes, & eo nomine orbes axibus majoribus deſcribentes, tardius revolventur. Ut ſi axis orbis cometæ ſit quadruplo major axe orbis ſaturni, tempus revolutionis cometæ erit ad tempus revolutionis ſaturni, id eſt, ad annos 30, ut $4\sqrt{4}$ (ſeu 8) ad 1, ideoque erit annorum 240.

Corol. 2. Orbes autem erunt parabolis adeo finitimi, ut eorum vice parabolæ ſine erroribus ſenſibilibus adhiberi poſſint.

Corol. 3. Et propterea (per corol. 7. prop. xvi. lib. 1.) velocitas cometæ omnis, erit ſemper ad velocitatem planetæ cujuſvis circa ſolem in circulo revolventis, in ſubduplicata ratione duplæ diſtantiæ planetæ a centro ſolis, ad diſtantiam cometæ a centro ſolis quamproxime. Ponamus radium orbis magni, ſeu ellipſeos in qua terra revolvitur ſemidiametrum maximam eſſe partium 100000000: & terra motu ſuo diurno mediocri deſcribet partes 1720212, & motu horario partes $71675\frac{1}{2}$. Ideoque cometa in eadem telluris a ſole diſtantia mediocri, ea cum velocitate quæ ſit ad velocitatem telluris ut $\sqrt{2}$ ad 1, deſcribet motu ſuo diurno partes 2432747, & motu horario partes $101364\frac{1}{2}$. In majoribus autem vel minoribus diſtantiis, motus tum diurnus tum horarius erit ad hunc motum diurnum & horarium in ſubduplicata ratione diſtantiarum reciproce, ideoque datur.

Corol. 4. Unde ſi latus rectum parabolæ quadruplo majus ſit radio orbis magni, & quadratum radii illius ponatur eſſe partium 100000000: area quam cometa radio ad ſolem ducto ſingulis diebus deſcribit, erit

erit partium $1216373\frac{1}{3}$, & ſingulis horis area illa erit partium $50682\frac{1}{4}$. Sin latus rectum majus ſit vel minus in ratione quavis, erit area diurna & horaria major vel minor in eadem ratione ſubduplicata.

LEMMA V.

Invenire lineam curvam generis parabolici, quæ per data quotcunque puncta tranſibit.

Sunto puncta illa *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, &c. & ab iiſdem ad rectam quamvis poſitione datam *HN* demitte perpendicula quotcunque *AH*, *BI*, *CK*, *DL*, *EM*, *FN*.

Caſ. 1. Si punctorum *H*, *I*, *K*, *L*, *M*, *N* æqualia ſunt intervalla *HI*, *IK*, *KL*, &c. collige perpendiculorum *AH*, *BI*, *CK*, &c. differentias primas b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$, &c. ſecundas c, $2c$, $3c$, $4c$, &c. tertias d, $2d$, $3d$, &c. id eſt, ita ut ſit $AH - BI = b$, $BI - CK = 2b$, $CK - DL = 3b$, $DL + EM = 4b$, $-EM + FN = 5b$, &c. dein $b - 2b = c$, &c. & ſic pergatur ad differentiam ultimam, quæ hic eſt f.

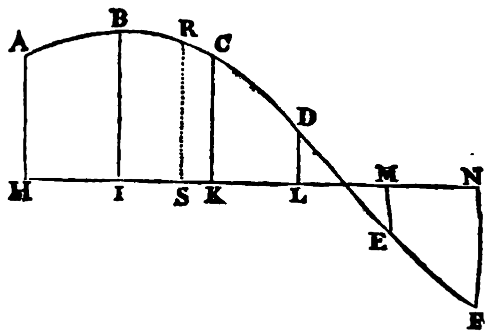
b   2b   3b   4b   5b

c   2c   3c   4c

d   2d   3d

e   2e

f



Deinde erecta quacunque perpendiculari *RS*, quæ fuerit ordinatim applicata ad curvam quæſitam: ut inveniatur hujus longitudo, pone intervalla *HI*, *IK*, *KL*, *LM*, &c. unitates eſſe, & dic $AH = a$, $-HS = p$, $\frac{1}{2}p$ in $-IS = q$, $\frac{1}{3}q$ in $+SK = r$, $\frac{1}{4}r$ in $+SL = s$, $\frac{1}{5}s$ in $+SM = t$; pergendo videlicet ad uſque penultimum perpendiculum *ME*, & præponendo ſigna negativa terminis *HS*, *IS*, &c. qui

jacent

jacent ad partes puncti S verſus A, & ſigna affirmativa terminis SK, SL, &c. qui jacent ad alteras partes puncti S. Et ſignis probe obſervatis, erit $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.

Caſ. 2. Quod ſi punctorum H, I, K, L, &c. inæqualia ſint intervalla HI, IK, &c. collige perpendiculorum AH, BI, CK, &c. differentias primas per intervalla perpendiculorum diviſas b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$; ſecundas per intervalla bina diviſa c, $2c$, $3c$, $4c$, &c. tertias per intervalla terna diviſas d, $2d$, $3d$, &c. quartas per intervalla quaterna diviſas e, $2e$, &c. & ſic deinceps; id eſt, ita ut ſit $b = \frac{AH - BI}{HI}$, $2b = \frac{BI - CK}{IK}$, $3b = \frac{CK - DL}{KL}$, &c. dein $c = \frac{b - 2b}{HK}$, $2c = \frac{2b - 3b}{IL}$, $3c = \frac{3b - 4b}{KM}$, &c. poſtea $d = \frac{c - 2c}{HL}$, $2d = \frac{2c - 3c}{IM}$, &c. Inventis differentiis, dic $AH = a$, $-HS = p$, p in $-IS = q$, q in $+SK = r$, r in $+SL = s$, s in $+SM = t$; pergendo ſcilicet ad uſque perpendiculum penultimum ME, & erit ordinatim applicata $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.

Corol. Hinc areæ curvarum omnium inveniri poſſunt quamproxime. Nam ſi curvæ cujuſvis quadrandæ inveniantur puncta aliquot, & parabola per eadem duci intelligatur: erit area parabolæ hujus eadem quamproxime cum area curvæ illius quadrandæ. Poteſt autem parabola per methodos notiſſimas ſemper quadrari Geometrice.

LEMMA VI.

Ex obſervatis aliquot locis cometæ invenire locum ejus ad tempus quodvis intermedium datum.

Deſignent HI, IK, KL, LM tempora inter obſervationes (*in fig. præced.*) HA, IB, KC, LD, ME obſervatas quinque longitudines cometæ, HS tempus datum inter obſervationem primam & longitudinem quæſitam. Et ſi per puncta A, B, C, D, E duci intelligatur curva regularis $ABCDE$; & per lemma ſuperius inveniatur ejus ordinatim applicata RS, erit RS longitudo quæſita.

Eadem methodo ex obſervatis quinque latitudinibus invenitur latitudo ad tempus datum.

Si

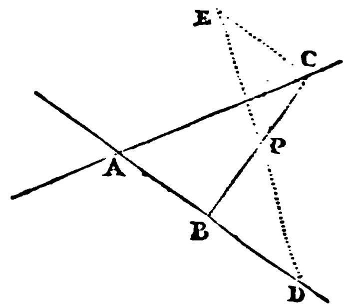
De Mundi Systemate

Si longitudinum obſervatarum parvæ ſint differentiæ, puta graduum tantum 4 vel 5; ſuffecerint obſervationes tres vel quatuor ad inveniendam longitudinem & latitudinem novam. Sin majores ſint differentiæ, puta graduum 10 vel 20, debebunt obſervationes quinque adhiberi.

LEMMA VII.

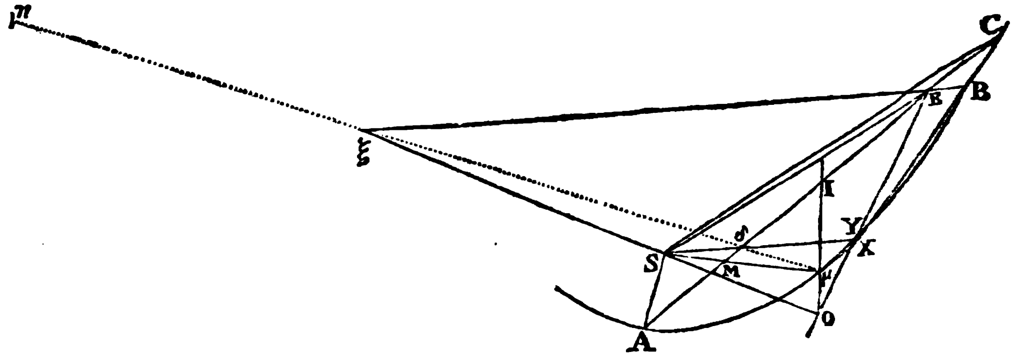
Per datum punctum P *ducere rectam lineam* BC, *cujus partes* PB, PC, *rectis duabus poſitione datis* AB, AC *abſciſſæ, datam habeant rationem ad invicem.*

A puncto illo *P* ad rectarum alterutram *AB* ducatur recta quævis *PD*, & producatur eadem verſus rectam alteram *AC* uſque ad *E*, ut ſit *PE* ad *PD* in data illa ratione. Ipſi *AD* parallela ſit *EC*; & ſi agatur *CPB*, erit *PC* ad *PB* ut *PE* ad *PD*. *Q.E.F.*



LEMMA VIII.

Sit ABC *parabola umbilicum habens* S. *Chorda* AC *bi-*



ſecta in I *abſcindatur ſegmentum* ABCI, *cujus diameter ſit*

Iμ

I μ & vertex μ. In I μ producta capiatur μ O æqualis dimidio ipſius I μ. Jungatur OS, & producatur ea ad ξ, ut ſit S ξ æqualis 2 SO. Et ſi cometa B moveatur in arcu CBA, & agatur ξ B ſecans AC in E: dico quod punctum E abſcindet de chorda AC ſegmentum AE tempori proportionale quamproxime.

Jungatur enim *EO* ſecans arcum parabolicum *ABC* in *Y*, & agatur μX, quæ tangat eundem arcum in vertice μ, & actæ *EO* occurrat in *X*; & erit area curvilinea $AEX\mu A$ ad aream curvilineam $ACY\mu A$ ut *AE* ad *AC*. Ideoque cum triangulum *ASE* ſit ad triangulum *ASC* in eadem ratione, erit area tota $ASEX\mu A$ ad aream totam $ASCY\mu A$ ut *AE* ad *AC*. Cum autem ξO ſit ad *SO* ut 3 ad 1, & *EO* ad *XO* in eadem ratione, erit *SX* ipſi *EB* parallela: & propterea ſi jungatur *BX*, erit triangulum *SEB* triangulo *XEB* æquale. Unde ſi ad aream $ASEX\mu A$ addatur triangulum *EXB*, & de ſumma auferatur triangulum *SEB*, manebit area $ASBX\mu A$ areæ $ASEX\mu A$ æqualis, atque ideo ad aream $ASCY\mu A$ ut *AE* ad *AC*. Sed areæ $ASBX\mu A$ æqualis eſt area $ASBY\mu A$ quamproxime, & hæc area $ASBY\mu A$ eſt ad aream $ASCY\mu A$, ut tempus deſcripti arcus *AB* ad tempus deſcripti arcus totius *AC*. Ideoque *AE* eſt ad *AC* in ratione temporum quamproxime. *Q. E. D.*

Corol. Ubi punctum *B* incidit in parabolæ verticem μ, eſt *AE* ad *AC* in ratione temporum accurate.

Scholium.

Si jungatur $\mu\xi$ ſecans *AC* in δ, & in ea capiatur ξn, quæ ſit ad μB ut 27 *MI* ad 16 $M\mu$: acta *Bn* ſecabit chordam *AC* in ratione temporum magis accurate quam prius. Jaceat autem punctum *n* ultra punctum ξ, ſi punctum *B* magis diſtat a vertice principali parabolæ quam punctum μ; & citra, ſi minus diſtat ab eodem vertice.

De Mundi Syſtemate

LEMMA IX.

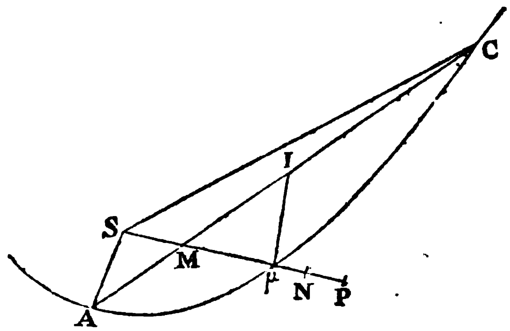
Rectæ I μ *&* μ M *& longitudo* $\frac{AIC}{4S\mu}$ *æquantur inter ſe.*

Nam $4S\mu$ eſt latus rectum parabolæ pertinens ad verticem μ.

LEMMA X.

Si producatur S μ *ad* N *&* P, *ut* μ N *ſit pars tertia ipſius* μ I, *&* SP *ſit ad* SN *ut* SN *ad* S μ. *Cometa, quo tempore deſcribit arcum* A μ C, *ſi progrederetur ea ſemper cum velocitate quam habet in altitudine ipſi* SP *æquali, deſcriberet longitudinem æqualem chordæ* AC.

Nam ſi cometa velocitate, quam habet in μ, eodem tempore progrederetur uniformiter in recta, quæ parabolam tangit in μ; area, quam radio ad punctum *S* ducto deſcriberet, æqualis eſſet areæ parabolicæ *ASC*μ. Ideoque contentum ſub longitudine in tangente deſcripta & longitudine *S*μ eſſet ad contentum ſub longitudinibus *AC* & *SM*, ut area *ASC*μ ad triangulum *ASC*, id eſt, ut *SN*



ad *SM*. Quare *AC* eſt ad longitudinem in tangente deſcriptam, ut *S*μ ad *SN*. Cum autem velocitas cometæ in altitudine *SP* ſit (per corol. 6. prop. xvi. lib. i.) ad ejus velocitatem in altitudine *S*μ, in ſubduplicata ratione *SP* ad *S*μ inverſe, id eſt, in ratione *S*μ ad *SN*; longitudo hac velocitate eodem tempore deſcripta, erit ad longitudinem

gitudinem in tangente deſcriptam, ut $S\mu$ ad SN. Igitur AC & longitudo hac nova velocitate deſcripta, cum ſint ad longitudinem in tangente deſcriptam in eadem ratione, æquantur inter ſe. *Q. E. D.*

Corol. Cometa igitur ea cum velocitate, quam habet in altitudine $S\mu + \frac{2}{3} I\mu$, eodem tempore deſcriberet chordam AC quamproxime.

LEMMA XI.

Si cometa motu omni privatus de altitudine SN *ſeu* $S\mu + \frac{1}{3}I\mu$ *demitteretur, ut caderet in ſolem, & ea ſemper vi uniformiter continuata urgeretur in ſolem, qua urgetur ſub initio; idem ſemiſſe temporis, quo in orbe ſuo deſcribat arcum* AC, *deſcenſu ſuo deſcriberet ſpatium longitudini* $I\mu$ *æquale.*

Nam cometa, quo tempore deſcribat arcum parabolicum AC, eodem tempore ea cum velocitate, quam habet in altitudine SP (per lemma noviſſimum) deſcribet chordam AC, ideoque (per corol. 7. prop. XVI. lib. I.) eodem tempore in circulo, cujus ſemidiameter eſſet SP, vi gravitatis ſuæ revolvendo, deſcriberet arcum, cujus longitudo eſſet ad arcus parabolici chordam AC, in ſubduplicata ratione unitatis ad binarium. Et propterea eo cum pondere, quod habet in ſolem in altitudine SP, cadendo de altitudine illa in ſolem, deſcriberet ſemiſſe temporis illius (per corol. 9. prop. IV. lib. I.) ſpatium æquale quadrato ſemiſſis chordæ illius applicato ad quadruplum altitudinis SP, id eſt, ſpatium $\frac{AIq}{4SP}$. Unde cum pondus cometæ in ſolem in altitudine SN ſit ad ipſius pondus in ſolem in altitudine SP, ut SP ad $S\mu$: cometa pondere quod habet in altitudine SN eodem tempore, in ſolem cadendo, deſcribet ſpatium $\frac{AIq}{4S\mu}$, id eſt, ſpatium longitudini $I\mu$ vel $M\mu$ æquale. *Q. E. D.*

LEMMA IX.

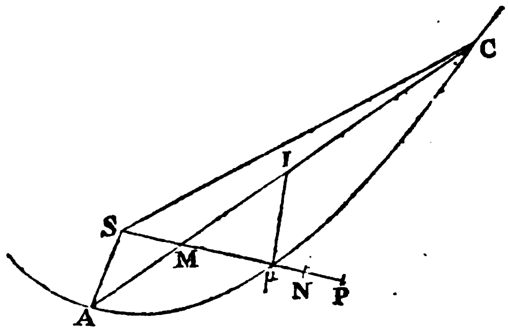
Rectæ I μ *&* μ M *&* *longitudo* $\frac{AIC}{4S\mu}$ *æquantur inter ſe.*

Nam $4S\mu$ eſt latus rectum parabolæ pertinens ad verticem μ.

LEMMA X.

Si producatur Sμ *ad* N *&* P, *ut* μN *ſit pars tertia ipſius* μI, *&* SP *ſit ad* SN *ut* SN *ad* Sμ. *Cometa, quo tempore deſcribit arcum* AμC, *ſi progrederetur ea ſemper cum velocitate quam habet in altitudine ipſi* SP *æquali, deſcriberet longitudinem æqualem chordæ* AC.

Nam ſi cometa velocitate, quam habet in μ, eodem tempore progrederetur uniformiter in recta, quæ parabolam tangit in μ; area, quam radio ad punctum S ducto deſcriberet, æqualis eſſet areæ parabolicæ $ASC\mu$. Ideoque contentum ſub longitudine in tangente deſcripta & longitudine $S\mu$ eſſet ad contentum ſub longitudinibus AC & SM, ut area $ASC\mu$ ad triangulum ASC, id eſt, ut SN



ad SM. Quare AC eſt ad longitudinem in tangente deſcriptam, ut $S\mu$ ad SN. Cum autem velocitas cometæ in altitudine SP ſit (per corol. 6. prop. XVI. lib. I.) ad ejus velocitatem in altitudine $S\mu$, in ſubduplicata ratione SP ad $S\mu$ inverſe, id eſt, in ratione $S\mu$ ad SN; longitudo hac velocitate eodem tempore deſcripta, erit ad longitudinem

gitudinem in tangente deſcriptam, ut $S\mu$ ad SN. Igitur AC & longitudo hac nova velocitate deſcripta, cum ſint ad longitudinem in tangente deſcriptam in eadem ratione, æquantur inter ſe. *Q. E. D.*

Corol. Cometa igitur ea cum velocitate, quam habet in altitudine $S\mu + \frac{2}{3} I\mu$, eodem tempore deſcriberet chordam AC quamproxime.

LEMMA XI.

Si cometa motu omni privatus de altitudine SN *ſeu* $S\mu + \frac{1}{3} I\mu$ *demitteretur, ut caderet in ſolem, & ea ſemper vi uniformiter continuata urgeretur in ſolem, qua urgetur ſub initio; idem ſemiſſe temporis, quo in orbe ſuo deſcribat arcum* AC, *deſcenſu ſuo deſcriberet ſpatium longitudini* $I\mu$ *æquale.*

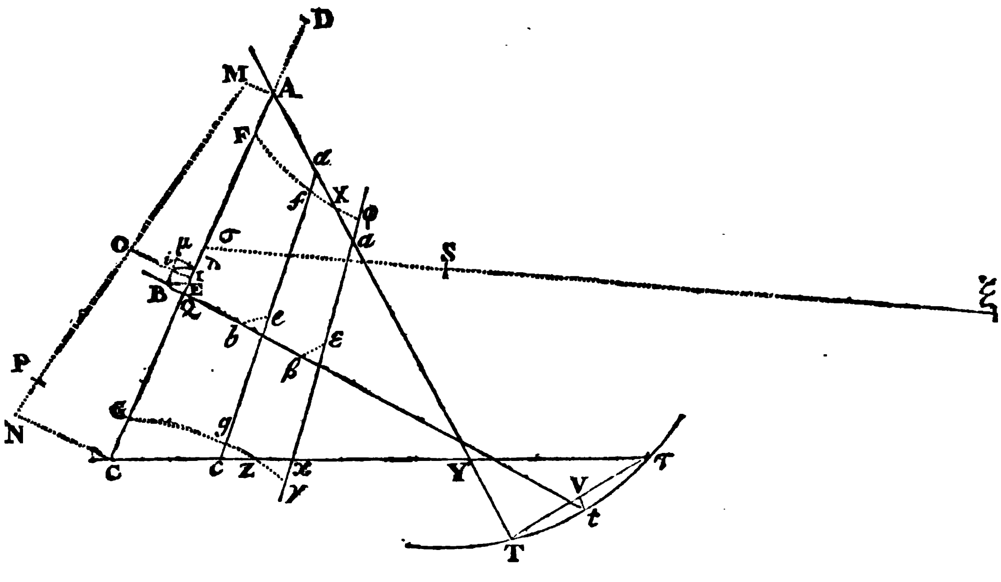
Nam cometa, quo tempore deſcribat arcum parabolicum AC, eodem tempore ea cum velocitate, quam habet in altitudine SP (per lemma noviſſimum) deſcribet chordam AC, ideoque (per corol. 7. prop. XVI. lib. I.) eodem tempore in circulo, cujus ſemidiameter eſſet SP, vi gravitatis ſuæ revolvendo, deſcriberet arcum, cujus longitudo eſſet ad arcus parabolici chordam AC, in ſubduplicata ratione unitatis ad binarium. Et propterea eo cum pondere, quod habet in ſolem in altitudine SP, cadendo de altitudine illa in ſolem, deſcriberet ſemiſſe temporis illius (per corol. 9. prop. IV. lib. I.) ſpatium æquale quadrato ſemiſſis chordæ illius applicato ad quadruplum altitudinis SP, id eſt, ſpatium $\frac{AIq}{4SP}$. Unde cum pondus cometæ in ſolem in altitudine SN ſit ad ipſius pondus in ſolem in altitudine SP, ut SP ad $S\mu$: cometa pondere quod habet in altitudine SN eodem tempore, in ſolem cadendo, deſcribet ſpatium $\frac{AIq}{4S\mu}$, id eſt, ſpatium longitudini $I\mu$ vel $M\mu$ æquale. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXI.

Cometæ in parabola moti trajectoriam ex datis tribus obſervationibus determinare.

Problema hocce longe difficillimum multimode aggreſſus, compoſui problemata quædam in libro primo, quæ ad ejus ſolutionem ſpectant. Poſtea ſolutionem ſequentem paulo ſimpliciorem excogitavi.

Seligantur tres obſervationes æqualibus temporum intervallis ab invicem quamproxime diſtantes. Sit autem temporis intervallum illud, ubi cometa tardius movetur, paulo majus altero, ita videlicet ut temporum differentia ſit ad ſummam temporum, ut ſumma temporum ad dies plus minus ſexcentos; vel ut punctum *E* (in fig. lem. VIII.)



incidat in punctum *M* quamproxime, & inde aberret verſus *I* potius quam verſus *A*. Si tales obſervationes non præſto ſint, inveniendus eſt novus cometæ locus per lemma ſextum.

Deſignent

Deſignent *S* ſolem, *T*, *t*, *τ* tria loca terræ in orbe magno, *TA*, *t B*, *τ C* obſervatas tres longitudines cometæ, *V* tempus inter obſervationem primam & ſecundam, *W* tempus inter ſecundam ac tertiam, X longitudinem, quam cometa toto illo tempore ea cum velocitate, quam habet in mediocri telluris a ſole diſtantia, deſcribere poſſet, quæque (per corol. 3. prop. xl. lib. iii.) invenienda eſt, & *t V* perpendiculum in chordam *Tτ*. In obſervata longitudine media *t B* ſumatur utcunque punctum *B* pro loco cometæ in plano eclipticæ, & inde verſus ſolem *S* ducatur linea *BE*, quæ ſit ad ſagittam *t V*, ut contentum ſub *SB* & *St quad.* ad cubum hypotenuſæ trianguli rectanguli, cujus latera ſunt *SB* & tangens latitudinis cometæ in obſervatione ſecunda ad radium *t B*. Et per punctum *E* agatur (per hujus lem. vii.) recta *AEC*, cujus partes *AE*, *EC* ad rectas *TA* & *τC* terminatæ, ſint ad invicem ut tempora *V* & *W*: & erunt *A* & *C* loca cometæ in plano eclipticæ in obſervatione prima ac tertia quamproxime, ſi modo *B* ſit locus ejus recte aſſumptus in obſervatione ſecunda.

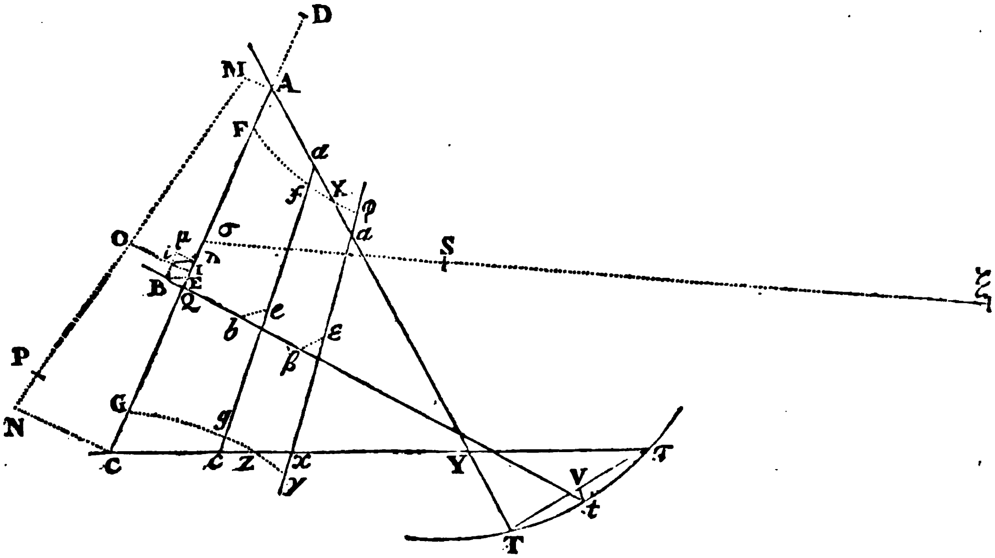
Ad *AC* biſectam in *I* erige perpendiculum *Ii*. Per punctum *B* age occultam *Bi* ipſi *AC* parallelam. Junge occultam *Si* ſecantem *AC* in λ, & comple parallelogrammum $iI\lambda\mu$. Cape $I\sigma$ æqualem $3\,I\lambda$, & per ſolem *S* age occultam $\sigma\xi$ æqualem $3\,S\sigma + 3\,i\lambda$. Et deletis jam literis *A*, *E*, *C*, *I*, a puncto *B* verſus punctum ξ duc occultam novam *BE*, quæ ſit ad priorem *BE* in duplicata ratione diſtantiæ *BS* ad quantitatem $S\mu + \frac{1}{3}i\lambda$. Et per punctum *E* iterum duc rectam *AEC* eadem lege ac prius, id eſt, ita ut ejus partes *AE* & *EC* ſint ad invicem, ut tempora inter obſervationes *V* & *W*. Et erunt *A* & *C* loca cometæ magis accurate.

Ad *AC* biſectam in *I* erigantur perpendicula *AM*, *CN*, *IO*, quorum *AM* & *CN* ſint tangentes latitudinum in obſervatione prima ac tertia ad radios *TA* & *τC*. Jungatur *MN* ſecans *IO* in *O*. Conſtituatur rectangulum $iI\lambda\mu$ ut prius. In *IA* producta capiatur *ID* æqualis $S\mu + \frac{2}{3}i\lambda$. Deinde in *MN* verſus *N* capiatur *MP*, quæ ſit ad longitudinem ſupra inventam X, in ſubduplicata ratione mediocris diſtantiæ telluris a ſole (ſeu ſemidiametri orbis magni) ad diſtantiam *OD*. Si punctum *P* incidat in punctum *N*; erunt *A*, *B*, *C* tria loca cometæ, per quæ orbis ejus in plano

De Mundi Systemate

plano eclipticæ deſcribi debet. Sin punctum P non incidat in punctum N; in recta AC capiatur CG ipſi NP æqualis, ita ut puncta G & P ad eaſdem partes rectæ NC jaceant.

Eadem methodo, qua puncta E, A, C, G, ex aſſumpto puncto B inventa ſunt, inveniantur ex aſſumptis utcunque punctis aliis b & β puncta nova e, a, c, g, & ε, α, κ, γ. Deinde ſi per G, g, γ ducatur circumferentia circuli $Gg\gamma$, ſecans rectam τC in Z: erit Z locus cometæ in plano eclipticæ. Et ſi in AC, ac, $\alpha\kappa$ capiantur AF, af, $\alpha\varphi$ ipſis CG, cg, $\kappa\gamma$ reſpective æquales, & per puncta F, f,



φ ducatur circumferentia circuli $Ff\varphi$, ſecans rectam AT in X; erit punctum X alius cometæ locus in plano eclipticæ. Ad puncta X & Z erigantur tangentes latitudinum cometæ ad radios TX & τZ; & habebuntur loca duo cometæ in orbe proprio. Denique (per prop. XIX. lib. I.) umbilico S, per loca illa duo deſcribatur parabola, & hæc erit trajectoria cometæ. *Q.E.I.*

Conſtructionis hujus demonſtratio ex lemmatibus conſequitur: quippe cum recta AC ſecetur in E in ratione temporum, per lemma VII, ut oportet per lem. VIII: & BE per lem. XI. ſit pars rectæ BS vel $B\xi$ in plano eclipticæ arcui ABC & chordæ AEC interjecta; & MP (per corol. lem. X.) longitudo ſit chordæ arcus, quem cometa

cometa in orbe proprio inter obſervationem primam ac tertiam deſcribere debet, ideoque ipſi *MN* æqualis fuerit, ſi modo *B* ſit verus cometæ locus in plano eclipticæ.

Cæterum puncta *B*, *b*, *β* non quælibet, ſed vero proxima eligere convenit. Si angulus *A♌t*, in quo veſtigium orbis in plano eclipticæ deſcriptum ſecat rectam *tB*, præterpropter innoteſcat; in angulo illo ducenda erit recta occulta *AC*, quæ ſit ad $\frac{4}{3}$ *Tτ* in ſubduplicata ratione *S♌* ad *St*. Et agendo rectam *SEB*, cujus pars *EB* æquetur longitudini *Vt*, determinabitur punctum *B* quod prima vice uſurpare licet. Tum recta *AC* deleta & ſecundum præcedentem conſtructionem iterum ducta, & inventa inſuper longitudine *MP*; in *tB* capiatur punctum *b*, ea lege, ut ſi *TA*, *τC* ſe mutuo ſecuerint in *Y*, ſit diſtantia *Yb* ad diſtantiam *YB*, in ratione compoſita ex ratione *MP* ad *MN* & ratione ſubduplicata *SB* ad *Sb*. Et eadem methodo inveniendum erit punctum tertium *β* ſi modo operationem tertio repetere lubet. Sed hac methodo operationes duæ ut plurimum ſuffecerint. Nam ſi diſtantia *Bb* perexigua obvenerit; poſtquam inventa ſunt puncta *F*, *f* & *G*, *g*, actæ rectæ *Ff* & *Gg* ſecabunt *TA* & *τC* in punctis quæſitis *X* & *Z*.

Exemplum.

Proponatur cometa anni 1680. Hujus motum a *Flamſtedio* obſervatum & ex obſervationibus computatum, atque ab *Halleio* ex iiſdem obſervationibus correctum, tabula ſequens exhibet.

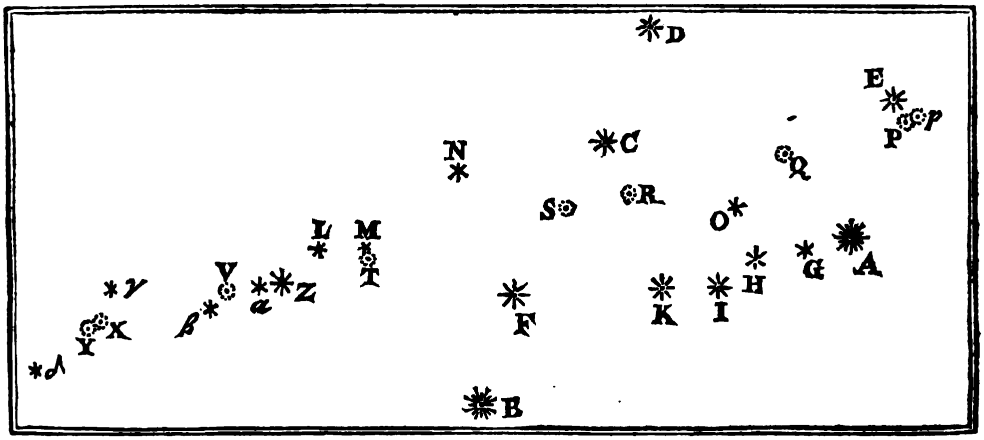
	Tem. appar	Tem. verum	Long. Solis.	Cometæ Longitudo.	Cometæ Lat. bor.
	h. ′	h. ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
1680. *Dec.* 12	4.46	4.46. 0	♑ 1.51.23	♑ 6.32.30	8.28. 0
21	6.32½	6.36.59	11. 6.44	♒ 5. 8.12	21.42.13
24	6.12	6.17.52	14. 9.26	18.49.23	25.23. 5
26	5.14	5.20.44	16. 9.22	28.24.13	27. 0.52
29	7.55	8. 3. 2	19.19.43	♓ 13.10.41	28. 9.58
30	8. 2	8.10.26	20.21. 9	17.38.20	28.11.53
1681. *Jan.* 5	5.51	6. 1.38	26.22.18	♈ 8.48.53	26.15. 7
9	6.49	7. 0.53	♒ 0.29. 2	18.44. 4	24.11.56
10	5.54	6. 6.10	1.27.43	20.40.50	23.43.52
13	6.56	7. 8.55	4.33.20	25.59.48	22.17.28
25	7.44	7.58.42	16.45.36	♉ 9.35. 0	17.56.30
30	8. 7	8.21.53	21.49.58	13.19.51	16.42.18
Feb. 2	6.20	6.34.51	24.46.59	15.13.53	16. 4. 1
5	6.50	7. 4.41	27.49.51	16.59. 6	15.27. 3

His adde obſervationes quaſdam e noſtris.

	Tem. appar.	Cometæ Longitudo.	Cometæ Lat. bor.
1681. *Feb.* 25	8h . 30′	♉ 26° . 18′ . 35″	12° . 46′ . 46″
27	8 . 15	27 . 4 . 30	12 . 36 . 12
Mar. 1	11 . 0	27 . 52 . 42	12 . 23 . 40
2	8 . 0	28 . 12 . 48	12 . 19 . 38
5	11 . 30	29 . 18 . 0	12 . 3 . 16
7	9 . 30	♊ 0 . 4 . 0	11 . 57 . 0
9	8 . 30	0 . 43 . 4	11 . 45 . 52

Hæ obſervationes teleſcopio ſeptupedali, & micrometro filiſque in foco teleſcopii locatis peractæ ſunt: quibus inſtrumentis & poſitiones fixarum inter ſe & poſitiones cometæ ad fixas determinavimus. Deſignet *A* ſtellam quartæ magnitudinis in ſiniſtro calcaneo Perſei (*Bayero* ο) *B* ſtellam ſequentem tertiæ magnitudinis in ſiniſtro pede (*Bayero* ζ) & *C* ſtellam ſextæ magnitudinis (*Bayero* η) in talo ejuſdem pedis, ac *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *Z*, α, β, γ, δ ſtellas alias minores in eodem pede. Sintque *p*, *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, *V*, *X*, loca

loca cometæ in obſervationibus ſupra deſcriptis: & exiſtente diſtantia *AB* partium $80\frac{7}{12}$, erat *AC* partium $52\frac{1}{4}$, *BC* $58\frac{5}{6}$, *AD* $57\frac{5}{12}$, *BD* $82\frac{6}{11}$, *CD* $23\frac{2}{3}$, *AE* $29\frac{4}{7}$, *CE* $57\frac{1}{2}$, *DE* $49\frac{11}{12}$, *AI* $27\frac{7}{12}$, *BI* $52\frac{1}{6}$, *CI* $36\frac{7}{12}$, *DI* $53\frac{5}{11}$, *AK* $38\frac{2}{3}$, *BK* 43, *CK* $31\frac{5}{9}$, *FK* LIBER TERTIUS.



29, *FB* 23, *FC* $36\frac{1}{4}$, *AH* $18\frac{6}{7}$, *DH* $50\frac{7}{8}$, *BN* $46\frac{5}{12}$, *CN* $31\frac{1}{3}$, *BL* $45\frac{5}{12}$, *NL* $31\frac{5}{7}$. *HO* erat ad *HI* ut 7 ad 6 & producta tranſibat inter ſtellas *D* & *E*, ſic ut diſtantia ſtellæ *D* ab hac recta eſſet $\frac{1}{6}$ *CD*. *LM* erat ad *LN* ut 2 ad 9, & producta tranſibat per ſtellam *H*. His determinabantur poſitiones fixarum inter ſe.

Tandem *Poundius* noſter iterum obſervavit poſitiones harum fixarum inter ſe, & earum longitudines & latitudines in tabulam ſequentem retulit.

Fixarum	Longitudines.	Lat. boreæ.
	° ′ ″	° ′ ″
A	♉ 26.41.50	12. 8.36
B	28.40.23	11.17.54
C	27.58.30	12.40.25
E	26.27.17	12.52. 7
F	28.28.37	11.52.22
G	26.56. 8	12. 4.58
H	27.11.45	12. 2. 1
I	27.25. 2	11.53.11
K	27.42. 7	11.53.26

Fixarum	Longitudines.	Lat. boreæ.
	° ′ ″	° ′ ″
L	♉ 29.33.34	12. 7.48
M	29.18.54	12. 7.20
N	28.48.29	12.31. 9
Z	29.44.48	11.57.13
α	29.52. 3	11.55.48
β	♊ 0. 8.23	11.48.56
γ	0.40.10	11.55.18
δ	1. 3.20	11.30.42

Poſitiones vero cometæ ad has fixas obſervabam ut ſequitur.

Die veneris *Feb.* 25. ſt. vet. hor. $8\frac{1}{2}$ p. m. cometæ in *p* exiſtentis diſtantia a ſtella *E* erat minor quam $\frac{3}{13}$ *AE*, major quam $\frac{1}{5}$ *AE*, ide-

 oque

oque æqualis $\frac{1}{14}$ *AE* proxime; & angulus *ApE* nonnihil obtuſus erat, ſed fere rectus. Nempe ſi demitteretur ad *pE* perpendiculum ab *A*, diſtantia cometæ a perpendiculo illo erat $\frac{1}{5}$ *pE*.

Eadem nocte hora $9\frac{1}{2}$, cometæ in *P* exiſtentis diſtantia a ſtella *E* erat major quam $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$ *AE*, minor quam $\frac{1}{5\frac{1}{4}}$ *AE*, ideoque æqualis $\frac{1}{4\frac{7}{8}}$ *AE*, ſeu $\frac{8}{39}$ *AE* quamproxime. A perpendiculo autem a ſtella *A* ad rectam *PE* demiſſo diſtantia cometæ erat $\frac{4}{5}$ *PE*.

Die ſolis *Feb.* 27. hor. $8\frac{1}{4}$ p. m. cometæ in *Q* exiſtentis diſtantia a ſtella *O* æquabat diſtantiam ſtellarum *O* & *H*, & recta *QO* producta tranſibat inter ſtellas *K* & *B*. Poſitionem hujus rectæ ob nubes intervenientes magis accurate definire non potui.

Die martis *Mart.* 1. hor. 11. p. m. cometa in *R* exiſtens, ſtellis *K* & *C* accurate interjacebat, & rectæ *CRK* pars *CR* paulo major erat quam $\frac{1}{3}$ *CK*, & paulo minor quam $\frac{1}{3}$ *CK* + $\frac{1}{8}$ *CR*, ideoque æqualis $\frac{1}{3}$ *CK* + $\frac{1}{16}$ *CR* ſeu $\frac{16}{45}$ *CK*.

Die mercurii *Mart.* 2. hor. 8. p. m. cometæ exiſtentis in *S* diſtantia a ſtella *C* erat $\frac{4}{9}$ *FC* quamproxime. Diſtantia ſtellæ *F* a recta *CS* producta erat $\frac{1}{24}$ *FC*; & diſtantia ſtellæ *B* ab eadem recta, erat quintuplo major quam diſtantia ſtellæ *F*. Item recta *NS* producta tranſibat inter ſtellas *H* & *I*, quintuplo vel ſextuplo propior exiſtens ſtellæ *H* quam ſtellæ *I*.

Die ſaturni *Mart.* 5. hor. $11\frac{1}{2}$ p. m. cometa exiſtente in *T*, recta *MT* æqualis erat $\frac{1}{2}$ *ML*, & recta *LT* producta tranſibat inter *B* & *F*, quadruplo vel quintuplo propior *F* quam *B*, auferens a *BF* quintam vel ſextam ejus partem verſus *F*. Et *MT* producta tranſibat extra ſpatium *BF* ad partes ſtellæ *B*, quadruplo propior exiſtens ſtellæ *B* quam ſtellæ *F*. Erat *M* ſtella perexigua quæ per teleſcopium videri vix potuit, & *L* ſtella major quaſi magnitudinis octavæ.

Die lunæ *Mart.* 7 hor. $9\frac{1}{2}$ p. m. cometa exiſtente in *V*, recta *Vα* producta tranſibat inter *B* & *F*, auferens a *BF* verſus *F* $\frac{1}{7}$ *BF*, & erat ad rectam *Vβ* ut 5 ad 4. Et diſtantia cometæ a recta *αβ* erat $\frac{1}{8}$ *Vβ*.

Die mercurii *Mart.* 9. hora $8\frac{1}{2}$. p. m. cometa exiſtente in *X*, recta *γX* æqualis erat $\frac{1}{4}$ *γδ*, & perpendiculum demiſſum a ſtella *δ* ad rectam *γX* erat $\frac{2}{5}$ *γδ*.

Eadem nocte hora 12, cometa exiſtente in *Y*, recta *γY* æqualis erat

erat $\frac{1}{3}\,\gamma\delta$, aut paulo minor, puta $\frac{5}{16}\,\gamma\delta$, & perpendiculum demiſſum a ſtella δ ad rectam γT æqualis erat $\frac{1}{8}\,\gamma\delta$ vel $\frac{1}{7}\,\gamma\delta$ circiter. Sed cometa ob viciniam horizontis cerni vix potuit, nec locus ejus tam diſtincte ac in præcedentibus definiri.

Ex hujuſmodi obſervationibus per conſtructiones figurarum & computationes derivabam longitudines & latitudines cometæ, & *Poundius* noſter ex correctis fixarum locis loca cometæ correxit, & loca correcta habentur ſupra. Micrometro parum affabre conſtructo uſus ſum, ſed longitudinum tamen & latitudinum errores (quatenus ex obſervationibus noſtris oriantur) minutum unum primum vix ſuperant. Cometa autem (juxta obſervationes noſtras) in fine motus ſui notabiliter deflectere cœpit boream verſus, a parallelo quem in fine menſis *Februarii* tenuerat.

Jam ad orbem cometæ determinandum; ſelegi ex obſervationibus hactenus deſcriptis tres, quas *Flamſtedius* habuit *Dec.* 21, *Jan.* 5, & *Jan.* 25. Ex his inveni St partium 9842,1 & Vt partium 455, quales 10000 ſunt ſemidiameter orbis magni. Tum ad operationem primam aſſumendo tB partium 5657, inveni SB 9747, BE prima vice 412, $S\mu$ 9503, $i\lambda$ 413: BE ſecunda vice 421, OD 10186, X 8528,4 MP 8450, MN 8475, NP 25. Unde ad operationem ſecundam collegi diſtantiam tb 5640. Et per hanc operationem inveni tandem diſtantias TX 4775 & τZ 11322. Ex quibus orbem definiendo, inveni nodos ejus deſcendentem in ♋ & aſcendentem in ♑ 1 gr. 53′; inclinationem plani ejus ad planum eclipticæ 61gr. 20′$\frac{1}{3}$; verticem ejus (ſeu perihelium cometæ) diſtare a nodo 8gr. 38′, & eſſe in ♐ 27gr. 43′ cum latitudine auſtrali 7gr. 34′; & ejus latus rectum eſſe 236,8, areamque radio ad ſolem ducto ſingulis diebus deſcriptam 93585, quadrato ſemidiametri orbis magni poſito 100000000; cometam vero in hoc orbe ſecundum ſeriem ſignorum proceſſiſſe, & *Decemb.* 8d. 0h. 4′. p. m. in vertice orbis ſeu perihelio fuiſſe. Hæc omnia per ſcalam partium æqualium & chordas angulorum ex tabula ſinuum naturalium collectas determinavi graphice; conſtruendo ſchema ſatis amplum, in quo videlicet ſemidiameter orbis magni (partium 10000) æqualis eſſet digitis 16$\frac{1}{3}$ pedis *Anglicani*.

Tandem ut conſtaret an cometa in orbe ſic invento vere moveretur, collegi per operationes partim arithmeticas partim graphicas loca cometæ in hoc orbe ad obſervationum quarundam tempora: uti in tabula ſequente videre licet.

De Mundi Systemate

	Diſtant Cometæ a Sole	Long. Collect	Lat. Collect	Long. Obſ.	Lat. Obſ.	Differ Long.	Differ. Lat.
		gr. ′	gr. ′	gr. ′	gr. ′	′	′
Dec. 12	2792	♑ 6.32	8.18$\frac{1}{2}$	♑ 6.31$\frac{1}{3}$	8.26	+1	− 7$\frac{1}{2}$
29	8403	♓ 13.13$\frac{2}{3}$	28. 0	♓ 13.11$\frac{3}{4}$	28.10$\frac{1}{12}$	+2	−10$\frac{1}{12}$
Feb. 5	16669	♉ 17. 0	15.29$\frac{2}{3}$	♉ 16.59$\frac{7}{8}$	15.27$\frac{2}{5}$	+0	+ 2$\frac{1}{4}$
Mar. 5	21737	29.19$\frac{3}{4}$	12. 4	29.20$\frac{6}{7}$	12. 3$\frac{1}{2}$	−1	+ $\frac{1}{2}$

Poſtea vero *Halleius* noſter orbitam per calculum arithmeticum accuratius determinavit, quam per deſcriptiones linearum fieri licuit; & retinuit quidem locum nodorum in ♋ & ♑ 1gr. 53′, & inclinationem plani orbitæ ad eclipticam 61gr. 20′$\frac{1}{3}$, ut & tempus perihelii cometæ *Decemb.* 8d. 0h. 4′: diſtantiam vero perihelii a nodo aſcendente in orbita cometæ menſuratam invenit eſſe 9gr. 20′, & latus rectum parabolæ eſſe 2430 partium, exiſtente mediocri ſolis a terra diſtantia partium 100000. Et ex his datis, calculo itidem arithmetico accurate inſtituto, loca cometæ ad obſervationum tempora computavit, ut ſequitur.

Tempus verum.	Diſtantia Cometæ a ☉	Long. comp	Lat. comp.	Errores in Long.	Errores in Lat.
d. h. ′		gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Dec. 12. 4.46	28028	♑ 6.29.25	8.26. 0 Bor.	− 3. 5	−2. 0
21. 6.37	61076	♒ 5. 6.30	21.43.20	− 1.42	+1. 7
24. 6.18	70008	18.48.20	25.22.40	− 1. 3	−0.25
26. 5.21	75576	28.22.45	27. 1.36	− 1.28	+0.44
29. 8. 3	14021	♓ 13.12.40	28.10.10	+ 1.59	+0.12
30. 8.10	86661	17.40. 5	28.11.20	+ 1.45	−0.33
Jan. 5. 6. 1$\frac{1}{2}$	101440	♈ 8.49.49	26.15.15	+0.56	+0. 8
9. 7. 0	110959	18.44.36	24.12.54	+0.32	+0.58
10. 6. 6	113162	20.41. 0	23.44.10	+0.10	+0.18
13. 7. 9	120000	26. 0.21	22.17.30	+0.33	+0. 2
25. 7.59	145370	♉ 9.33.40	17.57.55	− 1 20	+1.25
30. 8.22	155303	13.17 41	16.42. 7	−2.10	−0 11
Feb. 2. 6.35	160951	15.11.11	16. 4.15	−2.42	+0.14
5. 7. 4$\frac{1}{2}$	166686	16.58.25	15.29.13	−0.41	+2.10
25. 8.41	202570	26.15.46	12.48. 0	−2.49	+1.14
Mar. 5.11.39	216205	29.18.35	12. 5.40	+0.35	+2.24

Apparuit etiam hic cometa menſe *Novembri* præcedente & *Coburgi* in *Saxonia* a Dno. *Gottfried Kirch* obſervatus eſt diebus menſis hujus quarto, ſexto & undecimo, ſtylo veteri; & ex poſitionibus

ejus

ejus ad proximas ſtellas fixas ope teleſcopii nunc bipedalis nunc decempedalis ſatis accurate obſervatis, ac differentia longitudinum *Coburgi* & *Londini* graduum undecim & locis fixarum a *Poundio* noſtro obſervatis, *Halleius* noſter loca cometæ determinavit ut ſequitur.

Novem. 3^d. 17^h. 2′, tempore apparente *Londini*, cometa erat in ♌ 29^{gr}. 51′ cum lat. bor. 1^{gr}. 17′. 45″.

Novem. 5^d. 15^h. 58′ cometa erat in ♍ 3^{gr}. 23′ cum lat. bor. 1^{gr}. 6′.

Novem. 10^d. 16^h. 31′ cometa æqualiter diſtabat a ſtellis leonis σ ac τ *Bayero*; nondum vero attigit rectam eaſdem jungentem, ſed parum abfuit ab ea. In ſtellarum catalogo *Flamſtediano* σ tunc habuit ♍ 14^{gr}. 15′ cum lat. bor. 1^{gr}. 41′ fere, τ vero ♍ 17^{gr}. 3½, cum lat. auſtr. 0^{gr}. 34′. Et medium punctum inter has ſtellas fuit ♍ 15^{gr}. 39′¼, cum lat. bor. 0^{gr}. 33½. Sit diſtantia cometæ a recta illa 10′ vel 12′ circiter, & differentia longitudinum cometæ & puncti illius medii erit 7′, & differentia latitudinum 7′½, circiter. Et inde cometa erat in ♍ 15^{gr}. 32′ cum lat. bor. 26′ circiter.

Obſervatio prima ex ſitu cometæ ad parvas quaſdam fixas abunde ſatis accurata fuit. Secunda etiam ſatis accurata fuit. In tertia, quæ minus accurata fuit, error minutorum ſex vel ſeptem ſubeſſe potuit, & vix major. Longitudo vero cometæ in obſervatione prima, quæ cæteris accuratior fuit, in orbe prædicto parabolico computata erat ♌ 29^{gr}. 30′. 22″. latitudo borealis 1^{gr}. 25′. 7″. & diſtantia ejus a ſole 115546.

Porro *Halleius* obſervando quod cometa inſignis intervallo annorum 575 quater apparuiſſet, ſcilicet menſe *Septembri* poſt cædem *Julii Cæſaris*, anno *Chriſti* 531 *Lampadio* & *Oreſte Coſs*. anno *Chriſti* 1106 menſe *Februario*, & ſub finem anni 1680, idque cum cauda longa & inſigni (præterquam quod ſub mortem *Cæſaris*, cauda ob incommodam telluris poſitionem minus apparuiſſet:) quæſivit orbem ellipticum cujus axis major eſſet partium 1382957, exiſtente mediocri diſtantia telluris a ſole partium 10000: in quo orbe utique cometa annis 575 revolvi poſſit. Et ponendo nodum aſcendentem in ♋ 2^{gr}. 2′; inclinationem plani orbis ad planum eclipticæ 61^{gr}. 6′. 48″; perihelium cometæ in hoc plano ♐ 22^{gr}. 44′. 25″; tempus æquatum perihelii *Decem.* 7^d. 23^h. 9′; diſtantiam perihelii a nodo

nodo aſcendente in plano eclipticæ 9gr. 17′. 35″; & axem conjugatum 18481,2: computavit motum cometæ in hoc orbe elliptico. Loca autem ejus tam ex obſervationibus deducta quam in hoc orbe computata exhibentur in tabula ſequente.

Tempus verum	Long. obſ.	Lat. Bor. obſ.	Long. comp.	Lat. comp.	Errores in Long.	Errores in Lat.
d. h. ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Nov. 3.16.47	♌ 29.51. 0	1.17.45	♌ 29.51.22	1.17.32 B	+0.22	−0.13
5.15.37	♍ 3.23. 0	1. 6. 0	♍ 3.24.32	1. 6. 9	+1.32	+0. 9
10.16.18	15.32. 0	0.27. 0	15.33. 2	0.25. 7	+1. 2	−1.53
16.17. 0			♎ 8.16.45	0.53. 7 A		
18.21.34			18.52.15	1.26.54		
20.17. 0			28.10.36	1.53.35		
23.17. 5			♏ 13.22.42	2.29. 0		
Dec. 12. 4.46	♑ 6.32.30	8.28. 0	♑ 6.31.20	8.29. 6 B	−1.10	+1. 6
21. 6.37	♒ 5. 8.12	21.42.13	♒ 5. 6.14	21.44.42	−1.58	+2.29
24. 6.18	18.49.23	25.23. 5	18.47.30	25.23.35	−1.53	+0.30
26. 5.21	28.24.13	27. 0.52	28.21.42	27. 2. 1	−2.31	+1. 9
29. 8. 3	♓ 13.10.41	28. 9.58	♓ 13.11.14	28.10.38	+0.33	+0.40
30. 8.10	17.38.20	28.11.53	17.38.27	28.11.37	+0. 7	−0.16
Jan. 5. 6. 1½	♈ 8.48.53	26.15. 7	♈ 8.48.51	26.14.57	−0. 2	−0.10
9. 7. 1	18.44. 4	24.11.56	18.43.51	24.12.17	−0.13	+0.21
10. 6. 6	20.40.50	23.43.32	20.40.23	23.43.25	−0.27	−0. 7
13. 7. 9	25.59.48	22.17.28	26. 0. 8	22.16.32	+0.20	−0.56
25. 7.59	♉ 9.35. 0	17.56.30	♉ 9.34.11	17.56. 6	−0.49	−0.24
30. 8.22	13.19.51	16.42.18	13.18.28	16.40. 5	−1.23	−2.13
Feb. 2. 6.35	15.13.53	16. 4. 1	15.11.59	16. 2. 7	−1.54	−1.54
5. 7. 4½	16.59. 6	15.27. 3	16.59.17	15.27. 0	+0.11	−0. 3
25. 8.41	26.18.35	12.46.46	26.16.59	12.45.22	−1.36	−1.24
Mar. 1.11.10	27.52.42	12.23.40	27.51.47	12.22.28	−0.55	−1.12
5.11.39	29.18. 0	12. 3.16	29.20.11	12. 2.50	+2.11	−0.26
9. 8.38	0.43. 4	11.45.52	♊ 0.42.43	11.45.35	−0.21	−0.17

Obſervationes cometæ hujus a principio ad finem non minus congruunt cum motu cometæ in orbe jam deſcripto, quam motus planetarum congruere ſolent cum eorum theoriis, & congruendo probant unum & eundem fuiſſe cometam, qui toto hoc tempore apparuit, ejuſque orbem hic recte definitum fuiſſe.

In tabula præcedente omiſimus obſervationes diebus *Novembris* 16, 18, 20 & 23 ut minus accuratas. Nam cometa his etiam temporibus obſervatus fuit. *Ponthæus* utique & ſocii, *Novem.* 17. ſt. vet. hora ſexta matutina *Romæ*, id eſt, hora 5. 10′ *Londini*, filis ad fixas applicatis, cometam obſervarunt in ♎ 8gr. 30′ cum latitudine auſtrali 0gr. 40′. Extant eorum obſervationes in tractatu, quem *Ponthæus*

thæus de hoc cometa in lucem edidit. *Cellius*, qui aderat & obſervationes ſuas in epiſtola ad *D. Caſſinum* miſit, cometam eadem hora vidit in ♎ 8^{gr}. 30′ cum latitudine auſtrali 0^{gr}. 30′. Eadem hora *Galletius Avenioni* (id eſt, hora matutina 5. 42 *Londini*) cometam vidit in ♎ 8^{gr} ſine latitudine, Cometa autem per theoriam jam fuit in ♎ 8^{gr}. 16′. 45″ cum latitudine auſtrali 0^{gr}. 53′. 7″.

Nov. 18. hora matutina 6. 30′ *Romæ* (id eſt, hora 5, 40′ *Londini*) *Ponthæus* cometam vidit in ♎ 13^{gr}. 30′ cum latitudine auſtrali 1^{gr}. 20′. *Cellius* in ♎ 13^{gr}. 30′ cum latitudine auſtrali 1^{gr}. 00′. *Galletius* autem hora matutina 5. 30′ *Avenioni* cometam vidit in ♎ 13^{gr}. 00′, cum latitudine auſtrali 1^{gr}. 00′. Et *R. P. Ango* in academia *Flexienſi* apud *Gallos*, hora quinta matutina (id eſt, hora 5. 9′ *Londini*) cometam vidit in medio inter ſtellas duas parvas, quarum una media eſt trium in recta linea in virginis auſtrali manu, *Bayero* ψ, & altera eſt extrema alæ *Bayero* θ. Unde cometa tunc fuit in ♎ 12^{gr}. 46′ cum latitudine auſtrali 50′. Eodem die *Boſtoniæ* in *Nova-Anglia* in latitudine 42½ graduum, hora quinta matutina, (id eſt *Londini* hora matutina 9. 44′) cometa viſus eſt prope ♎ 14^{gr}, cum latitudine auſtrali 1^{gr}. 30′, uti a cl. *Halleio* accepi.

Nov. 19. hora mat. 4½ *Cantabrigiæ*, cometa (obſervante juvene quodam) diſtabat a ſpica ♍ quaſi 2^{gr} boreazephyrum verſus. Erat autem ſpica in ♎ 19^{gr}. 23′. 47″ cum lat. auſtr. 2^{gr}. 1′. 59″. Eodem die hor. 5. mat. *Boſtoniæ* in *Nova-Anglia*, cometa diſtabat a ſpica ♍ gradu uno, differentia latitudinum exiſtente 40′. Eodem die in inſula *Jamaica*, cometa diſtabat a ſpica intervallo quaſi gradus unius. Eodem die D. *Arthurus Storer* ad fluvium *Patuxent*, prope *Hunting-Creek* in *Maryland*, in confinio *Virginiæ* in lat. 38½^{gr}, hora quinta matutina (id eſt, hora 10^{h} *Londini*) cometam vidit ſupra ſpicam ♍, & cum ſpica propemodum conjunctum, exiſtente diſtantia inter eoſdem quaſi ¾^{gr}. Et ex his obſervationibus inter ſe collatis colligo quod hora 9. 44′ *Londini* cometa erat in ♎ 18^{gr}. 50′ cum latitudine auſtrali 1^{gr}. 25′ circiter. Cometa autem per theoriam jam erat in ♎ 18^{gr}. 52′. 15″ cum latitudine auſtrali 1^{gr}. 26′. 54″.

Nov. 20. D. *Montenarus* aſtronomiæ profeſſor *Paduenſis*, hora ſexta matutina *Venetiis* (id eſt, hora 5. 10′ *Londini*) cometam vidit in ♎ 23^{gr}. cum latitudine auſtrali 1^{gr}. 30′. Eodem die *Boſtoniæ*, diſtabat

cometa

cometa a ſpica ♍, 4^{gr}. longitudinis in orientem, ideoque erat in ♎ 23^{gr}. 24′ circiter.

Nov. 21. *Ponthæus* & ſocii hor. mat. 7¼ cometam obſervarunt in ♎ 27^{gr}. 50′ cum latitudine auſtrali 1^{gr}. 16′, *Cellius* in ♎ 28^{gr}. *Ango* hora quinta matutina in ♎ 27^{gr}. 45′, *Montenarus* in ♎ 27^{gr}. 51′. Eodem die in inſula *Jamaica* cometa viſus eſt prope principium ſcorpii, eandemque circiter latitudinem habuit cum ſpica virginis, id eſt, 2^{gr}. 2′. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballaſoræ* in *India Orientali*, (id eſt ad horam noctis præcedentis 11. 20′ *Londini*) capta eſt diſtantia cometæ a ſpica ♍ 7^{gr}. 35′ in orientem. In linea recta erat inter ſpicam & lancem, ideoque verſabatur in ♎ 26^{gr}. 58′ cum lat. auſtrali 1^{gr}. 11′ circiter; & poſt horas 5 & 40′ (ad horam ſcilicet quintam matutinam *Londini*) erat in ♎ 28^{gr}. 12′ cum lat. auſtr. 1^{gr}. 16′. Per theoriam vero cometa jam erat in ♎ 28^{gr}. 10′. 36″, cum latitudine auſtrali 1^{gr}. 53′. 35″.

Nov. 22. Cometa viſus eſt a *Montenaro* in ♏ 2^{gr}. 33′. *Boſtoniæ* autem in *Nova-Anglia* apparuit in ♏ 3^{gr} circiter, eadem fere cum latitudine ac prius, id eſt, 1^{gr}. 30′. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballaſoræ* cometa obſervabatur in ♏ 1^{gr}. 50′; ideoque ad horam quintam matutinam *Londini* cometa erat in ♏ 3^{gr}. 5′ circiter. Eodem die *Londini* hora mat. 6½ *Hookius* noſter cometam vidit in ♏ 3^{gr}. 30′ *circiter*, idque in linea recta quæ tranſit per ſpicam virginis & cor leonis, non exacte quidem, ſed a linea illa paululum deflectentem ad boream. *Montenarus* itidem notavit quod linea a cometa per ſpicam ducta, hoc die & ſequentibus tranſibat per auſtrale latus cordis leonis, interpoſito perparvo intervallo inter cor leonis & hanc lineam. Linea recta per cor leonis & ſpicam virginis tranſiens, eclipticam ſecuit in ♍ 3^{gr}. 46′; in angulo 2^{gr}. 51′. Et ſi cometa locatus fuiſſet in hac linea in ♏ 3^{gr} ejus latitudo fuiſſet 2^{gr}. 26′. Sed cum cometa conſentientibus *Hookio* & *Montenaro*, nonnihil diſtaret ab hac linea boream verſus, latitudo ejus fuit paulo minor. Die 20. ex obſervatione *Montenari*, latitudo ejus propemodum æquabat latitudinem ſpicæ ♍, eratque 1^{gr}. 30′ circiter, & conſentientibus *Hookio*, *Montenaro* & *Angone* perpetuo augebatur, ideoque jam ſenſibiliter major erat quam 1^{gr}. 30′. Inter limites autem jam conſtitutos 2^{gr}. 26′ & 1^{gr}. 30′, magnitudine mediocri latitudo erit 1^{gr}. 58′ circiter. Cauda cometæ, conſentientibus *Hookio* & *Montenaro*, dirigebatur ad ſpicam ♍, declinans aliquantulum

quantulum a ſtella iſta, juxta *Hookium* in auſtrum, juxta *Montenarum* in boream; ideoque declinatio illa vix fuit ſenſibilis, & cauda æquatori fere parallela exiſtens, aliquantulum deflectebatur ab oppoſitione ſolis boream verſus.

Nov. 23. ſt. vet. hora quinta matutina *Noriburgi* (id eſt hora $4\frac{1}{3}$ *Londini*) D. *Zimmerman* cometam vidit in ♏ 8gr. 8′, cum latitudine auſtrali 2gr. 31′, captis ſcilicet ejus diſtantiis a ſtellis fixis.

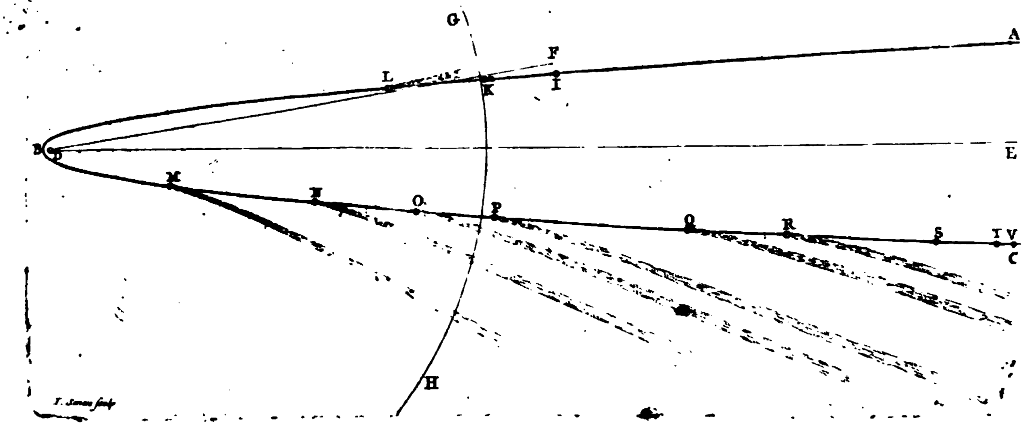
Nov. 24. Ante ortum ſolis cometa viſus eſt a *Montenaro* in ♏ 12gr. 52′, ad boreale latus rectæ quæ per cor leonis & ſpicam virginis ducebatur, ideoque latitudinem habuit paulo minorem quam 2gr. 38′. Hæc latitudo, uti diximus, ex obſervationibus *Montenari*, *Angonis* & *Hookii*, perpetuo augebatur; ideoque jam paulo major erat quam 1gr. 58′; & magnitudine mediocri, ſine notabili errore, ſtatui poteſt 2gr. 18′. Latitudinem *Ponthæus* & *Galletius* jam decreviſſe volunt, & *Cellius* & obſervator in *Nova Anglia* eandem fere magnitudinem retinuiſſe, ſcilicet gradus unius vel unius cum ſemiſſe. Craſſiores ſunt obſervationes *Ponthæi* & *Cellii*, eæ præſertim quæ per azimuthos & altitudines capiebantur, ut & eæ *Galletii*: meliores ſunt eæ quæ per poſitiones cometæ ad fixas a *Montenaro*, *Hookio*, *Angone* & obſervatore in *Nova-Anglia*, & nonnunquam a *Ponthæo* & *Cellio* ſunt factæ. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballaſoræ* cometa obſervabatur in ♏ 11gr. 45′; ideoque ad horam quintam matutinam *Londini* erat in ♏ 13gr circiter. Per theoriam vero cometa jam erat in ♏ 13gr. 22′. 42″.

Nov. 25. Ante ortum ſolis *Montenarus* cometam obſervavit in ♏ $17\frac{3}{4}$gr circiter. Et *Cellius* obſervavit eodem tempore quod cometa erat in linea recta inter ſtellam lucidam in dextro femore virginis & lancem auſtralem libræ, & hæc recta ſecat viam cometæ in ♏ 18gr. 36′. Per theoriam vero cometa jam erat in ♏ $18\frac{1}{3}$gr. circiter.

Congruunt igitur hæ obſervationes cum theoria quatenus congruunt inter ſe, & congruendo probant unum & eundem fuiſſe cometam, qui toto tempore a quarto die *Novembris* ad uſque nonum *Martii* apparuit. Trajectoria cometæ hujus bis ſecuit planum eclipticæ, & propterea non fuit rectilinea. Eclipticam ſecuit non in oppoſitis cœli partibus, ſed in fine virginis & principio capricorni, intervallo graduum 98 circiter; ideoque curſus cometæ plurimum de-

batur a circulo maximo. Nam & menſe *Novembri* curſus ejus tribus ſaltem gradibus ab ecliptica in auſtrum declinabat, & poſtea menſe *Decembri* gradibus 29 vergebat ab ecliptica in ſeptentrionem partibus duabus orbitæ, in quibus cometa tendebat in ſolem & redibat a ſole, angulo apparente graduum plus triginta ab invicem declinantibus, ut obſervavit *Montenarus*. Pergebat hic cometa per ſigna novem, a leonis ſcilicet ultimo gradu ad principium geminorum, præter ſignum leonis, per quod pergebat antequam videri cœpit; & nulla alia extat theoria, qua cometa tantam cœli partem motu regulari percurrat. Motus ejus fuit maxime inæquabilis. Nam circa diem vigeſimum *Novembris* deſcripſit gradus circiter quinque ſingulis diebus; dein motu retardato inter *Novemb.* 26 & *Decemb.* 12, ſpatio ſcilicet dierum quindecim cum ſemiſſe, deſcripſit gradus tantum 40; poſtea vero motu iterum accelerato, deſcripſit gradus fere quinque ſingulis diebus, antequam motus iterum retardari cœpit. Et theoria, quæ motui tam inæquabili per maximam cœli partem probe reſpondet, quæque eaſdem obſervat leges cum theoria planetarum, & cum accuratis obſervationibus aſtronomicis accurate congruit, non poteſt non eſſe vera.

Cæterum trajectoriam quam cometa deſcripſit, & caudam veram



quam ſingulis in locis projecit, viſum eſt annexo ſchemate in plano trajectoriæ delineatas exhibere: ubi *ABC* denotat trajectoriam cometæ, *D* ſolem, *DE* trajectoriæ axem, *DF* lineam nodorum,

GH

GH interſectionem ſphæræ orbis magni cum plano trajectoriæ, *I* locum cometæ *Nov.* 4. *Ann.* 1680, *K* locum ejuſdem *Nov.* 11, *L* locum *Nov.* 19, *M* locum *Dec.* 12, *N* locum *Dec.* 21, *O* locum *Dec.* 29, *P* locum *Jan.* 5 *ſequent.* *Q* locum *Jan.* 25, *R* locum *Feb.* 5, *S* locum *Feb.* 25, *T* locum *Mar.* 5, & *V* locum *Mar.* 9. Obſervationes vero ſequentes in cauda definienda adhibui.

Nov. 4 & 6. Cauda nondum apparuit. *Nov.* 11. Cauda jam cœpta non niſi ſemiſſem gradus unius longa tubo decempedali viſa fuit. *Nov.* 17. Cauda gradus amplius quindecim longa *Ponthæo* apparuit. *Nov.* 18. Cauda 30^{gr} longa, ſolique directe oppoſita in *Nova-Anglia* cernebatur, & protendebatur uſque ad ſtellam ♂, quæ tunc erat in ♍ 9^{gr}. 54′. *Nov.* 19. In *Mary-land* cauda viſa fuit gradus 15 vel 20 longa. *Dec.* 10 Cauda (obſervante *Flamſtedio*) tranſibat per medium diſtantiæ inter caudam ſerpentis Ophiuchi & ſtellam δ in aquilæ auſtrali ala, & deſinebat prope ſtellas *A*, *ω*, *b* in tabulis *Bayeri*. Terminus igitur erat in ♑ 19$\frac{1}{2}$^{gr}, cum latitudine boreali 34$\frac{1}{4}$^{gr} circiter. *Dec.* 11. Cauda ſurgebat ad uſque caput ſagittæ (*Bayero α, β,*) deſinens in ♑ 26^{gr}. 43′, cum latitudine boreali 38^{gr}. 34′. *Dec.* 12. Cauda tranſibat per medium ſagittæ, nec longe ultra protendebatur, deſinens in ♒ 4^{gr}, cum latitudine boreali 42$\frac{1}{2}$^{gr} circiter. Intelligenda ſunt hæc de longitudine caudæ clarioris. Nam luce obſcuriore, in cœlo forſan magis ſereno, cauda *Dec.* 12, hora 5. 40′ *Romæ* (obſervante *Ponthæo*) ſupra cygni uropygium ad gradus 10 ſeſe extulit; atque ab hac ſtella ejus latus ad occaſum & boream min. 45 deſtitit. Lata autem erat cauda his diebus gradus 3, juxta terminum ſuperiorem, ideoque medium ejus diſtabat a ſtella illa 2^{gr}. 15′ auſtrum verſus, & terminus ſuperior erat in ♓ 22^{gr}, cum latitudine boreali 61^{gr}. Et hinc longa erat cauda 70^{gr} circiter. *Dec.* 21. Eadem ſurgebat fere ad cathedram *Caſſiopeiæ*, æqualiter diſtans a β & *Schedir*, & diſtantiam ab utraque diſtantiæ earum ab invicem æqualem habens, ideoque deſinens in ♈ 24^{gr}, cum latitudine 47$\frac{1}{2}$^{gr}. *Dec.* 29. Cauda tangebat *Scheat* ſitam ad ſiniſtram, & intervallum ſtellarum duarum in pede boreali *Andromedæ* accurate complebat, & longa erat 54^{gr}; ideoque deſinebat in ♉ 19^{gr}, cum latitudine 35^{gr}. *Jan.* 5. Cauda tetigit ſtellam π in pectore *Andromedæ* ad latus ejus dextrum, & ſtellam μ in ejus cingulo ad latus ſiniſtrum; & (juxta obſervationes

Ttt 2 noſtras)

noſtras) longa erat 40gr; curva autem erat & convexo latere ſpectabat ad auſtrum. Cum circulo per ſolem & caput cometæ tranſeunte angulum confecit graduum 4 juxta caput cometæ; at juxta terminum alterum inclinabatur ad circulum illum in angulo 10 vel 11 graduum & chorda caudæ cum circulo illo continebat angulum graduum octo. *Jan.* 13. Cauda luce ſatis ſenſibili terminabatur inter *Alamech* & *Algol*, & luce tenuiſſima deſinebat e regione ſtellæ κ in latere *Perſei*. Diſtantia termini caudæ a circulo ſolem & cometam jungente erat $3^{gr}. 50'$, & inclinatio chordæ caudæ ad circulum illum $8\frac{1}{2}^{gr}$. *Jan.* 25 & 26. Cauda luce tenui micabat ad longitudinem graduum 6 vel 7; & nocte una & altera ſequente ubi cœlum valde ſerenum erat, luce tenuiſſima & ægerrime ſenſibili attingebat longitudinem graduum duodecim & paulo ultra. Dirigebatur autem ejus axis ad lucidam in humero orientali aurigæ accurate, ideoque declinabat ab oppoſitione ſolis boream verſus in angulo graduum decem. Denique *Feb.* 10. caudam oculis armatis aſpexi gradus duos longam. Nam lux prædicta tenuior per vitra non apparuit. *Ponthæus* autem *Feb.* 7. ſe caudam ad longitudinem graduum 12 *vidiſſe* ſcribit. *Feb.* 25 & deinceps cometa ſine cauda apparuit.

Orbem jam deſcriptum ſpectanti & reliqua cometæ hujus phænomena in animo revolventi, haud difficulter conſtabit, *quod corpora* cometarum ſunt ſolida, compacta, fixa ac durabilia ad inſtar corporum planetarum. Nam ſi nihil aliud eſſent quam vapores vel exhalationes terræ, ſolis & planetarum, cometa hicce in tranſitu ſuo per viciniam ſolis ſtatim diſſipari debuiſſet. Eſt enim calor ſolis ut radiorum denſitas, hoc eſt, reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum a ſole. Ideoque cum diſtantia cometæ a centro ſolis *Decemb.* 8. ubi in perihelio verſabatur, eſſet ad diſtantiam terræ a centro ſolis ut 6 ad 1000 circiter, calor ſolis apud cometam eo tempore erat ad calorem ſolis æſtivi apud nos ut 1000000 ad 36, ſeu 28000 ad 1. Sed calor aquæ ebullientis eſt quaſi triplo major quam calor quem terra arida concipit ad æſtivum ſolem, ut expertus ſum: & calor *ferri* candentis (ſi recte conjector) quaſi triplo vel quadruplo major quam calor aquæ ebullientis; ideoque calor, quem terra arida apud cometam in perihelio verſantem ex radiis ſolaribus concipere poſſet, quaſi 2000 vicibus major quam calor ferri candentis. Tanto autem calore

vapores

vapores & exhalationes, omniſque materia volatilis ſtatim conſumi ac diſſipari debuiſſent.

Cometa igitur in perihelio ſuo calorem immenſum ad ſolem concepit, & calorem illum diutiſſime conſervare poteſt. Nam globus ferri candentis digitum unum latus, calorem ſuum omnem ſpatio horæ unius in aëre conſiſtens vix amitteret. Globus autem major calorem diutius conſervaret in ratione diametri, propterea quod ſuperficies (ad cujus menſuram per contactum aëris ambientis refrigeratur) in illa ratione minor eſt pro quantitate materiæ ſuæ calidæ incluſæ. Ideoque globus ferri candentis huic terræ æqualis, id eſt, pedes plus minus 40000000 latus, diebus totidem, & idcirco annis 50000, vix refrigeſceret. Suſpicor tamen quod duratio caloris, ob cauſas latentes, augeatur in minore ratione quam ea diametri: & optarim rationem veram per experimenta inveſtigari.

Porro notandum eſt quod cometa menſe *Decembri*, ubi ad ſolem modo incaluerat, caudam emittebat longe majorem & ſplendidiorem quam antea menſe *Novembri*, ubi perihelium nondum attigerat. Et univerſaliter caudæ omnes maximæ & fulgentiſſimæ e cometis oriuntur ſtatim poſt tranſitum eorum per regionem ſolis. Conducit igitur calefactio cometæ ad magnitudinem caudæ. Et inde colligere videor quod cauda nihil aliud ſit quam vapor longe tenuiſſimus, quem caput ſeu nucleus cometæ per calorem ſuum emittit.

Cæterum de cometarum caudis triplex eſt opinio; eas vel jubar eſſe ſolis per tranſlucida cometarum capita propagatum, vel oriri ex refractione lucis in progreſſu ipſius a capite cometæ in terram, vel denique nubem eſſe ſeu vaporem a capite cometæ jugiter ſurgentem & abeuntem in partes a ſole averſas. Opinio prima eorum eſt qui nondum imbuti ſunt ſcientia rerum opticarum. Nam jubar ſolis in cubiculo tenebroſo non cernitur, niſi quatenus lux reflectitur e pulverum & fumorum particulis per aërem ſemper volitantibus: ideoque in aëre fumis craſſioribus infecto ſplendidius eſt, & ſenſum fortius ferit; in aëre clariore tenuius eſt & ægrius ſentitur: in cœlis autem ſine materia reflectente nullum eſſe poteſt. Lux non cernitur quatenus in jubare eſt, ſed quatenus inde reflectitur ad oculos noſtros. Nam viſio non fit niſi per radios qui in oculos impingunt. Requiritur igitur materia aliqua reflectens in regione caudæ, ne

cœlum

De Mundi Systemate

cœlum totum luce ſolis illuſtratum uniformiter ſplendeat. Opinio ſecunda multis premitur difficultatibus. Caudæ nunquam variegantur coloribus: qui tamen refractionum ſolent eſſe comites inſeparabiles. Lux fixarum & planetarum diſtincte ad nos tranſmiſſa demonſtrat medium cœleſte nulla vi refractiva pollere. Nam quod dicitur fixas ab *Ægyptiis* cometas nonnunquam viſas fuiſſe, id, quoniam rariſſime contingit, aſcribendum eſt nubium refractioni fortuitæ. Fixarum quoque radiatio & ſcintillatio ad refractiones tum oculorum tum aëris tremuli referendæ ſunt: quippe quæ admotis oculo teleſcopiis evaneſcunt. Aëris & aſcendentium vaporum tremore fit, ut radii facile de anguſto pupillæ ſpatio per vices detorqueantur, de latiore autem vitri objectivi apertura neutiquam. Inde eſt quod ſcintillatio in priori caſu generetur, in poſteriore autem ceſſet: & ceſſatio in poſteriore caſu demonſtrat regularem tranſmiſſionem lucis per cœlos ſine omni refractione ſenſibili. Nequis contendat quod caudæ non ſoleant videri in cometis, cum eorum lux non eſt ſatis fortis, quia tunc radii ſecundarii non habent ſatis virium ad oculos movendos, & propterea caudas fixarum non cerni: ſciendum eſt quod lux fixarum plus centum vicibus augeri poteſt mediantibus teleſcopiis, nec tamen caudæ cernuntur. Planetarum quoque lux copioſior eſt, caudæ vero nullæ: cometæ autem ſæpe *caudatiſſimi* ſunt, ubi capitum lux tenuis eſt & valde obtuſa. Sic enim cometa anni 1680, menſe *Decembri*, quo tempore caput luce ſua vix æquabat ſtellas ſecundæ magnitudinis, caudam emittebat ſplendore notabili uſque ad gradus 40, 50, 60 vel 70 longitudinis & ultra: poſtea *Jan.* 27 & 28 caput apparebat ut ſtella ſeptimæ tantum magnitudinis, cauda vero luce quidem pertenui ſed ſatis ſenſibili longa erat 6 vel 7 gradus, & luce obſcuriſſima, quæ cerni vix poſſet, porrigebatur ad gradum uſque duodecimum vel paulo ultra: ut ſupra dictum eſt. Sed & *Feb.* 9 & 10 ubi caput nudis oculis videri deſierat, caudam gradus duos longam per teleſcopium contemplatus ſum. Porro ſi cauda oriretur ex refractione materiæ cœleſtis, & pro figura cœlorum deflecteretur de ſolis oppoſitione, deberet deflexio illa in iiſdem cœli regionibus in eandem ſemper partem fieri. Atqui cometa anni 1680 *Decemb.* 28. hora $8\frac{1}{2}$ p. m. *Londini*, verſabatur in ♓ $8^{gr}. 41'$, cum latitudine boreali $28^{gr}. 6'$, ſole exiſtente in ♑ $18^{gr}. 26'$. Et cometa

meta anni 1577, *Dec.* 29 verſabatur in ♓ 8gr. 41′ cum latitudine boreali 28gr. 40′, ſole etiam exiſtente in ♑ 18gr. 26′ circiter. Utroque in caſu terra verſabatur in eodem loco, & cometa apparebat in eadem cœli parte: in priori tamen caſu cauda cometæ (ex meis & aliorum obſervationibus) declinabat angulo graduum 4½ ab oppoſitione ſolis aquilonem verſus; in poſteriore vero (ex obſervationibus *Tychonis*) declinatio erat graduum 21 in auſtrum. Igitur repudiata cœlorum refractione, ſupereſt ut phænomena caudarum ex materia aliqua lucem reflectente deriventur.

Caudas autem a capitibus oriri & in regiones a ſole averſas aſcendere confirmatur ex legibus quas obſervant. Ut quod in planis orbium cometarum per ſolem tranſeuntibus jacentes, deviant ab oppoſitione ſolis in eas ſemper partes, quas capita in orbibus illis progredientia relinquunt. Quod ſpectatori in his planis conſtituto apparent in partibus a ſole directe averſis; digrediente autem ſpectatore de his planis, deviatio paulatim ſentitur, & indies apparet major. Quod deviatio cæteris paribus minor eſt ubi cauda obliquior eſt ad orbem cometæ, ut & ubi caput cometæ ad ſolem propius accedit; præſertim ſi ſpectetur deviationis angulus juxta caput cometæ. Præterea quod caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurvantur. Quod curvatura major eſt ubi major eſt deviatio, & magis ſenſibilis ubi cauda cæteris paribus longior eſt: nam in brevioribus curvatura ægre animadvertitur. Quod deviationis angulus minor eſt juxta caput cometæ, major juxta caudæ extremitatem alteram, atque ideo quod cauda convexo ſui latere partes reſpicit a quibus fit deviatio, quæque in recta ſunt linea a ſole per caput cometæ in infinitum ducta. Et quod caudæ quæ prolixiores ſunt & latiores, & luce vegetiore micant, ſint ad latera convexa paulo ſplendidiores & limite minus indiſtincto terminatæ quam ad concava. Pendent igitur phænomena caudæ a motu capitis, non autem a regione cœli in qua caput conſpicitur; & propterea non fiunt per refractionem cœlorum, ſed a capite ſuppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in aëre noſtro fumus corporis cujuſvis igniti petit ſuperiora, idque vel perpendiculariter ſi corpus quieſcat, vel oblique ſi corpus moveatur in latus: ita in cœlis, ubi corpora gravitant in ſolem, fumi & vapores aſcendere debent a ſole (uti jam dictum eſt)

&

De Mundi Systemate

& ſuperiora vel recta petere, ſi corpus fumans quieſcit; vel oblique, ſi corpus progrediendo loca ſemper deſerit a quibus ſuperiores vaporis partes aſcenderant. Et obliquitas iſta minor erit ubi aſcenſus vaporis velocior eſt: nimirum in vicinia ſolis & juxta corpus fumans. Ex obliquitatis autem diverſitate incurvabitur vaporis columna: & quia vapor in columnæ latere præcedente paulo recentior eſt, ideo etiam is ibidem aliquanto denſior erit, lucemque propterea copioſius reflectet, & limite minus indiſtincto terminabitur. De caudarum agitationibus ſubitaneis & incertis, deque earum figuris irregularibus, quas nonnulli quandoque deſcribunt, hic nihil adjicio; propterea quod vel a mutationibus aëris noſtri, & motibus nubium caudas aliqua ex parte obſcurantium oriantur; vel forte a partibus viæ lacteæ, quæ cum caudis prætereuntibus confundi poſſint, ac tanquam earum partes ſpectari.

Vapores autem, qui ſpatiis tam immenſis implendis ſufficiant, ex cometarum atmoſphæris oriri poſſe, intelligetur ex raritate aëris noſtri. Nam aër juxta ſuperficiem terræ ſpatium occupat quaſi 850 partibus majus quam aqua ejuſdem ponderis, ideoque aëris columna cylindrica pedes 850 alta ejuſdem eſt ponderis cum aquæ columna pedali latitudinis ejuſdem. Columna autem aëris ad ſummitatem atmoſphæræ aſſurgens æquat pondere ſuo columnam aquæ pedes 33 altam circiter; & propterea ſi columnæ totius aëreæ pars inferior pedum 850 altitudinis dematur, pars reliqua ſuperior æquabit pondere ſuo columnam aquæ altam pedes 32. Inde vero (per regulam multis experimentis confirmatam, quod compreſſio aëris ſit ut pondus atmoſphæræ incumbentis, quodque gravitas ſit reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum a centro terræ) computationem per corol. prop. XXII. lib. II. ineundo, inveni quod aër, ſi aſcendatur a ſuperficiæ terræ ad altitudinem ſemidiametri unius terreſtris, rarior ſit quam apud nos in ratione longe majori, quam ſpatii omnis infra orbem ſaturni ad globum diametro digiti unius deſcriptum. Ideoque globus aëris noſtri digitum unum latus, ea cum raritate quam haberet in altitudine ſemidiametri unius terreſtris, impleret omnes planetarum regiones uſque ad ſphæram ſaturni & longe ultra. Proinde cum aër adhuc altior in immenſum rareſcat; & coma ſeu atmoſphæra cometæ, aſcendendo ab illius centro, quaſi decuplo altior ſit

quam

quam ſuperficies nuclei, deinde cauda adhuc altius aſcendat, debebit cauda eſſe quam rariſſima. Et quamvis ob longe craſſiorem cometarum atmoſphæram, magnamque corporum gravitationem ſolem verſus, & gravitationem particularum aëris & vaporum in ſe mutuo, fieri poſſit ut aër in ſpatiis cœleſtibus inque cometarum caudis non adeo rareſcat; perexiguam tamen quantitatem aëris & vaporum ad omnia illa caudarum phænomena abunde ſufficere, ex hac computatione perſpicuum eſt. Nam & caudarum inſignis raritas colligitur ex aſtris per eas tranſlucentibus. Atmoſphæra terreſtris luce ſolis ſplendens, craſſitudine ſua paucorum milliarium, & aſtra omnia & ipſam lunam obſcurat & extinguit penitus: per immenſam vero caudarum craſſitudinem, luce pariter ſolari illuſtratam, aſtra minima ſine claritatis detrimento tranſlucere noſcuntur. Neque major eſſe ſolet caudarum plurimarum ſplendor, quam aëris noſtri in tenebroſo cubiculo latitudine digiti unius duorumve lucem ſolis in jubare reflectentis.

Quo temporis ſpatio vapor a capite ad terminum caudæ aſcendit, cognoſci fere poteſt ducendo rectam a termino caudæ ad ſolem, & notando locum ubi recta illa trajectoriam ſecat. Nam vapor in termino caudæ, ſi recta aſcendat a ſole, aſcendere cœpit a capite, quo tempore caput erat in loco interſectionis. At vapor non recta aſcendit a ſole, ſed motum cometæ, quem ante aſcenſum ſuum habebat, retinendo, & cum motu aſcenſus ſui eundem componendo, aſcendit oblique. Unde verior erit problematis ſolutio, ut recta illa, quæ orbem ſecat, parallela ſit longitudini caudæ, vel potius (ob motum curvilineum cometæ) ut eadem a linea caudæ divergat. Hoc pacto inveni quod vapor, qui erat in termino caudæ *Jan.* 25, aſcendere cœperat a capite ante *Dec.* 11, ideoque aſcenſu ſuo toto dies plus 45 conſumpſerat. At cauda illa omnis quæ *Dec.* 10 apparuit, aſcenderat ſpatio dierum illorum duorum, qui a tempore perihelii cometæ elapſi fuerant. Vapor igitur ſub initio in vicinia ſolis celerrime aſcendebat, & poſtea cum motu per gravitatem ſuam ſemper retardato aſcendere pergebat; & aſcendendo augebat longitudinem caudæ: cauda autem, quamdiu apparuit, ex vapore fere omni conſtabat, qui a tempore perihelii aſcenderat; & vapor, qui primus aſcendit, & terminum caudæ compoſuit, non prius evanuit quam ob nimiam ſuam tam a ſole illuſtrante quam ab oculis noſtris diſtantiam videri

deſiit. Unde etiam caudæ cometarum aliorum, quæ breves ſunt, non aſcendunt motu celeri & perpetuo a capitibus & mox evaneſcunt, ſed ſunt permanentes vaporum & exhalationum columnæ, a capitibus lentiſſimo multorum dierum motu propagatæ, quæ, participando motum illum capitum quem habuere ſub initio, per cœlos una cum capitibus moveri pergunt. Et hinc rurſus colligitur ſpatia cœleſtia vi reſiſtendi deſtitui; utpote in quibus non ſolum ſolida planetarum & cometarum corpora, ſed etiam rariſſimi caudarum vapores motus ſuos velociſſimos liberrime peragunt ac diutiſſime conſervant.

Aſcenſum caudarum ex atmoſphæris capitum & progreſſum in partes a ſole averſas *Keplerus* aſcribit actioni radiorum lucis materiam caudæ ſecum rapientium. Et auram longe tenuiſſimam in ſpatiis liberrimis actioni radiorum cedere, non eſt a ratione prorſus alienum, non obſtante quod ſubſtantiæ craſſæ impeditiſſimis in regionibus noſtris a radiis ſolis ſenſibiliter propelli nequeant. Alius particulas tam leves quam graves dari poſſe exiſtimat, & materiam caudarum levitare, perque levitatem ſuam a ſole aſcendere. Cum autem gravitas corporum terreſtrium ſit ut materia in corporibus, ideoque ſervata quantitate materiæ intendi & remitti nequeat, ſuſpicor aſcenſum illum ex rarefactione materiæ caudarum potius oriri. Aſcendit fumus in camino impulſu aëris cui innatat. Aër ille per calorem rarefactus aſcendit, ob diminutam ſuam gravitatem ſpecificam, & fumum implicatum rapit ſecum. Quidni cauda cometæ ad eundem modum aſcenderit a ſole? Nam radii ſolares non agitant media, quæ permeant, niſi in reflexione & refractione. Particulæ reflectentes ea actione calefactæ calefacient auram ætheream cui implicantur. Illa calore ſibi communicato rarefiet, & ob diminutam ea raritate gravitatem ſuam ſpecificam, qua prius tendebat in ſolem, aſcendet & ſecum rapiet particulas reflectentes ex quibus cauda componitur: Ad aſcenſum vaporum conducit etiam, quod hi gyrantur circa ſolem & ea actione conantur a ſole recedere, at ſolis atmoſphæra & materia cœlorum vel plane quieſcit, vel motu ſolo quem a ſolis rotatione acceperit, tardius gyratur. Hæ ſunt cauſæ aſcenſus caudarum in vicinia ſolis, ubi orbes curviores ſunt, & cometæ intra denſiorem & ea ratione graviorem ſolis atmoſphæram conſiſtunt, & caudas quam longiſſimas mox emittunt. Nam caudæ, quæ tunc naſcuntur, conſervando motum ſuum & interea verſus ſolem gravitando, movebuntur

vebuntur circa ſolem in ellipſibus pro more capitum, & per motum illum capita ſemper comitabuntur & iis liberrime adhærebunt. Gravitas enim vaporum in ſolem non magis efficiet ut caudæ poſtea decidant a capitibus ſolem verſus, quam gravitas capitum efficere poſſit, ut hæc decidant a caudis. Communi gravitate vel ſimul in ſolem cadent, vel ſimul in aſcenſu ſuo retardabuntur; ideoque gravitas illa non impedit, quo minus caudæ & capita poſitionem quamcunque ad invicem a cauſis jam deſcriptis, aut aliis quibuſcunque facillime accipiant & poſtea liberrime ſervent.

Caudæ igitur, quæ in cometarum periheliis naſcuntur, in regiones longinquas cum eorum capitibus abibunt, & vel inde poſt longam annorum ſeriem cum iiſdem ad nos redibunt, vel potius ibi rarefactæ paulatim evaneſcent. Nam poſtea in deſcenſu capitum ad ſolem caudæ novæ breviuſculæ lento motu a capitibus propagari debebunt, & ſubinde in periheliis cometarum illorum, qui ad uſque atmoſphæram ſolis deſcendunt, in immenſum augeri. Vapor enim in ſpatiis illis liberrimis perpetuo rareſcit ac dilatatur. Qua ratione fit ut cauda omnis ad extremitatem ſuperiorem latior ſit quam juxta caput cometæ. Ea autem rarefactione vaporem perpetuo dilatatum diffundi tandem & ſpargi per cœlos univerſos, deinde paulatim in planetas per gravitatem ſuam attrahi, & cum eorum atmoſphæris miſceri rationi conſentaneum videtur. Nam quemadmodum maria ad conſtitutionem terræ hujus omnino requiruntur, idque ut ex iis per calorem ſolis vapores copioſe ſatis excitentur, qui vel in nubes coacti decidant in pluviis, & terram omnem ad procreationem vegetabilium irrigent & nutriant; vel in frigidis montium verticibus condenſati (ut aliqui cum ratione philoſophantur) decurrant in fontes & flumina: ſic ad conſervationem marium & humorum in planetis requiri videntur cometæ, ex quorum exhalationibus & vaporibus condenſatis, quicquid liquoris per vegetationem & putrefactionem conſumitur & in terram aridam convertitur, continuo ſuppleri & refici poſſit. Nam vegetabilia omnia ex liquoribus omnino creſcunt, dein magna ex parte in terram aridam per putrefactionem abeunt, & limus ex liquoribus putrefactis perpetuo decidit. Hinc moles terræ aridæ indies augetur, & liquores, niſi aliunde augmentum ſumerent, perpetuo decreſcere deberent, ac tandem deficere. Porro ſuſpicor ſpiritum illum, qui aëris noſtri pars minima eſt ſed ſubtiliſſima &

De Mundi Systemate

optima, & ad rerum omnium vitam requiritur, ex cometis præcipue venire.

Atmoſphæræ cometarum in deſcenſu eorum in ſolem excurrendo in caudas, diminuuntur, & (ea certe in parte quæ ſolem reſpicit) anguſtiores redduntur: & viciſſim in receſſu eorum a ſole, ubi jam minus excurrunt in caudas, ampliantur; ſi modo phænomena eorum *Hevelius* recte notavit. Minimæ autem apparent, ubi capita jam modo ad ſolem calefacta in caudas maximas & fulgentiſſimas abiere, & nuclei fumo forſan craſſiore & nigriore in atmoſphærarum partibus infimis circundantur. Nam fumus omnis ingenti calore excitatus craſſior & nigrior eſſe ſolet. Sic caput cometæ, de quo egimus, in æqualibus a ſole ac terra diſtantiis obſcurius apparuit poſt perihelium ſuum quam antea. Menſe enim *Decembri* cum ſtellis tertiæ magnitudinis conferri ſolebat, at menſe *Novembri* cum ſtellis primæ & ſecundæ. Et qui utrumque viderant, majorem deſcribunt cometam priorem. Nam juveni cuidam *Cantabrigienſi, Novem.* 19, cometa hicce luce ſua quantumvis plumbea & obtuſa, æquabat ſpicam virginis, & clarius micabat quam poſtea. Et *Montenaro Nov.* 20. ſt. vet. cometa apparebat major ſtellis primæ magnitudinis, exiſtente cauda duorum graduum longitudinis. Et *D. Storer* literis, quæ in manus noſtras incidere, ſcripſit caput ejus menſe *Decembri*, ubi caudam maximam & fulgentiſſimam emittebat, parvum eſſe & magnitudine viſibili longe cedere cometæ, qui menſe *Novembri* ante ſolis ortum apparuerat. Cujus rei rationem eſſe conjectabatur, quod materia capitis ſub initio copioſior eſſet, & paulatim conſumeretur.

Eodem ſpectare videtur, quod capita cometarum aliorum, qui caudas maximas & fulgentiſſimas emiſerunt, apparuerint ſubobſcura & exigua. Nam anno 1668 *Mart.* 5. ſt. nov. hora ſeptima veſpertina *R. P. Valentinus Eſtancius, Braſiliæ* agens, cometam vidit horizonti proximum ad occaſum ſolis brumalem, capite minimo & vix conſpicuo, cauda vero ſupra modum fulgente, ut ſtantes in littore ſpeciem ejus e mari reflexam facile cernerent. Speciem utique habebat trabis ſplendentis longitudine 23 graduum, ab occidente in auſtrum vergens, & horizonti fere parallela. Tantus autem ſplendor tres ſolum dies durabat, ſubinde notabiliter decreſcens; & interea decreſcente ſplendore aucta eſt magnitudine cauda. Unde etiam in

Luſi-

Luſitania quartam fere cœli partem (id eſt, gradus 45) occupaſſe dicitur ab occidente in orientem ſplendore cum inſigni protenſa; nec tamen tota apparuit, capite ſemper in his regionibus infra horizontem deliteſcente. Ex incremento caudæ & decremento ſplendoris manifeſtum eſt, quod caput a ſole receſſit, eique proximum fuit ſub initio, pro more cometæ anni 1680. Et in chronico *Saxonico* ſimilis legitur cometa anni 1106, *cujus ſtella erat parva & obſcura* (ut ille anni 1680) *ſed ſplendor qui ex ea exivit valde clarus & quaſi ingens trabs ad orientem & aquilonem tendebat*, ut habet etiam *Hevelius* ex *Simeone Dunelmenſi* Monacho. Apparuit initio menſis *Februarii*, ac deinceps circa veſperam, ad occaſum ſolis brumalem. Inde vero & ex ſitu caudæ colligitur caput fuiſſe ſoli vicinum. *A ſole*, inquit *Matthæus Pariſienſis*, *diſtabat quaſi cubito uno, ab hora tertia* [rectius ſexta] *uſque ad horam nonam radium ex ſe longum emittens.* Talis etiam erat ardentiſſimus ille cometa ab *Ariſtotele* deſcriptus lib. 1. Meteor. 6. *cujus caput primo die non conſpectum eſt, eo quod ante ſolem vel ſaltem ſub radiis ſolaribus occidiſſet, ſequente vero die quantum potuit viſum eſt. Nam quam minima fieri poteſt diſtantia ſolem reliquit, & mox occubuit. Ob nimium ardorem* [caudæ ſcilicet] *nondum apparebat capitis ſparſus ignis, ſed procedente tempore* (ait Ariſtoteles) *cum* [cauda] *jam minus flagraret, reddita eſt* [capiti] *cometæ ſua facies. Et ſplendorem ſuum ad tertiam uſque cœli partem* [id eſt, ad 60gr] *extendit. Apparuit autem tempore hyberno* [an. 4. olymp. 101.] *& aſcendens uſque ad cingulum orionis ibi evanuit.* Cometa ille anni 1618, qui e radiis ſolaribus caudatiſſimus emerſit, ſtellas primæ magnitudinis æquare vel paulo ſuperare videbatur, ſed majores apparuere cometæ non pauci, qui caudas breviores habuere. Horum aliqui jovem, alii venerem vel etiam lunam æquaſſe traduntur.

Diximus cometas eſſe genus planetarum in orbibus valde eccentricis circa ſolem revolventium. Et quemadmodum e planetis non caudatis minores eſſe ſolent, qui in orbibus minoribus & ſoli propioribus gyrantur, ſic etiam cometas, qui in periheliis ſuis ad ſolem propius accedunt, ut plurimum minores eſſe, ne ſolem attractione ſua nimis agitent, rationi conſentaneum videtur. Orbium vero tranſverſas diametros & revolutionum tempora periodica, ex collatione cometarum in iiſdem orbibus poſt longa temporum intervalla redeuntium,

untium, determinanda relinquo. Interea huic negotio propoſitio ſequens lumen accendere poteſt.

PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXII.

Inventam cometæ trajectoriam corrigere.

Operatio 1. Aſſumatur poſitio plani trajectoriæ, per propoſitionem ſuperiorem inventa; & ſeligantur tria loca cometæ obſervationibus accuratiſſimis definita, & ab invicem quam maxime diſtantia; ſitque A tempus inter primam & ſecundam, ac B tempus inter ſecundam ac tertiam. Cometam autem in eorum aliquo in perigæo verſari convenit, vel ſaltem non longe a perigæo abeſſe. Ex his locis apparentibus inveniantur, per operationes trigonometricas, loca tria vera cometæ in aſſumpto illo plano trajectoriæ. Deinde per loca illa inventa, circa centrum ſolis ceu umbilicum, per operationes arithmeticas, ope prop. xxi. lib. i. inſtitutas, deſcribatur ſectio conica: & ejus areæ, radiis a ſole ad loca inventa ductis terminatæ, ſunto D & E; nempe D area inter obſervationem primam & ſecundam, & E area inter ſecundam ac tertiam. Sitque T tempus totum, quo area tota D+E velocitate cometæ per prop. xvi. lib. i. inventa deſcribi debet.

Oper. 2. Augeatur longitudo nodorum plani trajectoriæ, additis ad longitudinem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur P; & ſervetur plani illius inclinatio ad planum eclipticæ. Deinde ex prædictis tribus cometæ locis obſervatis, inveniantur in hoc novo plano loca tria vera, ut ſupra: deinde etiam orbis per loca illa tranſiens, & ejuſdem areæ duæ inter obſervationes deſcriptæ, quæ ſint d & e, nec non tempus totum t, quo area tota $d+e$ deſcribi debeat.

Oper. 3. Servetur longitudo nodorum in operatione prima, & augeatur inclinatio plani trajectoriæ ad planum eclipticæ, additis ad inclinationem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur Q. Deinde ex obſervatis prædictis tribus cometæ locis apparentibus inveniantur in hoc novo plano loca tria vera, orbiſque per loca illa tranſiens, ut & ejuſdem areæ duæ inter obſervationes deſcriptæ, quæ ſint δ & ε, & tempus totum τ, quo area tota $\delta+\varepsilon$ deſcribi debeat.

Jam

Jam ſit C ad 1 ut A ad B, & G ad 1 ut D ad E, & g ad 1 ut d ad e, & γ ad 1 ut δ ad ϵ; ſitque S tempus verum inter obſervationem primam ac tertiam; & ſignis + & — probe obſervatis quærantur numeri m & n, ea lege, ut ſit $2G-2C=mG-mg+nG-n\gamma$, & $2T-2S$ æquale $mT-mt+nT-n\tau$. Et ſi in operatione prima I deſignet inclinationem plani trajectoriæ ad planum eclipticæ, & K longitudinem nodi alterutrius, erit $I+nQ$ vera inclinatio plani trajectoriæ ad planum eclipticæ, & $K+mP$ vera longitudo nodi. Ac denique ſi in operatione prima, ſecunda ac tertia, quantitates R, r & ϱ deſignent latera recta trajectoriæ, & quantitates $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$ ejuſdem latera tranſverſa reſpective: erit $R+mr-mR+n\varrho-nR$ verum latus rectum, & $\frac{1}{L+ml-mL+n\lambda-nL}$ verum latus tranſverſum trajectoriæ quam cometa deſcribit. Dato autem latere tranſverſo datur etiam tempus periodicum cometæ. *Q. E. I.*

Cæterum cometarum revolventium tempora periodica, & orbium latera tranſverſa, haud ſatis accurate determinabuntur, niſi per collationem cometarum inter ſe, qui diverſis temporibus apparent. Si plures cometæ, poſt æqualia temporum intervalla, eundem orbem deſcripſiſſe reperiantur, concludendum erit hos omnes eſſe unum & eundem cometam, in eodem orbe revolventem. Et tum demum ex revolutionum temporibus dabuntur orbium latera tranſverſa, & ex his lateribus determinabuntur orbes elliptici.

In hunc finem computandæ ſunt igitur cometarum plurium trajectoriæ, ex hypotheſi quod ſint parabolicæ. Nam hujuſmodi trajectoriæ cum phænomenis ſemper congruent quamproxime. Id liquet, non tantum ex trajectoria parabolica cometæ anni 1680, quam cum obſervationibus ſupra contuli, ſed etiam ex ea cometæ illius inſignis, qui annis 1664 & 1665 apparuit, & ab *Hevelio* obſervatus fuit. Is ex obſervationibus ſuis longitudines & latitudines hujus cometæ computavit, ſed minus accurate. Ex iiſdem obſervationibus *Halleius* noſter loca cometæ hujus denuo computavit, & tum demum ex locis ſic inventis trajectoriam cometæ determinavit. Invenit autem ejus nodum aſcendentem in ♊ 21gr. 13′. 55″, inclinationem orbitæ ad planum eclipticæ 21gr. 18′. 40″, diſtantiam perihelii

lii a nodo in orbita 49$^{gr.}$. 27′. 30″. Perihelium in ♌ 8$^{gr.}$. 40′. 30″ cum latitudine auſtrina heliocentrica 16$^{gr.}$. 1′. 45″. Cometam in perihelio *Novem.* 24^{d}. 11^{h}. 52′. p. m. tempore æquato *Londini*, vel 13^{h}. 8′ *Gedani*, ſtylo veteri, & latus rectum parabolæ 410286, exiſtente mediocri terræ a ſole diſtantia 100000. Quam probe loca cometæ in hoc orbe computata congruunt cum obſervationibus, patebit ex tabula ſequente ab *Halleio* ſupputata.

Temp. Appar. *Gedani*, ſt. vet.	Obſervatæ Cometæ diſtantiæ.	gr. ′ ″	Loca obſervata. gr. ′ ″	Loca computata in Orbe. gr. ′ ″
Decemb. 3^{d}. 18^{h}. 29′½	a Corde Leonis	46 . 24 . 20	Long. ♎ 7 . 1 . 0	♎ 7 . 1 . 29
	a Spica Virginis	22 . 52 . 10	Lat. auſt. 21 . 39 . 0	21 . 38 . 50
4 . 18 . 1½	a Corde Leonis	46 . 2 . 45	Long. ♎ 16 . 15 . 0	♎ 6 . 16 . 5
	a Spica Virginis	23 . 52 . 40	Lat. auſt. 22 . 24 . 0	22 . 24 . 0
7 . 17 . 48	a Corde Leonis	44 . 48 . 0	Long. ♎ 3 . 6 . 0	♎ 3 . 7 . 33
	a Spica Virginis	27 . 56 . 40	Lat. auſt 25 . 22 . 0	25 . 21 . 40
17 . 14 . 43	a Corde Leonis	53 . 15 . 15	Long. ♌ 2 . 56 . 0	♌ 2 . 56 . 0
	ab Hum. Orionis dext.	45 . 43 . 30	Lat auſt. 49 . 25 . 0	49 . 25 . 0
19 . 9 . 25	a Procyone	35 . 13 . 50	Long. ♊ 28 . 40 . 30	♊ 28 . 43 . 0
	a Lucid. Mandib. Ceti	52 . 56 . 0	Lat. auſt. 45 . 48 . 0	45 . 46 . 0
20 . 9 . 53½	a Procyone	40 . 49 . 0	Long. ♊ 13 . 3 . 0	♊ 3 . 5 . 0
	a Lucid. Mandib. Ceti	40 . 4 . 0	Lat. auſt. 39 . 54 . 0	39 . 53 . 0
21 . 9 . 9½	ab Hum. dext. Orionis	26 . 21 . 25	Long. ♊ 2 . 16 . 0	♊ 2 . 18 . 30
	a Lucid. Mandib. Ceti	29 . 28 . 0	Lat. auſt. 33 . 41 . 0	33 . 39 . 40
22 . 9 . 0	ab Hum. dext. Orionis	29 . 47 . 0	Long. ♉ 24 . 24 . 0	♉ 24 . 27 . 0
	a Lucid. Mandib. Ceti	20 . 29 . 30	Lat. auſt. 27 . 45 . 0	27 . 46 . 0
26 . 7 . 58	a Lucida Arietis	23 . 20 . 0	Long. ♉ 9 . 0 . 0	♉ 9 . 2 . 28
	ab Aldebaran	26 . 44 . 0	Lat. auſt. 12 . 36 . 0	12 . 34 . 13
27 . 6 . 45	a Lucida Arietis	20 . 45 . 0	Long. ♉ 7 . 5 . 40	♉ 7 . 8 . 45
	ab Aldebaran	28 . 10 . 0	Lat. auſt. 10 . 23 . 0	10 . 23 . 13
28 . 7 . 39	a Lucida Arietis	18 . 29 . 0	Long. ♉ 5 . 24 . 45	♉ 5 . 27 . 52
	a Palilicio	29 . 37 . 0	Lat. auſt. 8 . 22 . 50	8 . 23 . 37
31 . 6 . 45	a Cing. Androm.	30 . 48 . 10	Long. ♉ 2 . 7 . 40	♉ 2 . 8 . 20
	a Palilicio	32 . 53 . 30	Lat. auſt. 4 . 13 . 0	4 . 16 . 25
Jan. 1665. 7 . 7 . 37½	a Cing. Androm.	25 . 11 . 0	Long. ♈ 28 . 24 . 47	♈ 28 . 24 . 0
	a Palilicio	37 . 12 . 25	Lat. bor. 0 . 54 . 0	0 . 53 . 0
13 . 7 . 0	a capite Androm.	28 . 7 . 10	Long. ♈ 27 . 6 . 54	♈ 27 . 6 . 39
	a Palilicio	38 . 55 . 20	Lat. bor. 3 . 6 . 50	3 . 7 . 40
24 . 7 . 29	a Cing. Androm.	20 . 32 . 15	Long. ♈ 26 . 29 . 15	♈ 26 . 28 . 50
	a Palilicio	40 . 5 . 0	Lat. bor. 5 . 25 . 50	5 . 26 . 0
Feb. 7 . 8 . 37			Long. ♈ 27 . 4 . 46	♈ 27 . 24 . 55
			Lat. bor. 7 . 3 . 2	7 . 3 . 15
22 . 8 . 46			Long. ♈ 28 . 29 . 46	♈ 28 . 29 . 58
			Lat. bor. 8 . 12 . 36	8 . 10 . 25
Mar. 1 . 8 . 16			Long. ♈ 29 . 18 . 15	♈ 29 . 18 . 20
			Lat. bor. 8 . 36 . 26	8 . 36 . 12
7 . 8 . 37			Long. ♈ 0 . 2 . 48	♉ 0 . 2 . 42
			Lat. bor. 8 . 56 . 30	8 . 56 . 56

Menſe

Menſe *Februario* anni ineuntis 1665, ſtella prima arietis, quam in ſequentibus vocabo *γ*, erat in ♈ $28^{gr}. 30'. 15''$ cum latitudine boreali $7^{gr}. 8'. 58''$. Secunda arietis erat in ♈ $29^{gr}. 17'. 18''$ cum latitudine boreali $8^{gr}. 28'. 16''$. Et ſtella quædam alia ſeptimæ magnitudinis, quam vocabo *A*, erat in ♈ $28^{gr}. 24'. 45''$ cum latitudine boreali $8^{gr}. 28'. 33''$. Cometa vero *Feb.* $7^{d}. 7'. 30''$ *Pariſiis* (id eſt *Feb.* $7^{d}. 8'. 37''$ *Gedani*) ſt. vet. triangulum conſtituebat cum ſtellis illis *γ* & *A* rectangulum ad *γ*. Et diſtantia cometæ a ſtella *γ* æqualis erat diſtantiæ ſtellarum *γ* & *A*, id eſt $1^{gr}. 19'. 46''$ in circulo magno, atque ideo ea erat $1^{gr}. 20'. 26''$ in parallelo latitudinis ſtellæ *γ*. Quare ſi de longitudine ſtellæ *γ* detrahatur longitudo $1^{gr}. 20'. 26''$, manebit longitudo cometæ ♈ $27^{gr}. 9'. 49''$. *Auzoutius* ex hac ſua obſervatione cometam poſuit in ♈ $27^{gr}. 0'$ circiter. Et ex ſchemate, quo *Hookius* motum ejus delineavit, is jam erat in ♈ $26^{gr}. 59'. 24''$. Ratione mediocri poſui eundem in ♈ $27^{gr}. 4'. 46''$. Ex eadem obſervatione *Auzoutius* latitudinem cometæ jam poſuit 7^{gr} & $4'$ vel $5'$ boream verſus. Eandem rectius poſuiſſet $7^{gr}. 3'. 29''$, exiſtente ſcilicet differentia latitudinum cometæ & ſtellæ *γ* æquali differentiæ longitudinum ſtellarum *γ* & *A*.

Feb. $22^{d}. 7^{h}. 30'$ *Londini*, id eſt *Feb.* $22^{d}. 8^{h}. 46'$ *Gedani*, diſtantia cometæ a ſtella *A*, juxta obſervationem *Hookii* a ſeipſo in ſchemate delineatam, ut & juxta obſervationes *Auzoutii* a *Petito* in ſchemate delineatas, erat pars quinta diſtantiæ inter ſtellam *A* & primam arietis, ſeu $15'. 57''$. Et diſtantia cometæ a linea jungente ſtellam *A* & primam arietis erat pars quarta ejuſdem partis quintæ, id eſt $4'$. Ideoque cometa erat in ♈ $28^{gr}. 29'. 46''$, cum lat. bor. $8^{gr}. 12'. 36''$.

Mart. $1^{d}. 7^{h}. 0'$ *Londini*, id eſt *Mart.* $1^{d}. 8^{h}. 16'$ *Gedani*, cometa obſervatus fuit prope ſecundam arietis, exiſtente diſtantia inter eoſdem ad diſtantiam inter primam & ſecundam arietis, hoc eſt ad $1^{gr}. 33'$, ut 4 ad 45 ſecundum *Hookium*, vel ut 2 ad 23 ſecundum *Gottignies*. Unde diſtantia cometæ a ſecunda arietis erat $8'. 16''$ ſecundum *Hookium*, vel $8'. 5''$ ſecundum *Gottignies*, vel ratione mediocri $8'. 10''$. Cometa vero ſecundum *Gottignies* jam modo prætergreſſus fuerat ſecundam arietis quaſi ſpatio quartæ vel quintæ partis itineris uno die confecti, id eſt $1'. 35''$ circiter (quocum ſatis conſentit *Auzoutius*) vel paulo minorem ſecundum *Hookium*, puta $1'$. Quare ſi ad longitudinem primæ arietis addatur $1'$, & ad

De Mundi Systemate latitudinem ejus 8′. 10″, habebitur longitudo cometæ ♈ 29gr. 18′, & latitudo borealis 8gr. 36′. 26″.

Mart. 7d. 7h. 30′ *Pariſiis* (id eſt *Mart.* 7d. 8h. 37′ *Gedani*) ex obſervationibus *Auzoutii* diſtantia cometæ a ſecunda arietis æqualis erat diſtantiæ ſecundæ arietis a ſtella *A*, id eſt 52′. 29″. Et differentia longitudinum cometæ & ſecundæ arietis erat 45′ vel 46′, vel ratione mediocri 45′. 30″. Ideoque cometa erat in ♉ 0gr. 2′. 48″. Ex ſchemate obſervationum *Auzoutii*, quod *Petitus* conſtruxit, *Hevelius* deduxit latitudinem cometæ 8gr. 54′. Sed ſculptor viam cometæ ſub finem motus ejus irregulariter incurvavit, & *Hevelius* in ſchemate obſervationum *Auzoutii* a ſe conſtructo incurvationem irregularem correxit, & ſic latitudinem cometæ fecit eſſe 8gr. 55′. 30″. Et irregularitatem paulo magis corrigendo, latitudo evadere poteſt 8gr. 56′, vel 8gr. 57′.

Viſus etiam fuit hic cometa *Martii* die 9, & tunc locari debuit in ♉ 0gr. 18′, cum lat. bor. 9gr. 3′½ circiter.

Apparuit hic cometa menſes tres, ſignaque fere ſex deſcripſit, & uno die gradus fere viginti confecit. Curſus ejus a circulo maximo plurimum deflexit, in boream incurvatus; & motus ejus ſub finem ex retrogrado factus eſt directus. Et non obſtante curſu tam inſolito, theoria a principio ad finem cum obſervationibus non minus accurate congruit, quam theoriæ planetarum cum eorum obſervationibus congruere ſolent, ut inſpicienti tabulam patebit. Subducenda tamen ſunt minuta duo prima circiter, ubi cometa velociſſimus fuit; id quod fiet auferendo duodecim minuta ſecunda ab angulo inter nodum aſcendentem & perihelium, ſeu conſtituendo angulum illum 49gr. 27′. 18″. Cometæ utriuſque (& hujus & ſuperioris) parallaxis annua inſignis fuit, & inde demonſtratur motus annuus terræ in orbe magno.

Confirmatur etiam theoria per motum cometæ, qui apparuit anno 1683. Hic fuit retrogradus in orbe, cujus planum cum plano eclipticæ angulum fere rectum continebat. Hujus nodus aſcendens (computante *Halleio*) erat in ♍ 23gr. 23′; inclinatio orbitæ ad eclipticam 83gr. 11′; perihelium in ♊ 25gr. 29′. 30″; diſtantia perihelia a ſole 56020, exiſtente radio orbis magni 100000, & tempore perihelii *Julii* 2d. 3h. 50′. Loca autem cometæ in hoc orbe ab *Halleio* computata, & cum locis a *Flamſtedio* obſervatis collata, exhibentur in tabula ſequente.

Temp.

1683 Temp. Æquat.	Locus Solis	Cometæ Long. Comp.	Lat. Bor. Comp.	Cometæ Long. Obſ.	Lat. Bor. Obſerv.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. ′	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Jul. 13.12.55	♌ 1. 2.30	♋ 13. 5.42	29.28.13	♋ 13. 6.42	29.28.20	+ 1. 0	+ 0. 7
15.11.15	2.5[illegible].12	11.37.48	29.34. 0	11.39 43	29.34.50	+ 1.55	+ 0.50
17.10.20	4.45.45	10. 7. 6	29.33.30	10. 8.40	29.34. 0	+ 1.34	+ 0.30
23.13.40	10.38 21	5.10.27	28.51.42	5.11.30	28.50.28	+ 1. 3	— 1.14
25.14. 5	12.35.28	3.27.53	2[illegible]24.47	3.27. 0	28.23.40	— 0.53	— 1. 7
31. 9.42	18. 9.22	♊ 27.55. 3	26.22.52	♊ 27.54.24	26.22.25	— 0.39	— 0.27
31.14.55	18.21.53	27.41. 7	26.16.57	27.41. 8	26.14.50	+ 0. 1	— 2. 7
Aug. 2.14.56	20.17.16	25.29.32	25.16.19	25.28.46	25.17.28	— 0.46	+ 1. 9
4.10.49	22. 2.50	23.18.20	24.10.49	23.16.55	24.12.19	— 1.25	+ 1.30
6.10. 9	23.56.45	20.42.23	22.47. 5	20.40.32	22.49. 5	— 1.51	+ 2. 0
9.10.26	26.50.52	16. 7.57	20. 6.37	16. 5.55	20. 6.10	— 2. 2	— 0.27
15.14. 1	♍ 2.47.13	3.30.48	11.37.33	3.26.18	11.32. 1	— 4.30	— 5.32
16.15.10	3.48. 2	0.43. 7	9.34.16	0.41.55	9.34.13	— 1.12	— 0. 3
18.15.44	5.45.33	♉ 24.52.53	5.11.15 Auſtr.	♉ 24.49. 5	5. 9.11 Auſtr.	— 3.48	— 2. 4
22.14.44	9.35.49	11. 7.14	5.16.58	11. 7.12	5.16.58	— 0. 2	— 0. 3
23.15.52	10.36.48	7. 2.18	8.17. 9	7. 1.17	8.16.41	— 1. 1	— 0.28
26.16. 2	13.31.10	♈ 24.45.31	16.38. 0	♈ 24.44. 0	16.38.20	— 1.31	+ 0.20

Confirmatur etiam theoria per motum cometæ retrogradi, qui apparuit anno 1682. Hujus nodus aſcendens (computante *Halleio*) erat in ♉ 21^gr. 16′. 30″. Inclinatio orbitæ ad planum eclipticæ 17^gr. 56′. 0″. Perihelium in ♒ 2^gr. 52′. 50″. Diſtantia perihelia a ſole 58328, exiſtente radio orbis magni 100000. Et tempus æquatum perihelii *Sept.* 4^d. 7^h. 39′. Loca vero ex obſervationibus *Flamſtedii* computata, & cum locis per theoriam computatis collata, exhibentur in tabula ſequente.

1682 Temp. Appar.	Locus Solis	Cometæ Long. Comp.	Lat. Bor. Comp.	Cometæ Long. Obſ.	Lat. Bor. Obſerv.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. ′	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Aug. 19.16.38	♍ 7. 0. 7	♌ 18.14.28	25.50. 7	♌ 18.14.40	25.49.55	— 0.12	+ 0.12
20.15.38	7.55.52	24.46.23	26.14.42	24.46.22	26.12.52	+ 0. 1	+ 1.50
21. 8.21	8.36.14	29.37.15	26.20. 3	29.38. 2	26.17.37	— 0.47	+ 2.26
22. 8. 8	9.33.55	♍ 6.29.53	26. 8.42	♍ 6.30. 3	26. 7.12	— 0.10	+ 1.30
29. 8.20	16.22.40	♎ 12.37.54	18.37.47	♎ 12.37.49	18.34. 5	+ 0. 5	+ 3.42
30. 7.45	17.19.41	15.36. 1	17.26.43	15.35.18	17.27.17	+ 0.43	— 0.34
Sept. 1. 7.33	19.16. 9	20.30.53	15.13. 0	20.27. 4	15. 9.49	+ 3.49	+ 3.11
4. 7.22	22.11.28	25.42. 0	12.23.48	25.40.58	12.22. 0	+ 1. 2	+ 1.48
5. 7.32	23.10.29	27. 0.46	11.33. 8	26.59.24	11.33.51	+ 1.22	— 0.43
8. 7.16	26. 5.58	29.58.44	9.26.46	29.58.45	9.26.43	— 0. 1	+ 0. 3
9. 7.26	27. 5. 9	♏ 0.44.10	8.49.10	♏ 0.44. 4	8.48.25	+ 0. 6	+ 0.45

Confirmatur etiam theoria per motum retrogradum cometæ, qui apparuit anno 1723. Hujus nodus aſcendens (computante D. *Bradleo*, aſtronomiæ apud *Oxonienſes* profeſſore *Saviliano*) erat in

♈ 14^gr.

♈ 14gr. 16′. Inclinatio orbitæ ad planum eclipticæ 49gr. 59′. Perihelium in ♉ 12gr. 15′. 20″. Diſtantia perihelia a ſole 998651, exiſtente radio orbis magni 1000000, & tempore æquato perihelii *Septem.* 16d. 16h. 10′. Loca vero cometæ in hoc orbe a *Bradleo* computata, & cum locis a ſeipſo & patruo ſuo D. *Poundio*, & a D. *Halleio* obſervatis collata exhibentur in tabula ſequente.

1723 Temp. Æquat.	Comet. Long. Obſervat.	Lat. Bor. Obſervat.	Comet. Long. Comput.	Lat. Bor. Comput.	Differ. Long.	Differ. Latit.
d. h. ′	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″
Octob. 9 . 8 . 5	♒ 7 . 22 . 15	5 . 2 . 0	♒ 7 . 21 . 26	5 . 2 . 47	+ 49	− 47
10 . 6 . 21	6 . 41 . 12	7 . 44 . 13	6 . 41 . 42	7 . 43 . 18	− 50	+ 55
12 . 7 . 22	5 . 39 . 58	11 . 55 . 0	5 . 40 . 19	11 . 54 . 55	− 21	+ 5
14 . 8 . 57	4 . 59 . 49	14 . 43 . 50	5 . 0 . 37	14 . 44 . 1	− 48	− 11
15 . 6 . 35	4 . 47 . 41	15 . 40 . 51	4 . 47 . 45	15 . 40 . 55	− 4	− 4
21 . 6 . 22	4 . 2 . 32	19 . 41 . 49	4 . 2 . 21	19 . 42 . 3	+ 11	− 14
22 . 6 . 24	3 . 59 . 2	20 . 8 . 12	3 . 59 . 10	20 . 8 . 17	− 8	− 5
24 . 8 . 2	3 . 55 . 29	20 . 55 . 18	3 . 55 . 11	20 . 55 . 9	+ 18	+ 9
29 . 8 . 56	3 . 56 . 17	22 . 20 . 27	3 . 56 . 42	22 . 20 . 10	− 25	+ 17
30 . 6 . 20	3 . 58 . 9	22 . 32 . 28	3 . 58 . 17	22 . 32 . 12	− 8	+ 16
Nov. 5 . 5 . 53	4 . 16 . 30	23 . 38 . 33	4 . 16 . 23	23 . 38 . 7	+ 7	+ 26
8 . 7 . 6	4 . 29 . 36	24 . 4 . 30	4 . 29 . 54	24 . 4 . 40	− 18	− 10
14 . 6 . 20	5 . 2 . 16	24 . 48 . 46	5 . 2 . 51	24 . 48 . 16	− 35	+ 30
20 . 7 . 45	5 . 42 . 20	25 . 24 . 45	5 . 43 . 13	25 . 25 . 17	− 53	− 32
Dec. 7 . 6 . 45	8 . 4 . 13	26 . 54 . 18	8 . 3 . 55	26 . 53 . 42	+ 18	+ 36

His exemplis abunde ſatis manifeſtum eſt, quod *motus cometarum* per theoriam a nobis expoſitam non minus accurate exhibentur, quam ſolent motus planetarum per eorum theorias. Et propterea orbes cometarum per hanc theoriam enumerari poſſunt, & tempus periodicum cometæ in quolibet orbe revolventis tandem ſciri, & tum demum orbium ellipticorum latera tranſverſa & apheliorum altitudines innoteſcent.

Cometa retrogradus, qui apparuit anno 1607, deſcripſit orbem, cujus nodus aſcendens (computante *Halleio*) erat in ♉ 20gr. 21′; inclinatio plani orbis ad planum eclipticæ erat 17gr. 2′; perihelium erat in ♒ 2gr. 16′; & diſtantia perihelia a ſole erat 58680, exiſtente radio orbis magni 100000. Et cometa erat in perihelio *Octob.* 16d. 3h. 50′. Congruit hic orbis quamproxime cum orbe cometæ, qui apparuit anno 1682. Si cometæ hi duo fuerint unus & idem, revolvetur hic cometa ſpatio annorum 75, & axis major orbis ejus erit ad axem majorem orbis magni, ut $\sqrt{c:75\times75}$ ad 1, ſeu 1778 ad 100 circiter. Et diſtantia aphelia cometæ hujus a ſole, erit ad diſtantiam

tiam mediocrem terræ a ſole, ut 35 ad 1 circiter. Quibus cognitis, haud difficile fuerit orbem ellipticum cometæ hujus determinare. Atque hæc ita ſe habebunt ſi cometa, ſpatio annorum ſeptuaginta quinque, in hoc orbe poſthac redierit. Cometæ reliqui majori tempore revolvi videntur & altius aſcendere.

Cæterum cometæ, ob magnum eorum numerum, & magnam apheliorum a ſole diſtantiam, & longam moram in apheliis, per gravitates in ſe mutuo nonnihil turbari debent, & eorum eccentricitates & revolutionum tempora nunc augeri aliquantulum, nunc diminui. Proinde non eſt expectandum ut cometa idem in eodem orbe, & iiſdem temporibus periodicis accurate redeat. Sufficit ſi mutationes non majores obvenerint, quam quæ a cauſis prædictis oriantur.

Et hinc ratio redditur, cur cometæ non comprehendantur zodiaco more planetarum, ſed inde migrent & motibus variis in omnes cœlorum regiones ferantur. Scilicet eo fine, ut in apheliis ſuis, ubi tardiſſime moventur, quam longiſſime diſtent ab invicem, & ſe mutuo quam minime trahant. Qua de cauſa cometæ, qui altius deſcendunt, ideoque tardiſſime moventur in apheliis, debent altius aſcendere.

Cometa, qui anno 1680 apparuit, minus diſtabat a ſole in perihelio ſuo quam parte ſexta diametri ſolis; & propter ſummam velocitatem in vicinia illa, & denſitatem aliquam atmoſphæræ ſolis, reſiſtentiam nonnullam ſentire debuit, & aliquantulum retardari, & propius ad ſolem accedere: & ſingulis revolutionibus accedendo ad ſolem, incidet is tandem in corpus ſolis. Sed & in aphelio ubi tardiſſime movetur, aliquando per attractionem aliorum cometarum retardari poteſt, & ſubinde in ſolem incidere. Sic etiam ſtellæ fixæ, quæ paulatim expirant in lucem & vapores, cometis in ipſas incidentibus refici poſſunt, & novo alimento accenſæ pro ſtellis novis haberi. Hujus generis ſunt ſtellæ fixæ, quæ ſubito apparent, & ſub initio quam maxime ſplendent, & ſubinde paulatim evaneſcunt. Talis fuit ſtella in cathedra Caſſiopeiæ quam *Cornelius Gemma* octavo *Novembris* 1572, luſtrando illam cœli partem nocte ſerena minime vidit; at nocte proxima (*Novem.* 9.) vidit fixis omnibus ſplendidiorem, & luce ſua vix cedentem veneri. Hanc *Tycho Brahæus* vidit undecimo ejuſdem menſis ubi maxime ſplenduit; & ex eo tempore

paulatim

paulatim decreſcentem & ſpatio menſium ſexdecim evaneſcentem obſervavit. Menſe *Novembri*, ubi primum apparuit, venerem luce ſua æquabat. Menſe *Decembri* nonnihil diminuta jovem æquare videbatur. Anno 1573, menſe *Januario* minor erat jove & major Sirio, cui in fine *Februarii* & *Martii* initio evaſit æqualis. Menſe *Aprili* & *Maio* ſtellis ſecundæ magnitudinis, *Junio*, *Julio* & *Auguſto* ſtellis tertiæ magnitudinis, *Septembri*, *Octobri* & *Novembri* ſtellis quartæ, *Decembri* & anni 1574, menſe *Januario* ſtellis quintæ, & menſe *Februario* ſtellis ſextæ magnitudinis æqualis videbatur, & menſe *Martio* ex oculis evanuit. Color illi ab initio clarus, albicans ac ſplendidus, poſtea flavus, & anni 1573 menſe *Martio* rutilans inſtar martis aut ſtellæ aldebaran; *Maio* autem albitudinem ſublividam induxit, qualem in ſaturno cernimus, quem colorem uſque in finem ſervavit, ſemper tamen obſcurior facta. Talis etiam fuit ſtella in dextro pede ſerpentarii, quam *Kepleri* diſcipuli anno 1604, die 30 *Septembris* ſt. vet. apparere cœpiſſe obſervarunt, & luce ſua ſtellam jovis ſuperaſſe, cum nocte præcedente minime apparuiſſet. Ab eo vero tempore paulatim decrevit, & ſpatio menſium quindecim vel ſexdecim ex oculis evanuit. Tali etiam ſtella nova ſupra modum ſplendente *Hipparchus* ad fixas obſervandas & in catalogum referendas excitatus fuiſſe dicitur. Sed fixæ, quæ per vices apparent & evaneſcunt, quæque paulatim creſcunt, & luce ſua fixas tertiæ magnitudinis vix unquam ſuperant, videntur eſſe generis alterius, & revolvendo partem lucidam & partem obſcuram per vices oſtendere. Vapores autem, qui ex ſole & ſtellis fixis & caudis cometarum oriuntur, incidere poſſunt per gravitatem ſuam in atmoſphæras planetarum & ibi condenſari & converti in aquam & ſpiritus humidos, & ſubinde per lentum calorem in ſales, & ſulphura, & tincturas, & limum, & lutum, & argillam, & arenam, & lapides, & coralla, & ſubſtantias alias terreſtres paulatim migrare.

SCHOLIUM GENERALE.

Hypotheſis vorticum multis premitur difficultatibus. Ut planeta unuſquiſque radio ad ſolem ducto areas deſcribat tempori proportionales, tempora periodica partium vorticis deberent eſſe in duplicata ratione diſtantiarum a ſole. Ut periodica planetarum tempora ſint in proportione ſeſquiplicata diſtantiarum a ſole, tempora peri-

periodica partium vorticis deberent eſſe in ſeſquiplicata diſtantiarum proportione. Ut vortices minores circum ſaturnum, jovem & alios planetas gyrati conſerventur & tranquille natent in vortice ſolis, tempora periodica partium vorticis ſolaris deberent eſſe æqualia. Revolutiones ſolis & planetarum circum axes ſuos, quæ cum motibus vorticum congruere deberent, ab omnibus hiſce proportionibus diſcrepant. Motus cometarum ſunt ſumme regulares, & eaſdem leges cum planetarum motibus obſervant, & per vortices explicari nequeunt. Feruntur cometæ motibus valde eccentricis in omnes cœlorum partes, quod fieri non poteſt, niſi vortices tollantur.

Projectilia, in aëre noſtro, ſolam aëris reſiſtentiam ſentiunt. Sublato aëre, ut fit in vacuo *Boyliano*, reſiſtentia ceſſat, ſiquidem pluma tenuis & aurum ſolidum æquali cum velocitate in hoc vacuo cadunt. Et par eſt ratio ſpatiorum cœleſtium, quæ ſunt ſupra atmoſphæram terræ. Corpora omnia in iſtis ſpatiis liberrime moveri debent; & propterea planetæ & cometæ in orbibus ſpecie & poſitione datis ſecundum leges ſupra expoſitas perpetuo revolvi. Perſeverabunt quidem in orbibus ſuis per leges gravitatis, ſed regularem orbium ſitum primitus acquirere per leges haſce minime potuerunt.

Planetæ ſex principales revolvuntur circum ſolem in circulis ſoli concentricis, eadem motus directione, in eodem plano quamproxime. Lunæ decem revolvuntur circum terram, jovem & ſaturnum in circulis concentricis, eadem motus directione, in planis orbium planetarum quamproxime. Et hi omnes motus regulares originem non habent ex cauſis mechanicis; ſiquidem cometæ in orbibus valde eccentricis, & in omnes cœlorum partes libere feruntur. Quo motus genere cometæ per orbes planetarum celerrime & facillime tranſeunt, & in apheliis ſuis ubi tardiores ſunt & diutius morantur, quam longiſſime diſtant ab invicem, ut ſe mutuo quam minime trahant. Elegantiſſima hæcce ſolis, planetarum & cometarum compages non niſi conſilio & dominio entis intelligentis & potentis oriri potuit. Et ſi ſtellæ fixæ ſint centra ſimilium ſyſtematum, hæc omnia ſimili conſilio conſtructa ſuberunt *Unius* dominio: præſertim cum lux fixarum ſit ejuſdem naturæ ac lux ſolis, & ſyſtemata omnia lucem in omnia invicem immittant. Et ne fixarum ſyſtemata per gravitatem ſuam in ſe mutuo cadant, hic eadem immenſam ab invicem diſtantiam poſuerit.

Hic

Hic omnia regit non ut anima mundi, ſed ut univerſorum dominus. Et propter dominium ſuum, dominus deus [a] Παντοκράτωρ dici ſolet. Nam deus eſt vox relativa & ad ſervos refertur: & deitas eſt dominatio dei, non in corpus proprium, uti ſentiunt quibus deus eſt anima mundi, ſed in ſervos. Deus ſummus eſt ens æternum, infinitum, abſolute perfectum: ſed ens utcunque perfectum ſine dominio non eſt dominus deus. Dicimus enim deus meus, deus veſter, deus *Iſraelis*, deus deorum, & dominus dominorum: ſed non dicimus æternus meus, æternus veſter, æternus *Iſraelis*, æternus deorum; non dicimus infinitus meus, vel perfectus meus. Hæ appellationes relationem non habent ad ſervos. Vox deus paſſim [b] ſignificat dominum: ſed omnis dominus non eſt deus. Dominatio entis ſpiritualis deum conſtituit, vera verum, ſumma ſummum, ficta fictum. Et ex dominatione vera ſequitur deum verum eſſe vivum, intelligentem & potentem; ex reliquis perfectionibus ſummum eſſe, vel ſumme perfectum. Æternus eſt & infinitus, omnipotens & omniſciens, id eſt, durat ab æterno in æternum, & *adeſt ab infinito* in infinitum: omnia regit; & omnia cognoſcit, quæ fiunt aut fieri poſſunt. Non eſt æternitas & infinitas, ſed æternus & infinitus; non eſt duratio & ſpatium, ſed durat & adeſt. Durat ſemper, & adeſt ubique, & exiſtendo ſemper & ubique, durationem & ſpatium conſtituit. Cum unaquæque ſpatii particula ſit *ſemper*, & unumquodque durationis indiviſibile momentum *ubique*, certe rerum omnium fabricator ac dominus non erit *nunquam, nuſquam*. Omnis anima ſentiens diverſis temporibus, & in diverſis ſenſuum, & motuum organis eadem eſt perſona indiviſibilis. Partes dantur ſucceſſivæ in duratione, coexiſtentes in ſpatio, neutræ in perſona hominis ſeu principio ejus cogitante; & multo minus in ſubſtantia cogitante dei. Omnis homo, quatenus res ſentiens, eſt unus & idem homo durante vita ſua in omnibus & ſingulis ſenſuum organis. Deus eſt unus & idem deus ſemper & ubique. Omnipræſens eſt non per *virtutem* ſolam, ſed etiam per *ſubſtantiam*: nam virtus ſine ſubſtantia ſubſiſtere non poteſt.

[a] Id eſt Imperator univerſalis.

[b] *Pocockus* noſter vocem *dei* deducit a voce *Arabica du*, (& in caſu obliquo *di*,) quæ dominum ſignificat. Et hoc ſenſu principes vocantur dii, *Pſalm.* lxxxiv. 6. & *Joan.* x. 45. Et *Moſes* dicitur *deus* fratris *Aaron*, & *deus* regis *Pharaoh* (*Exod* iv. 16. & vii 1.) Et eodem ſenſu animæ principum mortuorum olim a gentibus vocabantur dii, ſed falſo propter defectum dominii.

teſt. In ipſo [c] continentur & moventur univerſa, ſed ſine mutua paſſione. Deus nihil patitur ex corporum motibus: illa nullam ſentiunt reſiſtentiam ex omnipræſentia dei. Deum ſummum neceſſario exiſtere in confeſſo eſt: Et eadem neceſſitate *ſemper* eſt & *ubique*. Unde etiam totus eſt ſui ſimilis, totus oculus, totus auris, totus cerebrum, totus brachium, totus vis ſentiendi, intelligendi, & agendi, ſed more minime humano, more minime corporeo, more nobis prorſus incognito. Ut cæcus non habet ideam colorum, ſic nos ideam non habemus modorum, quibus deus ſapientiſſimus ſentit & intelligit omnia. Corpore omni & figura corporea prorſus deſtituitur, ideoque videri non poteſt, nec audiri, nec tangi, nec ſub ſpecie rei alicujus corporei coli debet. Ideas habemus attributorum ejus, ſed quid ſit rei alicujus ſubſtantia minime cognoſcimus. Videmus tantum corporum figuras & colores, audimus tantum ſonos, tangimus tantum ſuperficies externas, olfacimus odores ſolos, & guſtamus ſapores: intimas ſubſtantias nullo ſenſu, nulla actione reflexa cognoſcimus; & multo minus ideam habemus ſubſtantiæ dei. Hunc cognoſcimus ſolummodo per proprietates ejus & attributa, & per ſapientiſſimas & optimas rerum ſtructuras & cauſas finales, & admiramur ob perfectiones; veneramur autem & colimus ob dominium. Colimus enim ut ſervi, & deus ſine dominio, providentia, & cauſis finalibus nihil aliud eſt quam fatum & natura. A cæca neceſſitate metaphyſica, quæ utique eadem eſt ſemper & ubique, nulla oritur rerum variatio. Tota rerum conditarum pro locis ac temporibus diverſitas, ab ideis & voluntate entis neceſſario exiſtentis ſolummodo oriri potuit. Dicitur autem deus per allegoriam videre, audire, loqui, ridere, amare, odio habere, cupere, dare, accipere, gaudere, iraſci, pugnare, fabricare, condere, conſtruere. Nam ſermo omnis de deo a rebus humanis per ſimilitudinem aliquam deſumitur, non perfectam quidem, ſed aliqualem tamen. Et hæc de deo, de quo utique ex phænomenis diſſerere, ad philoſophiam naturalem pertinet.

[c] Ita ſentiebant veteres, ut *Pythagoras* apud *Ciceronem*, de Natura deorum, *lib.* I. *Thales*, *Anaxagoras*, *Virgilius* Georgic. *lib* iv. *v.* 220, & Æneid. *lib.* 6. *v.* 721. *Philo* Allegor. *lib.* I. ſub initio. *Aratus* in Phænom. ſub initio. Ita etiam ſcriptores ſacri ut *Paulus* in Act. xvii. 27, 28. *Johannes* in Evang. xiv. 2. *Moſes* in Deut. iv. 39. & x. 14. *David* Pſal. cxxxix. 7, 8, 9. *Solomon* I Reg. viii. 27. *Job* xxii. 12, 13, 14. *Jeremias* xxiii. 23, 24. Fingebant autem idololatræ ſolem, lunam, & aſtra, animas hominum & alias mundi partes eſſe partes dei ſummi & ideo colendas ſed falſo.

De Mundi Systemate

Hactenus phænomena cælorum & maris noſtri per vim gravitatis expoſui, ſed cauſam gravitatis nondum aſſignavi Oritur utique hæc vis a cauſa aliqua, quæ penetrat ad uſque centra ſolis & planetarum, ſine virtutis diminutione; quæque agit non pro quantitate *ſuperficierum* particularum, in quas agit (ut ſolent cauſæ mechanicæ) ſed pro quantitate materiæ *ſolidæ*; & cujus actio in immenſas diſtantias undique extenditur, decreſcendo ſemper in duplicata ratione diſtantiarum. Gravitas in ſolem componitur ex gravitatibus in ſingulas ſolis particulas, & recedendo a ſole decreſcit accurate in duplicata ratione diſtantiarum ad uſque orbem ſaturni, ut ex quiete apheliorum planetarum manifeſtum eſt, & ad uſque ultima cometarum aphelia, ſi modo aphelia illa quieſcant. Rationem vero harum gravitatis proprietatum ex phænomenis nondum potui deducere, & hypotheſes non fingo. Quicquid enim ex phænomenis non deducitur, *hypotheſis* vocanda eſt; & hypotheſes ſeu metaphyſicæ, ſeu phyſicæ, ſeu qualitatum occultarum, ſeu mechanicæ, in *philoſophia experimentali* locum non habent. In hac philoſophia propoſitiones deducuntur ex phænomenis, & redduntur generales per *inductionem*. Sic impenetrabilitas, mobilitas, & impetus corporum & leges motuum & gravitatis innotuerunt. Et ſatis eſt quod gravitas revera exiſtat, & agat ſecundum leges a nobis expoſitas, & ad corporum cæleſtium & maris noſtri motus omnes ſufficiat.

Adjicere jam liceret nonnulla de ſpiritu quodam ſubtiliſſimo corpora craſſa pervadente, & in iiſdem latente; cujus vi & actionibus particulæ corporum ad minimas diſtantias ſe mutuo attrahunt, & contiguæ factæ cohærent; & corpora electrica agunt ad diſtantias majores, tam repellendo quam attrahendo corpuſcula vicina; & lux emittitur, reflectitur, refringitur, inflectitur, & corpora calefacit; & ſenſatio omnis excitatur, & membra animalium ad voluntatem moventur, vibrationibus ſcilicet hujus ſpiritus per ſolida nervorum capillamenta ab externis ſenſuum organis ad cerebrum & a cerebro in muſculos propagatis. Sed hæc paucis exponi non poſſunt; neque adeſt ſufficiens copia experimentorum, quibus leges actionum hujus ſpiritus accurate determinari & monſtrari debent.

FINIS.

INDEX RERUM
ALPHABETICUS.

N. B. *Citationes factæ ſunt ad normam ſequentis exempli.* III, 10: 484, 16: 514, 6 *deſignant libri tertii propoſitionem decimam: paginæ* $484^{tæ}$ *lineam* 16^{am}*: paginæ* $514^{æ}$ *lineam* 6^{am}.

A.

Æquinoctiorum præceſſio
  cauſæ hujus motus indicantur III, 21.
  quantitas motus ex cauſis computatur III, 39.

Aëris
  denſitas ad quamlibet altitudinem colligitur ex prop. 22 lib. II. quanta ſit ad altitudinem unius ſemidiametri terreſtris oſtenditur 512, 24.
  elaſtica vis quali cauſæ tribui poſſit II, 23.
  gravitas cum aquæ gravitate collata 512, 17.
  reſiſtentia quanta ſit, per experimenta pendulorum colligitur 310, 6, per experimenta corporum cadentium & theoriam accuratius invenitur 355, 13.

Anguli contactus non ſunt omnes ejuſdem generis, ſed alii aliis infinite minores 36, 23.

Apſidum motus expenditur I, ſect. 9. p. 129.

Areæ, quas corpora in gyros acta, radiis ad centrum virium ductis, deſcribunt, conferuntur cum temporibus deſcriptionum I, 1, 2, 3, 58, 65.

Attractio corporum univerſorum demonſtratur III, 7; qualis ſit hujus demonſtrationis certitudo oſtenditur 388, 30.

Attractionis cauſam vel modum auctor nuſquam definit 6, 2: 160, 18: 88, 12: 530, 2.

C.

Cœli
  reſiſtentia ſenſibili deſtituuntur III, 10: 484, 16: 514, 6; & propterea fluido fere omni corporeo 356, 19.
  tranſitum luci præbent ſine ulla refractione 510, 2.

Calore virga ferrea comperta eſt augeri longitudine 420, 25.

Calor ſolis quantus ſit in diverſis a ſole diſtantiis 508, 25.
  quantus apud mercurium 406, 1.
  quantus apud cometam anni 1680 in perihelio verſantem 508, 27.

Centrum commune gravitatis corporum plurium, ab actionibus corporum inter ſe, non mutat ſtatum ſuum vel motus vel quietis p. 19.

Centrum commune gravitatis terræ, ſolis & planetarum omnium quieſcere III, 11; confirmatur ex cor. 2. prop. 14. lib. III.

Centrum commune gravitatis terræ & lunæ motu annuo percurrit orbem magnum 410, 16.
  quibus intervallis diſtat a terra & luna 469, 6.

Centrum virium, quibus corpora revolventia in orbibus retinentur,
  quali arearum indicio invenitur 43, 21.
  qua ratione ex datis revolventium velocitatibus invenitur I, 5.

Circuli circumferentia, qua lege vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum deſcribi poteſt a corpore revolvente I, 4, 7, 8.

Cometæ
  genus ſunt planetarum, non meteororum 484, 20: 508, 20.
  luna ſuperiores ſunt, & in regione planetarum verſantur p. 478.
  diſtantia eorum qua ratione per obſervationes colligi poteſt quamproxime 478, penult.
  plures obſervati ſunt in hemiſphærio ſolem verſus, quam in hemiſphærio oppoſito; & unde hoc fiat 484, 2.
  ſplendent luce ſolis a ſe reflexa 484, 1; lux illa quanta eſſe ſolet 481, 4.
  cinguntur atmoſphæris ingentibus 482, 6: 484, 23.
  qui ad ſolem propius accedunt ut plurimum minores eſſe exiſtimantur 517, 33.
  quo fine non comprehenduntur zodiaco (more planetarum) ſed in omnes cœlorum regiones varie feruntur 525, 14.
  poſſunt aliquando in ſolem incidere & novum illi alimentum ignis præbere 525, 21.
  uſus eorum ſuggeritur 515, 19: 526, 25.
  moventur in ſectionibus conicis umbilicos in centro ſolis habentibus, & radiis ad ſolem ductis deſcribunt areas temporibus proportionales. Et quidem in ellipſibus moventur, ſi in orbem redeunt, hæ tamen parabolis erunt maxime finitimæ III, 40.

trajectoria parabolica ex datis tribus obſervationibus invenitur III,41; inventa corrigitur III,42.
locus in parabola invenitur ad tempus datum 485, 29: I, 30.
velocitas cum velocitate planetarum confertur 485, 17.

Cometarum caudæ
avertuntur a ſole 511, 10.
maximæ ſunt & fulgentiſſimæ ſtatim poſt tranſitum per viciniam ſolis 509, 15.
inſignis earum raritas 513, 8.
origo & natura earundem 482, 13: 509, 19.
quo temporis ſpatio a capite aſcendunt 513, 17.

Cometa annorum 1664 & 1665
hujus motus obſervatus expenditur, & cum theoria confertur p. 519.

Cometa annorum 1680 & 1681
hujus motus obſervatus p. 496. idem computatus in orbe parabolico p. 500. & in orbe elliptico p. 502.
trajectoria illius & cauda ſingulis in locis delineantur p. 506.

Cometa anni 1682
hujus motus collatus cum theoria p. 523.
comparuiſſe viſus eſt anno 1607, iterumque rediturus videtur periodo 75 annorum 524, 10 a fine.

Cometa anni 1683
hujus motus collatus cum theoria p. 522.

Cometa anni 1723
hujus motus collatus cum theoria p. 523, 524.

Curvæ diſtinguuntur in geometrice rationales & geometrice irrationales 107, ult.

Curvatura figurarum qua ratione æſtimanda ſit 255, 14: 433, 6.

Cycloidis ſeu epicycloidis
rectificatio I, 48, 49: 154, 1.
evoluta I, 50: 154, 5.

Cylindri attractio ex particulis trahentibus compoſiti, quarum vires ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum 216, 17.

D.

Dei natura p. 528, 529.

Deſcenſus gravium in vacuo quantus ſit, indicatur 413, 21.

Deſcenſûs vel aſcenſûs rectilinei ſpatia deſcripta, tempora deſcriptionum & velocitates acquiſitæ conferuntur, poſita cujuſcunque generis vi centripeta I, ſect. 7.

Deſcenſus & aſcenſus corporum in mediis reſiſtentibus II, 3, 8, 9, 40, 13, 14.

E.

Ellipſis
qua lege vis centripetæ tendentis ad centrum figuræ deſcribitur a corpore revolvente I, 10.
qua lege vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ deſcribitur a corpore revolvente I, 11.

F.

Fluidi definitio p. 282.

Fluidorum denſitas & compreſſio quas leges habent, oſtenditur II, ſect. 5.

Fluidorum per foramen in vaſe factum effluentium determinatur motus II, 36.

Fumi in camino aſcenſus obiter explicatur 514, 20.

G.

Graduum in meridiano terreſtri menſura exhibetur, & quam ſit exigua inæqualitas oſtenditur ex theoria III, 20.

Gravitas
diverſi eſt generis a vi magnetica 403, 3.
mutua eſt inter terram & ejus partes 25, 28.
ejus cauſa non aſſignatur 530, 2.
datur in planetas univerſos 399, 15; & pergendo a ſuperficiebus planetarum ſurſum decreſcit in duplicata ratione diſtantiarum a centro III, 8. deorſum decreſcit in ſimplici ratione quamproxime III, 9.
datur in corpora omnia, & proportionalis eſt quantitati materiæ in ſingulis III, 7.

Gravitatem eſſe vim illam, qua luna retinetur in orbe III, 4; computo accuratiori comprobatur 469, 9.

Gravitatem eſſe vim illam, qua planetæ primarii & ſatellites Jovis & Saturni retinentur in orbibus III, 5.

H.

Hydroſtaticæ principia traduntur II, ſect. 5.

Hyperbola
qua lege vis centrifugæ tendentis a figuræ centro deſcribitur a corpore revolvente 54, 8.
qua lege vis centrifugæ tendentis ab umbilico figuræ deſcribitur a corpore revolvente 58, 1.
qua lege vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ deſcribitur a corpore revolvente I, 12.

Hypotheſes cujuſcunque generis rejiciuntur ab hac philoſophia 539, 15.

I.

Inertiæ vis definitur p. 2.

Jovis
tempus periodicum 393, 18.
diſtantia a ſole 393, 21.
diameter apparens 391, 5.
diameter vera 405, 22.
attractiva vis quanta ſit 405, 4.
pondus corporum in ejus ſuperficie 405, 8.
denſitas 405, 24.
quantitas materiæ 405, 14.
perturbatio a Saturno quanta ſit 410, 5 & 6.
diametrorum proportio computo exhibetur 416, 6; & cum obſervationibus confertur ibid. poſt lin. 19.
converſio circum axem quo tempore abſolvitur 416, 2.
cingulorum cauſa ſubindicatur 48, 27.

L.

Locus definitur, & diſtinguitur in abſolutum & relativum 7, 1.

Loca corporum in ſectionibus conicis motorum inveniuntur ad tempus aſſignatum I, ſect. 6.

Lucis
- propagatio non eſt inſtantanea 225, 29; non fit per agitationem medii alicujus ætherei 372, 9.
- velocitas in diverſis mediis diverſa I, 95.
- reflexio quædam explicatur I, 96.
- refractio explicatur I, 94; non fit in puncto ſolum incidentiæ 226, 17.
- incurvatio prope corporum terminos experimentis obſervata 225, 32.

Lunæ
- corporis figura computo colligitur III, 38.
- librationes explicantur III, 17.
- diameter mediocris apparens 468, 31.
- diameter vera 469, 1.
- pondus corporum in ejus ſuperficie 469, 4.
- denſitas 468, penult.
- quantitas materiæ 469, 3.
- diſtantia mediocris a terra quot continet maximas terræ ſemidiametros 469, 10: quot mediocres 470, 6.
- parallaxis maxima in longitudinem paulo major eſt quam parallaxis maxima in latitudinem 387, 8.
- vis ad mare movendum quanta ſit III, 37; non ſentiri poteſt in experimentis pendulorum, vel in ſtaticis aut hydroſtaticis quibuſcunque 468, 20.
- tempus periodicum 469, 17.
- tempus revolutionis ſynodicæ 432, 3.
- motus & motuum inæqualitates a cauſis ſuis derivantur III, 22: p. 459 & ſeqq.

Luna tardiùs revolvitur, dilatato orbe, in perihelio terræ; citius in aphelio, contracto orbe III, 22: 460, 2.
- tardius revolvitur dilatato orbe in apogæi ſyzygiis cum ſole; citius in quadraturis apogæi, contracto orbe 460, 32.
- tardius revolvitur, dilatato orbe, in ſyzygiis nodi cum ſole; citius in quadraturis nodi, contracto orbe 461, 14.
- tardius movetur in quadraturis ſuis cum ſole, citius in ſyzygiis; & radio ad terram ducto deſcribit aream pro tempore minorem in priore caſu, majorem in poſteriore III, 22. Inæqualitas harum arearum computatur III, 26. Orbem inſuper habet magis curvum & longius a terra recedit in priore caſu, minus curvum habet orbem & propius ad terram accedit in poſteriore III, 22. Orbis hujus figura & proportio diametrorum ejus computo colligitur III, 28. Et ſubinde proponitur methodus inveniendi diſtantiam lunæ a terra ex motu ejus horario III, 27.
- apogæum tardius movetur in aphelio terræ, velocius in perihelio III, 22: 460, 15.
- apogæum ubi eſt in ſolis ſyzygiis, maxime progreditur; in quadraturis regreditur III, 22: 461, 29.
- eccentricitas maxima eſt in apogæi ſyzygiis cum ſole, minima in quadraturis III, 22: 461, 31.
- nodi tardius moventur in aphelio terræ, velocius in perihelio III, 22: 460, 15.
- nodi quieſcunt in ſyzygiis ſuis cum ſole, & velociſſime regrediuntur in quadraturis III, 22. Nodorum motus & inæqualitates motuum computantur ex theoria gravitatis III, 30, 31, 32, 33.
- Inclinatio orbis ad eclipticam maxima eſt in ſyzygiis nodorum cum ſole, minima in quadraturis I, 66, cor. 10. Inclinationis variationes computantur ex theoria gravitatis III, 34, 35.

Lunarium motuum æquationes ad uſus aſtronomicos p. 459, & ſeqq.
- Motus medii lunæ
  - æquatio annua 459, ult.
  - æquatio ſemeſtris prima 460, 32.
  - æquatio ſemeſtris ſecunda 461, 14.
  - æquatio centri prima 462, 15: p. 109, & ſeqq.
  - æquatio centri ſecunda 463, 12.

Lunæ variatio prima III, 29.
- Motus medii apogæi
  - æquatio annua 460, 15.
  - æquatio ſemeſtris 461, 29.
- Eccentricitatis
  - æquatio ſemeſtris 461, 29.
- Motus medii nodorum
  - æquatio annua 460, 15.
  - æquatio ſemeſtris III, 33.
- Inclinationis orbitæ ad eclipticam
  - æquatio ſemeſtris 459, 22.

Lunarium motuum theoria, qua methodo ſtabilienda ſit per obſervationes 464, 1.

M.

Magnetica vis 25, 23: 293, antepen. 403, 3: 471, 20.

Maris æſtus a cauſis ſuis derivatur III, 24, 36, 37.

Martis
- tempus periodicum 393, 18.
- diſtantia a ſole 393, 21.
- aphelii motus 411, 8.

Materiæ
- quantitas definitur p. 1.
- vis inſita ſeu vis inertiæ definitur p. 2.
- vis impreſſa definitur p. 2.
- extenſio, durities, impenetrabilitas, mobilitas, vis inertiæ, gravitas, qua ratione innoteſcunt 387, penult, 530, 17.

Materia ſubtilis *Carteſianorum* ad examen quoddam revocatur 316, 4.

Mecanicæ, quæ dicuntur, potentiæ explicantur & demonſtrantur p. 15 & 16: p. 26.

Mercurii
- tempus periodicum 393, 18.
- diſtantia a ſole 393, 21.

aphelii

aphelii motus 411, 8.

Methodus
- rationum primarum & ultimarum I, ſect. 1.
- tranſmutandi figuras in alias, quæ ſunt ejuſdem ordinis analytici I, lem. 22. pag 87.
- fluxionum II, lem. 2. p. 243.
- differentialis III, lem. 5 & 6. p. 486 & 487.
- inveniendi curvarum omnium quadraturas proxime veras 487, 16.
- ſerierum convergentium adhibetur ad ſolutionem problematum difficiliorum p. 137, 139, 221, 255, 449.

Motus quantitas definitur p. 1.

Motus abſolutus & relativus p. 7, 8, 9, 10. ab invicem ſecerni poſſunt, exemplo demonſtratur p. 11.

Motus leges p. 13, & ſeqq.

Motuum compoſitio & reſolutio p. 15.

Motus corporum congredientium poſt reflexionem, quali experimento recte colligi poſſunt, oſtenditur 22, 22.

Motus corporum
- in conicis ſectionibus eccentricis I, ſect. 3.
- in orbibus mobilibus I, ſect. 9.
- in ſuperficiebus datis & funependulorum motus reciprocus I, ſect. 10.

Motus corporum viribus centripetis ſe mutuo petentium I, ſect. 11.

Motus corporum minimorum, quæ viribus centripetis ad ſingulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur I, ſect. 14.

Motus corporum quibus reſiſtitur
- in ratione velocitatis II, ſect. 1.
- in duplicata ratione velocitatis II, ſect. 2.
- partim in ratione velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicata II, ſect. 3.

Motus
- corporum ſola vi inſita progredientium in mediis reſiſtentibus II, 1, 2, 5, 6, 7, 11, 12: 326, 16.
- corporum recta aſcendentium vel deſcendentium in mediis reſiſtentibus, agente vi gravitatis uniformi II, 3, 8, 9, 40, 13, 14.
- corporum projectorum in mediis reſiſtentibus, agente vi gravitatis uniformi II, 4, 10.
- corporum circumgyrantium in mediis reſiſtentibus II, ſect. 4.
- corporum funependulorum in mediis reſiſtentibus II, ſect. 6.

Motus & reſiſtentia fluidorum II, ſect. 7.

Motus per fluida propagatus II, ſect. 8.

Motus circularis ſeu vorticoſus fluidorum II, ſect. 9.

Mundus originem non habet ex cauſis mechanicis p. 527, 25.

N.

Navium conſtructioni propoſitio non inutilis 324, 10.

O.

Opticarum ovalium inventio, quam *Carteſius* celaverat I. 97. *Carteſiani* problematis generalior ſolutio I, 98.

Orbitarum inventio
- quas corpora deſcribunt, de loco dato data cum velocitate, ſecundum datum rectam egreſſa; ubi vis centripeta eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ & vis illius quantitas abſoluta cognoſcitur I, 17.
- quas corpora deſcribunt, ubi vires centripetæ ſunt reciproce ut cubi diſtantiarum 51, ult. 127, 22: 135, 14.
- quas corpora viribus quibuſcunque centripetis agitata deſcribunt I, ſect. 8.

P.

Parabola, qua lege vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ deſcribitur a corpore revolvente I, 13

Pendulorum affectiones explicantur I, 50, 51, 52, 53: II, ſect. 6

Pendulorum iſochronorum longitudines diverſæ in diverſis locorum latitudinibus inter ſe conferuntur, tum per obſervationes, tum per theoriam gravitatis III, 20.

Philoſophandi regulæ p. 387.

Planetæ
- non deferuntur a vorticibus corporeis 382, 31: 384, 22: 526, 32.
- Primarii
  - ſolem cingunt 392, 21.
  - moventur in ellipſibus umbilicum habentibus in centro ſolis III, 13.
  - radiis ad ſolem ductis deſcribunt areas temporibus proportionales 394, 2: III, 13.
  - temporibus periodicis revolvuntur, quæ ſunt in ſeſquiplicata ratione diſtantiarum a ſole 392, 2: III, 13 & I, 15.
  - retinentur in orbibus ſuis a vi gravitatis, quæ reſpicit ſolem, & eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ ab ipſius centro III, 2, 5.
- Secundarii
  - moventur in ellipſibus umbilicum habentibus in centro primariorum III, 22.
  - radiis ad primarios ſuos ductis deſcribunt areas temporibus proportionales 390, 3: 391, 24: 394, 14: III, 22.
  - temporibus periodicis revolvuntur, quæ ſunt in ſeſquiplicata ratione diſtantiarum a primariis ſuis 390, 3: 391, 24: III, 22 & I, 15.
  - retinentur in orbibus ſuis a vi gravitatis, quæ reſpicit primarios, & eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ ab eorum centris III, 1, 3, 4, 5.

Planetarum
- tempora periodica 393, 18.
- diſtantiæ a ſole 393, 21.
- orbium aphelia & nodi prope quieſcunt III, 14.
- orbes determinantur III, 15, 16.
- loca in orbibus inveniuntur I, 31.
- denſitas calori, quem a ſole recipiunt, accommodatur 405, 33.
- converſiones diurnæ ſunt æquabiles III, 17.

axes

axes ſunt minores diametris, quæ ad eoſdem axes normaliter ducuntur III, 18.
Pondera corporum
in terram vel ſolem vel planetam quemvis, paribus diſtantiis ab eorum centris, ſunt ut quantitates materiæ in corporibus III, 6.
non pendent ab eorum formis & texturis 402, 8.
in diverſis terræ regionibus inveniuntur & inter ſe comparantur III, 20.
Problematis
Kepleriani ſolutio per trochoidem & per approximationes I, 31.
Veterum de quatuor lineis, a *Pappo* memorati, a *Carteſio* per calculum agebraicum tentati, compoſitio geometrica 77, antepenult.
Projectilia, ſepoſita medii reſiſtentia, moveri in parabola colligitur 22, 3: 54, 5: 221, 23: 256, 23.
Projectilium motus in mediis reſiſtentibus II, 4, 10.
Pulſuum aëris, quibus ſoni propagantur, determinantur intervalla ſeu latitudines II, 50: 373, 32. Hæc intervalla in apertarum fiſtularum ſonis æquari duplis longitudinibus fiſtularum veroſimile eſt 374, 3.

Q.

Quadratura generalis ovalium dari non poteſt per finitos terminos I, lem. 28. p. 106.
Qualitates corporum qua ratione innoteſcunt & admittuntur 387, 16.
Quies vera & relativa p. 7, 8, 9, 10.

R.

Reſiſtentiæ quantitas
in mediis non continuis II, 35.
in mediis continuis II, 38.
in mediis cujuſcunque generis 327, 7.
Reſiſtentiarum theoria confirmatur
per experimenta pendulorum II, 30, 31. ſch. gen. p. 307.
per experimenta corporum cadentium II, 40, ſch. p. 346.
Reſiſtentia mediorum
eſt ut eorundem denſitas, cæteris paribus 314, 19: 315, 26: II, 33, 35, 38: 355, 23.
eſt in duplicata ratione velocitatis corporum quibus reſiſtitur, cæteris paribus 239, 3: 308, 9: II, 33, 35, 38: 351, 8.
eſt in duplicata ratione diametri corporum ſphæricorum quibus reſiſtitur cæteris paribus 311, 22: 312 antepenult. II, 33, 35, 38: ſch. p. 346.
Reſiſtentia fluidorum triplex eſt; oriturque vel ab inertia materiæ fluidæ, vel a tenacitate partium ejus, vel a frictione 274, 3 Reſiſtentia quæ ſentitur in fluidis fere tota eſt primi generis 354, 32, & minui non poteſt per ſubtilitatem partium fluidi, manente denſitate 356, 8.
Reſiſtentiæ globi ad reſiſtentiam cylindri proportio, in mediis non continuis II, 34. In mediis compreſſis p. 341. lemm. 7.
Reſiſtentia globi in mediis non continuis II, 35. In mediis compreſſis II, 38. Sed quomodo per experimenta invenienda ſit, prop. 40.
Reſiſtentia, quam patitur a fluido fruſtum conicum, qua ratione fiat minima 323, antepenult.
Reſiſtentiæ minimæ ſolidum 324, penult.

S.

Satellitis
Jovialis extimi elongatio maxima heliocentrica a centro Jovis 404, ult.
Hugeniani elongatio maxima heliocentrica a centro Saturni 405, 1.
Satellitum
Jovialium tempora periodica & diſtantiæ a centro Jovis 390, 12.
Saturniorum tempora periodica & diſtantiæ a centro Saturni 391, ult. 392, 1.
Jovialium & Saturniorum inæquales motus a motibus lunæ derivari poſſe oſtenditur III, 23.
Saturni
tempus periodicum 393, 18.
diſtantia a Sole 393, 21.
diameter apparens 392, 19.
diameter vera 405, 22.
vis attractiva quanta ſit 405, 4.
pondus corporum in ejus ſuperficie 405, 8.
denſitas 405, 24.
quantitas materiæ 405, 14.
perturbatio a Jove quanta ſit 409, 25.
diameter apparens annuli, quo cingitur 392, 13.
Sectiones conicæ, qua lege vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum, deſcribuntur a corporibus revolventibus 65, 20.
Sectionum conicarum deſcriptio geometrica,
ubi dantur umbilici I, ſect. 4.
ubi non dantur umbilici I, ſect. 5. ubi dantur centra vel aſymptoti 95, 18.
Seſquiplicata ratio definitur 36, 6.
Sol
circum planetarum omnium commune gravitatis centrum movetur III, 12.
tempus ejus periodicum circa axem ſuum 411, 5 a fine.
diameter ejus mediocris apparens 468, 30 & 31.
diameter vera 405, 22.
parallaxis ejus horizontalis 405, 15.
parallaxin habet menſtruam 410, 16.
vis ejus attractiva quanta ſit 405, 4.
pondus corporum in ejus ſuperficie 405, 8.
denſitas ejus 405, 24.
quantitas materiæ 405, 14.
vis ejus ad perturbandos motus lunæ 396, 15: III, 25.
vis ad mare movendum III, 36.
Sonorum
natura explicatur II, 43, 47, 48, 49, 50.
propagatio divergit a recto tramite 361, 9: fit per agitationem aëris 372, 10.

velocitas computo colligitur 372, 17; paululum major eſſe debet æſtivo quam hyberno tempore per theoriam 373, 26.
ceſſatio fit ſtatim, ubi ceſſat motus corporis ſonori 374, 6.
augmentatio per tubos ſtenterophonicos 374, 9.
Spatium
abſolutum & relativum p. 6, 7, 8.
non eſt æqualiter plenum 402, 27.
Sphæroidis attractio, cujus particularum vires ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum 217, 4.
Spiralis, quæ ſecat radios ſuos omnes in angulo dato, qua lege vis centripetæ tendentis ad centrum ſpiralis deſcribi poteſt a corpore revolvente, oſtenditur I, 9: II, 15, 16.
Spiritum quendam corpora pervadentem & in corporibus latentem, ad plurima naturæ phænomena ſolvenda, requiri ſuggeritur 530, 23.
Stellarum fixarum
quies demonſtratur 410, 27.
radiatio & ſcintillatio quibus cauſis referendæ ſint 510, 8.
Stellæ novæ unde oriri poſſint 525, 28.
Subſtantiæ rerum omnium occultæ ſunt 530, 21.

T.

Tempus abſolutum & relativum p. 6, 7.
Temporis æquatio aſtronomica per horologium oſcillatorium & eclipſes ſatellitum Jovis comprobatur 8, 8.
Tempora periodica corporum revolventium in ellipſibus, ubi vires centripetæ ad umbilicum tendunt I, 15.
Terræ
dimenſio per *Norwoodum* 412, ult. per *Picartum* 413, 5; per *Caſſinum* 413, 7.
figura invenitur, & proportio diametrorum, & menſura graduum in meridiano III, 19, 20.
altitudinis ad æquatorem ſupra altitudinem ad polos quantus ſit exceſſus 415, 20: 421, antepenult. &c.
ſemidiameter maxima, & minima 415, 25; mediocris 415, 20. &c.
globus denſior eſt quam ſi totus ex aqua conſtaret 406, 20.
axis nutatio III, 21.
motus annuus in orbe magno demonſtratur III, 12, 13: 512, 28.
eccentricitas quanta ſit 460, 10.
aphelii motus quantus ſit 411, 10.

V.

Vacuum datur, vel ſpatia omnia (ſi dicantur eſſe plena) non ſunt equaliter plena 356, 19: 402, penult.
Velocitas maxima quam globus in medio reſiſtente cadendo poteſt acquirere II, 38. cor 2.
Velocitates corporum in ſectionibus conicis motorum, ubi vires centripetæ ad umbilicum tendunt I, 16.
Veneris
tempus periodicum 393, 18.
diſtantia a ſole 393, 21.
aphelii motus 411, 11.
Virium compoſitio & reſolutio p. 13.
Vires attractivæ corporum
ſphæricorum ex particulis quacunque lege trahentibus compoſitorum expenduntur I, ſect. 12.
non ſphæricorum ex particulis quacunque lege trahentibus compoſitorum expenduntur I, ſect. 13.
Vis centrifuga corporum in æquatore terræ quanta ſit 413, ult.
Vis centripeta definitur p. 3.
quantitas ejus abſoluta definitur p. 4.
quantitas acceleratrix definitur p. 4.
quantitas motrix definitur p. 5.
proportio ejus ad vim quamlibet notam, qua ratione colligenda ſit, oſtenditur 45, 10.
Virium centripetarum inventio, ubi corpus in ſpatio non reſiſtente, circa centrum immobile, in orbe quocunque revolvitur I, 6: I, ſect. 2 & 3.
Viribus centripetis datis ad quodcunque punctum tendentibus, quibus figura quævis a corpore revolvente deſcribi poteſt; dantur vires centripetæ ad aliud quodvis punctum tendentes, quibus eadem figura eodem tempore periodico deſcribi poteſt 50, 3.
Viribus centripetis datis quibus figura quævis deſcribitur a corpore revolvente; dantur vires quibus figura nova deſcribi poteſt, ſi ordinatæ augeantur vel minuantur in ratione quacunque data, vel angulus ordinationis utcunque mutetur, manente tempore periodico 54, 10.
Viribus centripetis in duplicata ratione diſtantiarum, decreſcentibus, quænam figuræ deſcribi poſſunt, oſtenditur 59, 23: 163, 10.
Vi centripeta,
quæ ſit reciproce ut cubus ordinatim applicatæ tendentis ad centrum virium maxime longinquum, corpus movebitur in data quavis coni ſectione 51, 6.
quæ ſit ut cubus ordinatim applicatæ tendentis ad centrum virium maxime longinquum, corpus movebitur in hyperbola 221, antepenult.
Umbra terreſtris in eclipſibus lunæ augenda eſt, propter atmoſphæræ refractionem 463, 5 a fine.
Undarum in aquæ ſtagnantis ſuperficie propagatarum velocitas invenitur II, 46.
Vorticum natura & conſtitutio ad examen revocatur II, ſect. 9: 481, 21: 526, 32.
Ut. Hujus voculæ ſignificatio mathematica definitur 34, 19.

FINIS.

CATALOGUS Librorum proſtantium apud GUIL. & JOH. INNYS.

1. OPTICKS, or a Treatiſe of the Reflections, Refractions, Inflections and Colours of Light. The third Edition corrected. By Sir *Iſaac Newton*, Kt. 8vo. 1721.

2. Optice, ſive de Reflectionibus, Refractionibus, Inflectionibus & Coloribus Lucis. Libri tres. Authore Iſaaco Newton, Equite Aurato. Latinè reddidit Samuel Clarke, S. T. P. Editio ſecunda, auctior. 8vo. 1719.

3. Analyſis per Quantitatum Series, Fluxiones, ac Differentias cum Enumeratione Linearum tertii Ordinis. 4°. 1711.

4. Arithmetica Univerſalis, ſive de Compoſitione & Reſolutione Arithmetica Liber. Edit. ſecunda. 8vo. 1722.

5. The ſame in Engliſh by Mr. *Raphſon*. 8vo.

6. The Philoſophical Works of the Honourable *Robert Boyle*, Eſq; abridg'd, methodiz'd, and diſpos'd under the general Heads of Phyſics, Statics, Pneumatics, Natural Hiſtory, Chymiſtry and Medicine. The whole illuſtrated with Notes, containing the Improvements made in the ſeveral Parts of natural and experimental Knowledge ſince his Time. In three Volumes. By *Peter Shaw*, M. D. 4°.

7. Geometria Organica, ſive Deſcriptio Linearum curvarum univerſalis. Auctore Colino Mac-Laurin Matheſeos in Collegio novo Abredonenſi Profeſſore, & Reg. Soc. Socio. 4°. 1720.

8. Philoſophical Tranſactions, giving ſome Account of the preſent Undertakings, Studies and Labours of the Ingenious in many conſiderable Parts of the World, from 1665 to 1725. In 32 Volumes. Continued and publiſhed by Dr. *James Jurin*, Secretary to the Royal Society. *N. B.* There are 389 Numbers, moſt of which may be had ſeparate.

9. The ſame abridged by Mr. *Lowthorp*, and Mr. *Mott*. In 5 Vol. 4°.

10. Epiſtola ad amicum de Coteſii Inventis Curvarum ratione, quæ cum Circulo & Hyperbola comparationem admittunt, cui additur appendix. 4°. 1722.

11. An Analytick Treatiſe of Conic Sections, and their Uſe, for reſolving of Equations in determinate and indeterminate Problems, being the Poſthumous Work of the Marquiſs *de l' Hoſpital*, Honorary Fellow of the Academy Royal of Sciences. 4°.

12. Hiſtoria Cœleſtis Britannica, tribus Voluminibus contenta, obſervante Johanne Flamſtedio, A. R. in Obſervatorio Regio Grenovicenſi, 1725.

13. Mathematical Elements of Natural Philoſophy, confirm'd by Experiments, or an Introduction to Sir *Iſaac Newton*'s Philoſophy. Written in Latin by *William James s' Graveſand*, Doctor of Laws and Philoſophy, Profeſſor of Mathematicks and Aſtronomy at *Leyden*, and F. R. S. of *London*. Tranſlated into Engliſh by *J. T. Deſaguliers*, L. L. D. F. R. S. and Chaplain to his Grace the Duke of *Chandos*. In 2 Vol. 8°. 1726.

14. An Eſſay on Perſpective, written by *William James s' Graveſand*, Doctor of Laws, *&c.* 8vo. 1724.

15. Phyſico-Theology, or a Demonſtration of the Being and Attributes of God, from his Works of the Creation, with large Notes and many curious Obſervations. By *William Derham*, Rector of *Upminſter* in *Eſſex*, Canon of *Windſor*, F. R. S. The Sixth Edition. 8vo. 1723.

16. Aſtro-Theology, or a Demonſtration of the Being and Attributes of God, from a Survey of the Heavens. Illuſtrated with Copper Plates. The Fifth Edition. By the ſame Author. 8vo. 1726.

17. Methodus Incrementorum directa & inverſa. Auctore Brook Taylor, L. L. D. & Regiæ Societatis Secretario. 4°. 1717.

18. The

18. The Religious Philoſopher, or the right Uſe of contemplating the Works of the Creator I. in the wonderful Structure of animal Bodies, and in particular, Man. II. In the no leſs wonderful and wiſe Formation of the Elements, and their various Effects upon animal and vegetable Bodies. And III. in the moſt amazing Structure of the Heavens, with all their Furniture. *Deſigned for the Conviction of Atheiſts and Infidels.* In Two Volumes. 4°. Throughout which all the late Diſcoveries in Anatomy, Philoſophy, and Aſtronomy, together with the various Experiments made uſe of to illuſtrate the ſame, are moſt copiouſly handled by that Learned Mathematician Dr. *Nieuwentyt*. Tranſlated from the *Low Dutch*. To which is prefix'd a Letter to the Tranſlator, by the Rev. *J. T. Deſaguliers*, L. L. D. F. R. S. The third Edition, adorned with Cuts. 1724.

19. Philoſophical Experiments and Obſervations of the late eminent Dr. *Robert Hooke*, F. R. S. and Geom. Prof. Greſh. and other eminent Virtuoſo's in his Time. With Copper Plates. Publiſhed by *William Derham*, F. R. S. 8vo. 1726.

20. The Poſthumous Works of Dr. *Robert Hooke*; in which 1. the preſent Deficiency in Natural Philoſophy is diſcours'd of, with the Methods of rendring it more eaſy and beneficial. 2. Of the Nature, Motions, and Effects of Light, particularly that of the Sun and Comets. 3. An Hypothetical Explication of Memory; how the Organs made uſe of by the Mind in its Operation may be mechanically underſtood. 4. An Hypotheſis and Explication of the Cauſe of Gravity or Gravitation, Magnetiſm, &c. 5. Diſcourſes of Earthquakes, their Cauſes and Effects, and Hiſtories of ſeveral: To which are annexed Phyſical Explications of ſeveral of the Fables in *Ovid's Metamorphoſis*, very different from other Mythologick Interpreters. 6. Lectures for improving Navigation and Aſtronomy, with the Deſcriptions of ſeveral new and uſeful Inſtruments, illuſtrated with Sculptures. To theſe Diſcourſes is prefix'd the Author's Life. By *Richard Waller*, R. S. Secr. Folio.

21. A Treatiſe of Architecture, with Remarks and Obſervations by that excellent Maſter thereof *Sebaſtian le Clerc*, Knight of the Empire, Deſigner and Engraver to the Cabinet of the late *French* King, and Member of the Academy of Arts and Sciences; neceſſary for young People who would apply to that noble Art. Engraven in 181 Copper Plates by *John Sturt*. Tranſlated by Mr. *Chambers*. In 2 Vol. 8°. 1725.

22. Philoſophical Letters between the late Learned Mr. *Ray*, and ſeveral of his ingenious Correſpondents, Natives aud Foreigners. To which are added thoſe of *Francis Willoughby*, Eſq; the whole conſiſting of many curious Diſcoveries and Improvements in the Hiſtory of Quadrupeds, Birds, Fiſhes, Inſects, Plants, Foſſils, Fountains, &c. Publiſhed by *W. Derham*, M. A. and F. R. S. 1718.

23. The Wiſdom of God manifeſted in the Works of the Creation. In two Parts. To which are added Anſwers to ſome Objections. By *John Ray*, late Fellow of the Royal Society. The Eighth Edition. 8°. 1722.

24. Three Phyſico-Theological Diſcourſes, concerning I. The primitive Chaos, and Creation of the World. II. The general Deluge, its Cauſes and Effects. III. The Diſſolution of the World, and future Conflagration; wherein are largely diſcuſſed the Production and Uſe of Mountains; the Original of Fountains, of formed Stones, and Sea Fiſhes, Bones and Shells found in the Earth; the Effects of particular Floods and Inundations of the Sea; the Eruptions of Vulcano's; the Nature and Cauſes of Earthquakes; alſo an Hiſtorical Account of the two late remarkable ones in *Jamaica* and *England*: With practical Inferences, illuſtrated with Copper Plates. By *John Ray*, late Fellow of the Royal Society. The Fourth Edition. 8°. 1721.

25. New Memoirs of Literature, containing an Account of new Books printed both at home and abroad; with Diſſertations upon ſeveral Subjects, Miſcellaneous Obſervations, &c. For *February*, 1726. being the Fourteenth Number. To be continued Monthly. 8°.

26. A Treatiſe of Five Orders of Columns in Architecture, *viz. Tuſcan, Doric, Ionic, Corinthian* and *Compoſite*, wherein the Proportions and Characters of the Members of their ſeveral Pedeſtals, Columns and Entablatures, are diſtinctly conſider'd, with Reſpect to the Practice of the Antients and Moderns. Alſo a moſt natural, eaſy and practical Method laid down for determining the moſt minute Part in all the Orders without a Fraction. To which is annexed a Diſcourſe concerning Pilaſters, and of ſeveral Abuſes introduced into Architecture. Engraven on Six Folio Plates of the ſeveral Orders, adorned with twenty four Borders, as many initial Letters, and a like Number of Tail-Pieces, by *John Sturt*. Written in French by *Claude Perrault*, of the Royal Academy of *Paris*, Author of the celebrated *Comment on* Vitruvius. Made Engliſh by *John James* of *Greenwich*. 1722.

27. Rules and Examples of Perſpective, proper for Painters and Architects, with 150 Plates. By *Andrea Pozzo*. Engliſhed by *John James* of *Greenwich*. Fol.

928854-